Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézet

Directions and other topics in Galois-geometries

című doktori értekezés tézisei

Takáts Marcella

Matematikai Doktori Iskola
Vezető: Laczkovich Miklós
egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia tagja

Elméleti Matematika Doktori Program
Vezető: Szűcs András
egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja

Témavezető: Sziklai Péter, D.Sc.
egyetemi docens

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézet
Számítógéptudományi Tanszék

2014

Bevezetés

A disszertáció az algebra és a geometria egy határterületének vizsgálatával foglalkozik, pontosabban: véges testre épített (Galois-)geometriákkal, illetve véges testek „geometriai jellegű" tulajdonságaival.

A véges geometriai kérdéseknek alapvetően kétféle szokásos tárgyalási módja létezik, kombinatorikus és algebrai. A kiindulópont mindkét esetben az, hogy valamilyen kombinatorikus tulajdonsággal - pl. az egyenesmetszeteivel - definiálunk egy ponthalmazt. Az első megközelítésben kombinatorikus, ill. geometriai eszközökkel vizsgáljuk a halmazt. A másik lehetőség az algebrai jellemzők feltárása. Az algebra és a véges geometria kapcsolata klasszikusnak számít, elég pl. bizonyos csoportokra és természetes módon hozzájuk tartozó véges geometriai objektumokra gondolni (pl. Mathieu-csoportok - Witt-designok). Véges testre épített n dimenziós térben tekintünk egy ponthalmazt, és azt vizsgáljuk, hogy a kombinatorikus „szép" tulajdonsága lefordítható-e valamilyen „szép" algebrai struktúrává. A dolgozatban alkalmazott egyik legfontosabb eszköz a Blokhuis és Szőnyi által megalkotott, azóta pedig sokak által továbbfejlesztett, ún. polinom-módszer: a ponthalmaznak megfeleltetünk egy véges test fölötti polinomot, melyet különféle eszközökkel vizsgálunk, majd az így szerzett algebrai információt visszafordítjuk geometriai nyelvre.

A disszertációban mindkét megközelítésre látunk példákat. Az első három fejezetben algebrai módszereket mutatunk be, az utolsó három fejezetben kombinatorikai vizsgálatokat folytatunk.

Többek között stabilitási, ill. kiegészíthetőségi kérdésekkel foglalkozunk: adott tulajdonságú struktúrák egy osztályában tekintjük az extremálisat (pl. legnagyobb méretűt), és megmutatjuk, hogy hozzá (pl. méretben) közeli struktúrát csak az extremális „elrontásával" kaphatunk (pl. kidobunk néhány pontot).

A disszertáció döntő részében, a 2., 3. és 4. fejezetben az *iránypróbléma* néhány lehetséges megközelítésével, illetve általánosításával foglalkozunk. A már Rédei által is vizsgált iránypróblémának számtalan, a véges geometrián túlmutató alkalmazása van. Az alapprobléma a következő: Tekintsünk a $\mathrm{GF}(q)$ test feletti affin térben egy U ponthalmazt. A ponthalmaz által *meghatározott irány*nak nevezzük a $d \in H_\infty$ ideális pontot, ha van olyan affin egyenes, melynek ideális pontja d, és legalább 2 pontban metszi U-t. Klasszikus kérdés a Galois-geometriában, hogy hány irányt határoz meg egy ponthalmaz, illetve tudunk-e valamit mondani a *kevés* irányt meghatározó ponthalmazok méretéről, struktúrájáról.

Jelölés. Jelen műben p mindig prímet, $q = p^h$ prímhatványt, $\mathrm{GF}(q)$ a q elemű véges testet jelöli. A testelemeket kisbetűkkel, a változókat nagybetűkkel jelöljük. Π_n (kombinatorikusan definiált) n rendű projektív síkot jelöl, $\mathrm{PG}(n, q)$ a $\mathrm{GF}(q)$ testre épített n dimenziós projektív teret. A projektív tér pontjait kerek zárójelbe tett homogén $(n+1)$-esekkel azonosítjuk, vagyis $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, ahol $x_i \in \mathrm{GF}(q)$, a tér egy pontja; a szögletes zárójelbe tett $(n+1)$-esek,

$[y_0, y_1, \ldots, y_n]$, ahol $y_i \in \mathrm{GF}(q)$, a tér hipersíkjainak felelnek meg. Egy pont akkor és csak akkor illeszkedik egy hipersíkra, ha az $x_0y_0+x_1y_1+\cdots+x_ny_n$ skaláris szorzat 0. $\mathrm{AG}(n,q)$ jelöli a $\mathrm{GF}(q)$ testre épített n dimenziós affin teret, amely megfelel a $\mathrm{GF}(q)$ feletti n dimenziós vektortérnek. $\mathrm{AG}(n,q)$ a szokásos módon beágyazható a projektív térbe: $\mathrm{PG}(n,q) = \mathrm{AG}(n,q) \cup H_\infty$, ahol H_∞ a *végtelen távoli hipersík* vagy *ideális hipersík*, pontjai az *ideális pontok*. H_∞ pontjait *irányoknak* is nevezzük.

