Maximum Principles in the Theory of Numerical Methods

Mincsovics Miklós Emil

A doktori disszertáció tézisei

Témavezető: Prof. Faragó István, DHAS

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematika Doktori Iskola, Alkalmazott Matematika Program

Iskolavezető: Prof. Laczkovich Miklós, MHAS
Programvezető: Prof. Michaletzky György, DHAS

Alkalmazott Analízis és
Számításmatematikai Tanszék

2014

A Numerikus Analízis Alapfogalmai

1. Bevezetés

Az elsõ rész témája lineáris és nemlineáris egyenletek numerikus megoldásának Lax-féle elmélete. Ahhoz, hogy egy egyenlet megoldását approximáljuk, általában valamilyen numerikus módszert alkalmazunk, aminek a sikere a konvergenciáján múlik. A konvergencia egy elméleti fogalom, mivel definíciója tartalmazza az ismeretlen megoldást, ugyanakkor, ez a probléma kiküszöbölhetõ a konzisztencia és a stabilitás fogalmainak bevezetésével. Ugyanis, lineáris esetben a stabilitás ekvivalens a konvergenciával, ha feltesszük a konzisztenciát, ez Lax ekvivalencia tétele.

A disszertáció elsõ részében a célunk az volt, hogy absztrakt szinten tárgyaljuk a témakört, egységesítsük és kiegészítsük az eredményeket, továbbá tisztázzuk az alapfogalmak (konzisztencia, stabilitás és konvergencia) részletes viszonyát.

Felhasznált módszerek. Használtuk Stetter lemmáját [7, Lem. 1.2.1.] (amely Brouwer's invariance domain tételén alapul); sûrûségi elvet; véges elemes és véges differenciás módszerek elméletét; és építettünk a Lax féle ekvivalencia tétel [6, Palencia és Sanz-Serna, 1985] által bizonyított formájára (amely a Banach-Steinhaus tételen múlik).

2. Eredmények

1. Felépítettük egy absztrakt tárgyalást a témának. Bebizonyítottunk egy Lax-féle tételt, ami alkalmazásokhoz is megfelelõ. Ezek az eredmények a [1, Faragó, Mincsovics, Fekete, 2012] cikken alapulnak. A részleteket az Olvasó a disszertációban találhatja meg.

   Thm. 1.1.36. Bebizonyítottuk, hogy ha a numerikus eljárás sûrûn konzisztens és stabil, akkor konvergens is (feltételezve (a1)–(a3) Ass. 1.1.9. és (a4)–(a6) Ass. 1.1.33. teljesülését), továbbá a konvergencia rendjének becslésére is módszert adtunk.

   Lem. 1.1.37. Megmutattuk, hogy elegendõ, ha a stabilitást egy olyan halmazon vizsgáljuk, hogy ezen elemek stabilitási tartományainak uniója tartalmazza a megoldás levetített képét és stabilitási konstansaik imfimuma pozitív.

   A konzisztencia ellenõrzése párhuzamosan végezhetõ egy halmaz elemein, így Thm. 1.1.36. és Lem. 1.1.37. együttesen biztosítják az elmélet gyakorlati alkalmazhatóságát.

   Ex. 1.1.16., 30., 31., 32., 39., 40., 41. Számtalan példa segítségével megvizsgáltuk az alapfogalmak egymáshoz való viszonyát.

2. **Subsection 1.1.2.** Megmutattuk hogy mit jelent a stabilitás azokban az esetekben amikor véges elemes approximációt alkalmaztunk egy lineáris elliptikus problémára, illetve véges elemes módszert kombináltunk θ-módszerrel egy lineáris parabolikus problémára.

Diszkrét Maximum-Elv

3. Bevezetés

A disszertáció második része a diszkrét elliptikus és parabolikus maximum-elveket tárgyalja. Amikor egy numerikus módszert választunk, hogy approximáljunk egy folytonos matematikai modellt, akkor az elsõ, amit figyelembe kell vegyünk, hogy ez az approximáció mennyiségi tekintetben megfelelõ-e. Ez a disszertáció elsõ felében került tárgyalásra. Ugyanakkor, sok esetben ez nem elég. Az eredeti probléma (ami általában egy jelenség modellje) megoldása fontos kavalitatív tulajdonságokkal rendelkezhet. Az pedig egy természetes elvárás, hogy a numerikus megoldás is rendelkezzen ezen tulajdonságokkal. Pl., ha a Laplace-egyenlet megoldását approximáljuk, ahol a peremértékek nemnegatívok, akkor a megoldás is nemnegatív, és egy jó approximációtól is ez az elvárás. Lineáris elliptikus és parabolikus problémák esetében a legfontosabb kvalitatív tulajdonságok a különbözõ maximum-elvek.