A Rédei-polinom. Legfontosabb algebrai eszközünk egy, a ponthalmazhoz hozzárendelt polinom vizsgálata. Legyen $U = \{(1, a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) : i = 1, ..., m\} \subset \mathrm{AG}(n,q) \subset \mathrm{PG}(n,q)$ ponthalmaz. Ekkor az U ponthalmaz *Rédei-polinom*ja:

$$R(X_0, X_1, X_2, ..., X_n) = \prod_{i=1}^{m} (X_0 + a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \cdots + a_{in}X_n).$$

Látható, hogy a polinom teljesen reducibilis, ahol minden lineáris faktor az U halmaz egy-egy pontjának felel meg. A polinomba a $\mathrm{PG}(n,q)$ tér *hipersíkjait* helyettesítjük. Ha egy $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ helyettesítésre valamely Rédei-faktor nulla, akkor a hipersík tartalmazza a faktornak megfelelő pontot. R a duális térben algebrai hiperfelület, pontjai az eredeti tér (a ponthalmazt metsző) hipersíkjainak felelnek meg. Az $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ hipersík akkor és csak akkor tartalmaz pontosan k pontot az U halmazból (és lesz így behelyettesítve az $R(X_0, X_1, X_2, ..., X_n)$ polinom k-szoros gyöke), ha a duális térben $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ az R felület k multiplicitású pontja. Az U ponthalmaz hipersíkokkal való metszési tulajdonságait tehát lefordíthatjuk a Rédei-polinom algebrai tulajdonságaira, és a továbbiakban ezt, illetve a polinom által a duális térben definiált hiperfelületet vizsgálhatjuk.

Az irányprobléma. Tekintsünk egy $U \subset \mathrm{AG}(n,q)$ ponthalmazt, jelölje D az U által meghatározott irányok halmazát. Rédei eredeti problémafölvetése a $\mathrm{GF}(q)$ feletti síkon egy függvény grafikonja által meghatározott irányokra vonatkozott. Ekkor $|U| = q$, és $\infty \notin D$, vagyis a „függőleges" irány, azaz a függőleges egyenesek ideális pontja *nem meghatározott irány*.

A kérdés egy ponthalmaz által meghatározott irányok száma, illetve az „érdekes" ponthalmazok leírása. Akkor lehet „érdekes" egy ponthalmaz, ha kevés irányt határoz meg. Könnyen látható, hogy az n dimenziós térben, ha $|U| > q^{n-1}$, akkor a halmaz minden irányt meghatároz. q^{n-1}-nél már jóval kevesebb véletlen pont is meghatároz minden irányt. A felvetődő kérdések: extremális, tehát q^{n-1} pontú halmaz esetében a meghatározott irányok száma, illetve a halmaz struktúrájának leírása, ha van „sok" nem meghatározott irány. Kisebb ponthalmaz esetén ezeken kívül még kiegészíthetőségi kérdések is fölmerülnek: hozzávehető-e a halmazhoz néhány pont úgy, hogy elérje a q^{n-1} méretet, és továbbra is csak azokat az irányokat határozza meg, mint az eredeti halmaz.

A legtöbbet vizsgált kérdés a q elemű testre épített síkban a maximális méretű, azaz q pontú halmazok által meghatározott irányok száma. Rédei és Megyesi tétele [10] kimondja, hogy p prím

rendű sík esetén, ha a p pont nem kollineáris, ez legalább $\frac{p+3}{2}$, Lovász és Schrijver pedig [9]-ben megmutatták, hogy a lehető legkevesebb irányt meghatározó ponthalmaz (affin transzformáció erejéig) egyértelmű. q rendű sík esetének teljes leírását adja Blokhuis, Ball, Brouwer, Storme és Szőnyi tétele.

Theorem 0.16. [8], [7] *Legyen $U \subset \mathrm{AG}(2,q)$ ponthalmaz, $|U| = q$. Legyen $s = p^e$ a legnagyobb olyan p-hatvány, melyre teljesül, hogy minden szelő s többszöröse számú pontban metszi U-t. Ekkor a következők valamelyike teljesül:*
(i) $s = 1$ és $\frac{q+3}{2} \leq |D| \leq q+1$;
(ii) $\mathrm{GF}(s)$ résztest $\mathrm{GF}(q)$-ban, és $\frac{q}{s}+1 \leq |D| \leq \frac{q-1}{s-1}$;
(iii) $s = q$ és $|D| = 1$.
Ha $s \geq 3$, akkor U ponthalmaz $\mathrm{GF}(s)$-lineáris.

1. Vandermonde-halmazok és szuper-Vandermonde-halmazok

A disszertáció első fejezete egy tisztán algebrainak tűnő problémával, a Vandermonde- és szuper-Vandermonde-halmazok leírásával foglalkozik [1]. Mint látni fogjuk, ezen halmazok vizsgálatának az algebrai érdekességen túl véges geometriai motivációja is van.

Legyen $S = \{x_1, ..., x_n\} \subseteq \mathrm{GF}(q)$ a q rendű véges test elemeinek egy halmaza. Az S elemeinek *k-adik hatványösszege* $\pi_k(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$. Legyen $w = w_S$ a legkisebb pozitív egész k, melyre $\pi_k \neq 0$, ha létezik ilyen k, egyébként $w = \infty$.

Definition 1.4. *Legyen $1 < t < q$. $T = \{y_1, ..., y_t\} \subseteq \mathrm{GF}(q)$ halmaz Vandermonde-halmaz, ha $\pi_k = \sum_i y_i^k = 0$ minden $1 \leq k \leq t-2$ esetén.*

Más szóval egy T halmaz pontosan akkor Vandermonde-féle, ha $w_T \geq t-1$. Honnan származik az elnevezés? Ha $p \mid t$, akkor egy t elemű halmaz esetén legfeljebb $t-2$ hatványösszeg lehet nulla, vagyis $w_T \leq t-1$ - ez abból látható, hogy különböző elemek Vandermonde-determinánsa nem nulla. Az extremális $w = t-1$ esetet pedig pontosan ezek a halmazok képviselik. Általában egy t elemű halmaz esetén legfeljebb $t-1$ hatványösszeg lehet nulla (tehát egy Vandermonde-halmazra $w_T = t-1$ vagy t teljesül). Ez motiválja a következő definíciót.

Definition 1.5. *Legyen $1 < t < q$. $T = \{y_1, ..., y_t\} \subseteq \mathrm{GF}(q)$ halmaz szuper-Vandermonde-halmaz, ha $\pi_k = \sum_i y_i^k = 0$ minden $1 \leq k \leq t-1$ esetén.*

Vagyis egy szuper-Vandermonde-halmazra $w_T = t$, a fentiek fényében ez csak $p \nmid t$ esetén lehet. Ha egy halmazhoz hozzávesszük a nulla elemet (vagy éppen kidobjuk belőle), a hatványösszegek nem változnak, de - mivel a halmaz mérete megváltozik - a „Vandermonde-ság” gyengül (vagy erősödik); ezzel az eljárással egy szuper-Vandermonde-halmazból Vandermonde-halmazt kapunk (és fordítva). Egy szuper-Vandermonde-halmaz sosem tartalmazza a nulla elemet.

Ha T Vandermonde, és mérete osztható a karakterisztikával, akkor bármely $a \in T$ esetén a $T - a$ eltolással kapott halmaz is Vandermonde, és tartalmazza a nulla elemet. Természetesen adódó példa, hogy $\mathrm{GF}(q)$ bármely additív részcsoportja Vandermonde-, bármely multiplikatív részcsoportja szuper-Vandermonde-halmaz. Véges geometriai szempontból érdekes ponthalmazokból is származnak szép példák.

A fejezet célja bizonyos szuper-Vandermonde-halmazok leírása. Belátjuk, hogy egy szuper-Vandermonde-halmaz megfeleltethető egy $f(Y) = Y^t + g^p(Y)$ alakú, *teljesen reducibilis* polinomnak, ahol $t > p \cdot \deg g$. Ebből például rögtön látszik, hogy $q = p$ prím esetben ez $f(Y) = Y^t + c$ alakú, vagyis a halmaz a t-edik egységgyökök multiplikatív csoportja vagy annak mellékosztálya lehet (ha ez létezik, azaz ha $t \mid q - 1$).

A fejezet fő eredménye a kis és nagy szuper-Vandermonde-halmazok karakterizációja. Mit jelent esetünkben a „kis", illetve „nagy" kifejezés? Láttuk, hogy $\mathrm{GF}(q)$ bármely additív részcsoportjából a nullát kidobva szuper-Vandermonde-halmazt kapunk. A legkisebb, ill. legnagyobb nemtriviális additív részcsoport mérete p, illetve q/p. Így tehát kicsinek nevezünk egy szuper-Vandermonde-halmazt, ha a mérete p-nél kisebb, és nagynak, ha q/p-nél nagyobb. Megjegyzendő, hogy egy p méretű additív részcsoportból kapott szuper-Vandermonde-halmaz egy multiplikatív részcsoport transzformáltja. Ugyanez a q/p méretű additív részcsoportból kapott halmazra nem teljesül. Láttuk, hogy léteznek példák geometriailag érdekes ponthalmazokból származó szuper-Vandermonde-halmazokra. Valójában a p és q/p közti mérettartományban olyan sok és annyira különböző struktúrájú geometriai példát találunk, hogy nem várható ezek egységes karakterizációja. Így a „kis" és „nagy" szuper-Vandermonde-halmazok leírására vállalkozunk.

Theorem 1.12. *Legyen $T \subset \mathrm{GF}(q)$ egy szuper-Vandermonde-halmaz, $|T| < p$. Ekkor T egy multiplikatív részcsoport (vagy annak mellékosztálya).*

Theorem 1.13. *Legyen $T \subset \mathrm{GF}(q)$ egy szuper-Vandermonde-halmaz, $|T| > q/p$. Ekkor T egy multiplikatív részcsoport (vagy annak mellékosztálya).*

Ezzel teljes leírást adtunk a $q = p^2$ esetre: ekkor egy szuper-Vandermonde-halmaz csakis egy multiplikatív részcsoport (vagy annak mellékosztálya) lehet.

2. Kis ponthalmazok

A disszertáció 2., 3. és 4. fejezetében az irányproblémával kapcsolatos kérdéseket vizsgálunk. Az első két esetben algebrai eszközöket alkalmazunk, mégpedig a Rédei-polinom vizsgálatán alapuló ún. polinom-módszert.

A második fejezet Fancsali Szabolccsal és Sziklai Péterrel közös eredményeket tartalmaz, melyek már megjelentek a [3] cikkben, valamint Fancsali Szabolcs Ph.D. disszertációjában. Ezért

jelen dolgozatban csak röviden összefoglaljuk a témakört, ismertetve a módszert és az eredményeket. Bár nem térünk ki minden részletre, nem akartunk teljesen eltekinteni ezen eredmények leírásától, hiszen szerves részét képezik a dolgozat fő témájának, az irányproblémával kapcsolatos kutatásoknak. Az érdeklődő Olvasó számára ajánljuk a két korábbi munka tanulmányozását.

Az irányproblémával kapcsolatban láttuk, hogy q rendű síkon a maximális, azaz q méretű halmazok teljes leírását adja a 0.16 Tétel. Szinte teljesen nyitott, hogy q-nál kisebb halmazokra tudunk-e hasonló karakterizációt adni. $q = p$ prím esetben a kérdést megoldja Szőnyi 0.17 tétele. A dolgozatban a $q = p^h$ prímhatvány esetet vizsgáljuk, és a q-nál kisebb ponthalmazok által meghatározott irányok számára vonatkozó részeredményeket adunk.

Legyen $U \subset \mathrm{AG}(n,q) \subset \mathrm{PG}(n,q)$ ponthalmaz, $|U| < q$. Idézzük fel a 0.16 Tételben szereplő fontos paramétert: jelölje s a legnagyobb p-hatványt, melyre minden meghatározott irányú ℓ egyenes 0 modulo s pontban metszi U-t.

Az U halmaz Rédei-polinomjának vizsgálata során bevezetünk egy t paramétert ($s \leq t$), amely az s mennyiség egy megfelelője; ennek segítségével fogalmazzuk meg a meghatározott irányok számára vonatkozó korlátokat.

A fejezet fő eredménye a 0.16 analógiájára megfogalmazott tétel.

Theorem 2.14. *Legyen $U \subset \mathrm{AG}(2,q)$ ponthalmaz, és jelölje D az U által meghatározott irányok halmazát. Legyenek s és t a fent definiált paraméterek. Tegyük fel, hogy $\infty \in D$. Ekkor az alábbiak valamelyike teljesül:*
(i) $1 = s \leq t < q$ *és* $\dfrac{|U|-1}{t+1} + 2 \leq |D| \leq q+1$;
(ii) $1 < s \leq t < q$ *és* $\dfrac{|U|-1}{t+1} + 2 \leq |D| \leq \dfrac{|U|-1}{s-1}$;
(iii) $1 \leq s \leq t = q$ *és* $D = \{\infty\}$.

A $q = p$ prím speciális esetben a fenti tétel éppen Szőnyi korábban említett eredményét adja. Ha $q > p$, csökkenti az eredmény szépségét, hogy t-t nem geometriai, hanem algebrai úton definiáltuk, és nem világos, hogy milyen geometriai jelentés tulajdonítható neki.

3. Nagy méretű ponthalmazok

A disszertáció harmadik fejezetében egy stabilitási kérdést vizsgálunk [4]. Adott egy $q^{n-1} - \varepsilon$ méretű ponthalmaz az n dimenziós affin térben. Kérdés, hogy kiegészíthető-e maximális méretű, azaz q^{n-1} pontú halmazzá úgy, hogy továbbra is csak azokat az irányokat határozza meg, mint az eredeti halmaz.

Korábbi eredmények ismertek (a legerősebbek $n = 2$ esetben), ezek a ponthalmaz maximális mérettől való ε eltérésére, vagy a meghatározott irányok számára adott feltétel mellett fogalmaznak meg kiegészíthetőséget.

A fejezet fő eredménye, hogy a régóta vizsgált kérdésre új módszert vezettünk be. A meg nem határozott irányok száma mellett az általuk alkotott struktúrát is vizsgáljuk.

Legyen $U = \{(1, a_1^i, a_2^i, a_3^i, \ldots, a_n^i) : i = 1, ..., q^{n-1} - \varepsilon\}$ halmaz. Tekintjük U Rédei-polinomját: $R(X_0, X_1, X_2, ..., X_n) = \prod_{i=1}^{q^{n-1}-\varepsilon}(X_0 + a_1^i X_1 + a_2^i X_2 + ... + a_n^i X_n)$. Ennek segítségével definiálunk egy ε fokú $f(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ polinomot, amely a ponthalmaznak a maximálistól való eltérését (hiányát) írja le. Ennek a polinomnak a vizsgálata vezet el a kiegészülési eredményekhez. Az $f = 0$ egyenlet a duális $\mathrm{PG}(n, q)$ térben egy algebrai hiperfelületet definiál. Ha a polinom lineáris faktorokra bomlik, akkor a duális térben az $f = 0$ felület ε hipersík uniója. Ez az eredeti térben pontosan ε, a halmazhoz hozzávehető pontot jelent, vagyis a halmaz kiegészíthető maximális méretűvé. Egy nem meghatározott irány a duális térben egy olyan hipersíknak felel meg, amely az $f = 0$ felületet *teljesen reducibilisen* metszi, azaz a metszet $(n-2)$ dimenziós alterekre bomlik. (Egy ilyen speciális metszetű hipersíkot TRI (Totally Reducible Intersection) hipersíknak nevezünk.) Emiatt, ha a felület nem teljesen reducibilis, akkor a nem meghatározott irányoknak erős struktúrát kell alkotniuk.

Tetszőleges dimenzióban $\varepsilon = 2$ esetben bizonyítunk kiegészülést.

Theorem 3.10. *Legyen $n \geq 3$. Legyen $U \subset \mathrm{AG}(n, q) \subset \mathrm{PG}(n, q)$, $|U| = q^{n-1} - 2$. Jelölje $D \subseteq H_\infty$ az U által meghatározott irányok halmazát, és jelölje $N = H_\infty \setminus D$ a nem meghatározott irányok halmazát. Ekkor U kiterjeszthető egy $\bar{U} \supseteq U$, $|\bar{U}| = q^{n-1}$ halmazzá, mely továbbra is csak azokat az irányokat határozza meg, mint az eredeti halmaz, vagy N pontjai kollineárisak és $|N| \leq \lfloor \frac{q+3}{2} \rfloor$, vagy N pontjai egy (síkbeli) másodfokú görbén helyezkednek el.*

3 dimenzióban $\varepsilon < p$ esetére adunk stabilitási eredményt.

Theorem 3.11. *Legyen $U \subset \mathrm{AG}(3, q) \subset \mathrm{PG}(3, q)$, $|U| = q^2 - \varepsilon$, ahol $\varepsilon < p$. Jelölje $D \subseteq H_\infty$ az U által meghatározott irányok halmazát, és jelölje $N = H_\infty \setminus D$ a nem meghatározott irányok halmazát. Ekkor U kiterjeszthető egy $\bar{U} \supseteq U$, $|\bar{U}| = q^2$ halmazzá, vagy N pontjai egy síkbeli, $\varepsilon^4 - 2\varepsilon^3 + \varepsilon$ fokú görbén helyezkednek el.*

Az eredmények azt jelentik, hogy U tipikusan kiegészíthető, máskülönben a nem meghatározott irányok egy kis fokú (sík)görbén vannak. Ez azonban nem csak technikai feltétel: léteznek példák $q^2 - 2$ méretű ponthalmazokra, $q \in \{3, 5, 7, 11\}$, melyek egy kúpszelet pontjait nem határozzák meg.

A tételek erősségét valójában az adja, hogy a teljesen reducibilisen metsző hipersíkok tipikusan kevesen vannak - ez önmagában is érdekes, nehéz és egyelőre megoldatlan probléma.

Conjecture 3.12. *Legyen $f(X_0, X_1, ..., X_n)$ egy d-fokú, homogén irreducibilis polinom, $d > 2$, és legyen F az $f = 0$-nak megfelelő hiperfelület $\mathrm{PG}(n, q)$-ban. Ekkor a TRI hipersíkok száma „kicsi", vagy F egy kis dimenziós alapra épített kúp.*

A sejtés igazolása nagyon általános kiegészülési eredményekhez vezetne.
A fejezet végén mutatunk egy példát az eredmény ovoidok körében való alkalmazására.

Corollary 3.17. *Legyen $\mathcal{B}$ egy q^2-2 méretű részovoid a $T_2^*(\mathcal{K})$ parciális geometriában. Ekkor $\mathcal{B}$ mindig kiegészíthető ovoiddá.*

4. Az irányprobléma egy általánosítása

A 4. fejezetben - a témakör zárásaként - az irányprobléma egy természetes általánosításával foglalkozunk [2]. Az eddigiektől eltérően nem algebrai, hanem pusztán geometriai és kombinatorikai eszközöket használunk a bizonyítások során. Az eredeti problémában egy d irányt (az ideális hipersík egy pontját) akkor határoz meg egy ponthalmaz, ha van olyan d irányú egyenes, amely legalább két pontban metszi a ponthalmazt. Ezt megfogalmazhatjuk úgy is, hogy van olyan, a ponthalmaz által feszített 1-dimenziós altér, melynek ideális pontja d. Kézenfekvő a *meghatározott irány* fogalmának alábbi általánosítása:

Definition 4.1. *Legyen $U \subset \mathrm{AG}(n,q) \subset \mathrm{PG}(n,q)$ ponthalmaz, k rögzített egész, $k \leq n-2$. Egy k dimenziós $S_k \subset H_\infty$ altér* meghatározott, *ha van olyan $k+1$ dimenziós T_{k+1} affin altér, melynek ideális hipersíkja S_k, és legalább $k+2$ lineárisan független pontot tartalmaz U-ból (amelyek tehát kifeszítik T_{k+1}-et).*

A vizsgált kérdések hasonlóak, mint a klasszikus problémánál: rögzített k-ra mekkora lehet U, ha nem határoz meg minden k dimenziós alteret, illetve le tudjuk-e írni a „kevés" ideális alteret meghatározó ponthalmazok struktúráját. Könnyen látható, hogy ha vannak nem meghatározott k-dimenziós ideális alterek, akkor $|U| \leq q^{n-1}$. Ez megegyezik a klasszikus esetnél kapott korláttal, ismét a legfeljebb q^{n-1} pontot tartalmazó halmazok az „érdekesek". A dolgozatban a maximális, azaz q^{n-1} méretű „érdekes" ponthalmazokat vizsgáljuk.

A **4.2 Állítás**ban tetszőleges dimenzióban konstrukciót adunk kevés ideális alteret meghatározó ponthalmazokra: Legyen $U_0 \subset \mathrm{AG}(m,q) \subset \mathrm{PG}(m,q)$, $|U_0| = q^{m-1}$ úgy, hogy U_0 nem határozza meg az összes l dimenziós ideális alteret. Beágyazzuk U_0-t $\mathrm{AG}(n,q)$-ba, ahol $n > m$. Legyen V egy altér $\mathrm{AG}(n,q)$ ideális hipersíkján, $\dim V = n-m-1$, teljesen diszjunkt az eredeti m-dimenziós tértől. Tekintsük azt a kúpot (hengert), melynek alapja U_0, csúcsa V. Az így kapott $n-m$ dimenziós alterek egy q^{n-1} méretű U ponthalmazt alkotnak $\mathrm{AG}(n,q)$-ban. Ekkor az U által nem meghatározott $n-m+l$ dimenziós ideális alterek pontosan az eredetileg nem meghatározott l dimenziós, valamint V által generált alterek.

Mivel már nemcsak H_∞ pontjainak, hanem altereinek meghatározásáról van szó, vizsgálhatjuk egy adott affin ponthalmaz által meghatározott *különböző* dimenziójú ideális alterek viszonyát. Az eredeti irányproblémában is ismertek a meghatározott irányok halmazának struktúrájára vonatkozó tételek. Tudjuk, hogy ha $|U| = q^{n-1}$, akkor a meghatározott irányok halmaza az ideális hipersík néhány teljes $(n-2)$ dimenziós alterének uniója [11]. Hasonlóan, itt is bármely meghatározott k dimenziós altéren át található egy meghatározott $(n-2)$ dimenziós altér. A

meghatározott alterek között az alábbi hierarchiát találjuk:

Proposition 4.6. *Legyen $U \subset \mathrm{AG}(n,q) \subset \mathrm{PG}(n,q)$, $|U| = q^{n-1}$ halmaz, k rögzített egész, $k \leq n-3$. Ha $V_{n-2} \subset H_\infty$ olyan $n-2$ dimenziós altér, melynek U minden k-dimenziós alterét meghatározza, akkor U V_{n-2}-t is meghatározza.*

A fejezet fő eredménye, hogy 3 dimenzióban klasszifikáljuk a maximális méretű halmazokat.

Theorem 4.7. *Legyen $U \subset \mathrm{AG}(3,q) \subset \mathrm{PG}(3,q)$, $|U| = q^2$. Jelölje N a nem meghatározott egyenesek halmazát az ideális síkon. Ekkor a következők valamelyike teljesül:*
a) *$|N| = 0$, azaz U minden egyenest meghatároz H_∞-ben;*
b) *$|N| = 1$, ekkor van az affin síkoknak egy párhuzamossági osztálya, melyben minden sík pontosan egy teljes egyenest tartalmaz U-ból;*
c) *$|N| = 2$, ekkor (i) U és a két nem meghatározott egyenes egy hiperbolikus kvádrikát alkot, vagy (ii) az U halmaz q párhuzamos egyenest tartalmaz (U egy henger);*
d) *$|N| \geq 3$, ekkor az U halmaz q párhuzamos egyenest tartalmaz (U egy henger).*

Azaz „sok” (≥ 3) nem meghatározott egyenes esetén egyfajta reducibilitást sikerült igazolni. Ekkor kizárólag a 4.2 Állításban látott példa 3 dimenziós megfelelője van, ahol a ponthalmaz egy kúp (henger). Ha két, az ideális síkon lévő egyenest nem határoz meg a ponthalmaz, akkor egy - alkalmas módon elhelyezett - hiperbolikus kvádrika (affin része) is lehet.

Éppen ezért magasabb dimenzióban folytattuk a kvádrikák vizsgálatát. Így sikerült további példát adni viszonylag sok nem meghatározott altérrel bíró ponthalmazra. Legyen $U \subset \mathrm{AG}(n,q) \subset \mathrm{PG}(n,q)$, $|U| = q^{n-1}$ egy nemszinguláris kvádrika affin része, melyet úgy helyezünk el, hogy az ideális hipersík érintő hipersíkja legyen (azaz a kvádrika és az ideális hipersík metszete egy $(n-2)$-dimenziós, azonos típusú kvádrikára épített kúp). Jelölje g a kvádrika projektív indexét (azaz a legnagyobb dimenziójú tartalmazott altér, a generátor dimenzióját).

Proposition 4.14. *Legyen $U \subset \mathrm{AG}(n,q) \subset \mathrm{PG}(n,q)$, $|U| = q^{n-1}$ a fent definiált ponthalmaz. Ekkor az U által nem meghatározott g dimenziós ideális alterek pontosan a kvádrika és H_∞ metszetében lévő generátorok, kivéve ha $n = 2$ és q páros, vagy $n = 4$ és $q = 2$, vagy $n = 5$ és $q = 2$ és a kvádrika elliptikus.*

5. Véges projektív síkok megoldóhalmazai

Az utolsó két fejezetben kitekintünk a véges geometriának a kombinatorika más területeivel való kapcsolataira. Az 5. fejezet, amelyben egy - R. Bailey és P. Cameron által felvetett - gráfelméleti kérdést tárgyalunk, közös munka Héger Tamással [5]. A dolgozatban véges projektív síkok incidenciagráfjának megoldóhalmazait vizsgáljuk. Megadjuk az incidenciagráf metrikus

dimenzióját, valamint klasszifikáljuk a legkisebb megoldóhalmazokat. A kérdés vizsgálatához kombinatorikus módszereket alkalmazunk.

Legyen $\Gamma = (V, E)$ egyszerű gráf, $x, y \in V$ esetén jelölje $d(x, y)$ a két csúcs távolságát.

Definition 5.1. *$S = \{s_1, \ldots, s_k\} \subset V$ megoldóhalmaz a $\Gamma = (V, E)$ gráfban, ha az S csúcsaitól vett távolságok $(d(x, s_1), \ldots, d(x, s_k))$ listája minden $x \in V$ esetén különböző. A legkisebb megoldóhalmaz mérete a Γ gráf $\mu(G)$* metrikus dimenziója.

Ekvivalens átfogalmazással, S akkor és csak akkor megoldóhalmaz a $\Gamma = (V, E)$ gráfban, ha minden $x, y \in V$-re létezik $z \in S$ pont, melyre $d(x, z) \neq d(y, z)$. Ez azt jelenti, hogy Γ csúcsait a megoldóhalmaz csúcsaitól vett távolságok alapján különböztetjük meg. Azt mondjuk, hogy egy v csúcsot *megold* S, ha az S csúcsaitól vett távolságainak listája minden más csúcs listájától különböző. Egy $A \subset V$ halmazt *megold* S, ha minden elemét megoldja. Fontos megjegyeznünk, hogy rendezett listára van szükség, a távolságok (multi)halmaza nem elégséges.

Legyen $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ véges projektív sík $\mathcal{P}$ ponthalmazzal és $\mathcal{L}$ egyeneshalmazzal. Jelölje q a sík rendjét. A sík $\Gamma(\Pi)$ incidenciagráfja egy kétosztályú gráf, melynek csúcshalmazai $\mathcal{P}$ és $\mathcal{L}$. $P \in \mathcal{P}$ és $\ell \in \mathcal{L}$ szomszédos csúcsok Γ-ban akkor és csak akkor, ha P és ℓ illeszkednek a Π síkon. Egy Π sík megoldóhalmazán (ill. metrikus dimenzióján) az incidenciagráfjának megoldóhalmazát (ill. metrikus dimenzióját) értjük.

A dolgozatban megadjuk a q rendű véges projektív síkok metrikus dimenzióját.

Theorem 5.2. *Ha $q \geq 23$, a q rendű projektív síkok metrikus dimenziója $4q - 4$.*

Ezután leírjuk a q rendű projektív síkok ($q \geq 23$) összes $4q - 4$ méretű megoldóhalmazát.

6. Keresés vektorterekben

A klasszikus kombinatorikus keresési probléma a következő: adott egy X halmaz, $|X| = n$, és a halmaznak van egy x megjelölt eleme. Mennyi a minimálisan szükséges és elegendő kérdésszám ahhoz, hogy megtudjuk, melyik volt a megjelölt elem? Minden egyes kérdéssel az X halmaz valamely részhalmazáról kérdezhetjük meg, hogy tartalmazza-e x-et. Ismert, hogy ez a kérdésszám $\lceil \log_2 n \rceil$, akár függhet egy adott kérdés az előzőekre kapott válaszoktól (*adaptív keresés*), akár egyszerre kell föltennünk az összes kérdést (*nem adaptív keresés*).

Az utolsó fejezetben a klasszikus probléma egy q-analógját fogalmazzuk meg [6]. Jelölje V a $\mathrm{GF}(q)$ fölötti n-dimenziós vektorteret, és jelölje $\mathbf{v}$ a V egy megjelölt 1 dimenziós alterét. Célunk a $\mathbf{v}$ megtalálásához szükséges és elegendő minimális kérdésszám meghatározása, ha a kérdések V alterei, és egy U kérdésre adott válasz IGEN, ha $\mathbf{v} \leqslant U$, és NEM, ha $\mathbf{v} \not\leqslant U$. Ezt a számot az adaptív esetben $A(n, q)$, a nem adaptív esetben $M(n, q)$ jelöli. A nem adaptív keresésben V altereinek egy $\mathcal{U}$ részhalmaza akkor és csak akkor alkalmas kérdéshalmaz a megjelölt 1 dimenziós

tér megtalálására, ha bármely két $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 1 dimenziós altérpárhoz létezik egy $U \in \mathcal{U}$ altér, melyre $\mathbf{u} \leqslant U, \mathbf{v} \not\leqslant U$ vagy $\mathbf{u} \not\leqslant U, \mathbf{v} \leqslant U$. Az ilyen altérhalmazokat *szeparáló* halmazoknak nevezzük.

Könnyen látható, hogy $A(n,2) = M(n,2) = n$ bármely $n \geq 2$-re. Ezért föltesszük, hogy $q \geq 3$. Egy $\mathrm{GF}(q)$ feletti n-dimenziós vektortér elemeit a szokásos módon megfeleltetjük a $\mathrm{PG}(n-1,q)$ projektív tér elemeinek. $n = 3$ esetben, ha q prímhatvány, meghatározzuk az adaptív kereséshez szükséges $A(3,q)$ minimális kérdésszámot.

Theorem 6.1. *Legyen Π_q q rendű projektív sík. Adaptívan keressük Π_q egy pontját, a föltehető kérdések Π_q pontjai és egyenesei. Jelölje $A(\Pi_q)$ a szükséges és elegendő minimális kérdésszámot. Ekkor $A(\Pi_q) \leq 2q-1$. Ha q prímhatvány, akkor $A(\mathrm{PG}(2,q)) = 2q-1$, azaz $A(3,q) = 2q-1$ teljesül.*

A nem adaptív kereséshez szükséges legkisebb $M(3,q)$ kérdésszám meghatározásával is foglalkozunk. Itt általában alsó és felső korlátokat adunk meg, pontos értéket csak a $q \geq 121$, q négyzetszám esetben tudunk. Ahogy már említettük, a klasszikus keresési problémánál a legkisebb kérdésszám megegyezik az adaptív és a nem adaptív esetben. A legfontosabb eredményünk annak bizonyítása, hogy - a klasszikustól eltérően - itt a kérdésszám különbözik, a nem adaptív kereséshez mindig több kérdésre van szükség.

Theorem 6.2. *Legyen $q \geq 9$. Ekkor $A(3,q) < M(3,q)$.*

Általában n dimenzióban $A(n,q)$ és $M(n,q)$ értékére alsó és felső becsléseket adunk. Ezeket foglaljuk össze a következő két tételben.

Theorem 6.3. *Legyen $q \geq 2$ prímhatvány, és n pozitív egész. Ekkor $\log_2 \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q \leq A(n,q) \leq (q-1)(n-1)+1$ teljesül.*

Theorem 6.4. *Létezik egy abszolút konstans $C > 0$, melyre bármely n pozitív egész és q prímhatvány esetén $\frac{1}{C}q(n-1) \leq M(n,q) \leq 2q(n-1)$ teljesül. Továbbá, ha q tart a végtelenhez, akkor $(1-o(1))q(n-1) \leq M(n,q)$ teljesül.*

A bizonyítások során az előző fejezetben tárgyalt megoldóhalmazok egy variánsát, projektív síkok féligmegoldó-halmazait használjuk.

Hivatkozások

[1] P. Sziklai, M. Takáts, Vandermonde sets and super-Vandermonde sets. *Finite Fields Appl.*, **14** (2008), 1056–1067.

[2] P. Sziklai, M. Takáts, An extension of the direction problem. *Discrete Math.*, **312** (2012), 2083–2087.

[3] Sz. L. Fancsali, P. Sziklai, M. Takáts, The number of directions determined by less than q points. *J. Alg. Comb.*, Volume **37**, Issue **1** (2013), 27–37.

[4] J. De Beule, P. Sziklai, M. Takáts, On the structure of the directions not determined by a large affine point set. *J. Alg. Comb.*, Volume **38**, Issue **4** (2013), 888-899.

[5] T. Héger, M. Takáts, Resolving sets and semi-resolving sets in finite projective planes. *Electronic J. of Comb.*, Volume **19**, Issue **4** (2012).

[6] T. Héger, B. Patkós, M. Takáts, Search problems in vector spaces. *Designs, Codes and Cryptography*,(2014), DOI: 10.1007/s10623-014-9941-9.

[7] S. Ball, The number of directions determined by a function over a finite field. *J. Combin. Th. Ser. A*, **104** (2003), 341–350.

[8] A. Blokhuis, S. Ball, A. Brouwer, L. Storme, T. Szőnyi, On the number of slopes determined by a function on a finite field. *J. Comb. Theory Ser. (A)*, **86** (1999), 187–196.

[9] L. Lovász, A. Schrijver, Remarks on a theorem of Rédei. *Studia Scient Math. Hungar.* **16** (1981), 449–454.

[10] L. Rédei, *Lückenhafte Polynome über endlichen Körpern*. Birkhäuser Verlag, Basel (1970). English translation: *Lacunary polynomials over finite fields*. North Holland, Amsterdam (1973).

[11] L. Storme, P. Sziklai, Linear point sets and Rédei type k-blocking sets in PG(n, q). *J. Alg. Comb.*, **14** (2001), 221–228.

[12] P. Sziklai, Polynomials in finite geometry. *Manuscript. Available online at* `http://www.cs.elte.hu/~sziklai/poly.html` (last accessed August 28., 2014.).

[13] T. Szőnyi, A hézagos polinomok Rédei-féle elméletének néhány újabb alkalmazása. *Polygon*, **V.** kötet **2.** szám (1995).