Chapter 3-ban, ahol a diszkrét elliptikus maximum-elveket vizsgáltuk, két célunk volt. Egyrészt, algebrai szinten összefoglalni a meglevõ eredményeket és kiegészíteni ezeket a saját eredményeinkkel az erõs maximum-elvekrõl. Másodszor, megvizsgálni egy konkrét problémát.

Chapter 4-ben, ahol a diszkrét parabolikus maximum-elveket vizsgáltuk, a következõ céljaink voltak. Elõször, összefoglalását adni algebrai szinten a parabolikus maximum-elveknek. Továbbá, egy konkrét probléma megvizsgálása. Végül, kapcsolatot találni a diszkrét elliptikus és parabolikus maximum-elvek között.

Felhasznált módszerek. Véges elemes és véges differenciás módszerek elmélete; szimplexek geometriája; lineáris algebra; Z- és M-mátrix elmélet; inverz-nemnegatív mátrixok; nemnegatív mátrixok; Perron-Frobenius tételkör; matrix-splitting elmélet.

4. Definíciók, jelölések, problémák

Diszkrét elliptikus maximum-elvek. Diszkrét elliptikus maximum-elveket a $\mathbf{K} = (\mathbf{K}_0|\mathbf{K}_\partial) \in \mathbb{R}^{N\times\overline{N}}$ mátrixra definiáltuk, amely az $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_0|\mathbf{u}_\partial)^T \in \mathbb{R}^{\overline{N}}$ vektoron hat, ahol $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{u}_\partial \in \mathbb{R}^{N_\partial}$.

Def. 3.1.1. és 2. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{K}$ mátrix rendelkezik

- a *discrete weak non-positivity preservation property*-vel (DnP), ha teljesül a következõ:

$$\mathbf{Ku} \le \mathbf{0}\,, \quad \max \mathbf{u}_\partial \le 0 \quad \Rightarrow \quad \max \mathbf{u} \le 0\,.$$

- a *discrete strong non-positivity preservation property*-vel (DNP), ha rendelkezik a DnP-vel, továbbá teljesül a következõ:

$$\mathbf{Ku} \le \mathbf{0}\,, \quad \max \mathbf{u} = \max \mathbf{u}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}\,.$$

- a *discrete weak maximum principle* -lel (DwMP), ha teljesül a következõ:

$$\mathbf{Ku} \le \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \max \mathbf{u} \le \max\{0, \mathbf{u}_\partial\}\,;$$

- the *discrete strictly weak maximum principle* -lel (DWMP), ha teljesül a következõ:

$$\mathbf{Ku} \le \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \max \mathbf{u} = \max \mathbf{u}_\partial\,;$$

- a *discrete strong maximum principle* (DsMP), ha rendelkezik a DwMP-lel, továbbá, ha teljesül a következõ:

$$\mathbf{Ku} \le \mathbf{0}\,, \quad \max \mathbf{u} = \max \mathbf{u}_0 = m \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = m\mathbf{e}\,;$$

- a *discrete strictly strong maximum principle* -lel (DSMP), ha rendelkezik a DWMP-lel, továbbá, ha teljesül a következõ:

$$\mathbf{Ku} \le \mathbf{0}\,, \quad \max \mathbf{u} = \max \mathbf{u}_0 = m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = m\mathbf{e}\,.$$

1. Probléma. Tekintsük a K elliptikus operátort

$$Ku = -(pu')' + k^2 u\,, \tag{1}$$

ahol $\Omega = (0,1)$, $\operatorname{dom} K = H^1(0,1)$, $p, k \in \mathbb{R}$, $p > 0$.

Diszkretizációként az „interior penalty discontinuous Galerkin” módszert alkalmazzuk. Elsõ lépésként egy τ_h rácsot definiálunk $(0,1)$-en a következõképpen: $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < x_N = 1$. További jelölések: $I_n = [x_{n-1}, x_n]$, $h_n = |I_n|$, $h_{n-1,n} = \max\{h_{n-1}, h_n\}$, $(h_{0,1} = h_1,\ h_{N,N+1} = h_N)$.

Második lépésként a $D_l(\tau_h) = \{v : v|_{I_n} \in P_l(I_n), \forall n = 1, 2, \ldots, N\}$ teret definiáljuk – minden szakaszon legfeljebb l-ed fokú polinomok tere. Bevezetjük a jobb és baloldali határértékekre a $v(x_n^+) = \lim_{t\to 0^+} v(x_n + t)$, $v(x_n^-) = \lim_{t\to 0^+} v(x_n - t)$ jelölést, továbbá ugrásokat és átlagokat belsõ rácspontokban:

$$[\![u(x_n)]\!] = u(x_n^-) - u(x_n^+)\,, \quad \{\!\{u(x_n)\}\!\} = \frac{1}{2}(u(x_n^-) + u(x_n^+))\,.$$

A határon ezek a következõk:

$$[\![u(x_0)]\!] = -u(x_0^+)\,,\ \{\!\{u(x_0)\}\!\} = u(x_0^+)\,,\ [\![u(x_N)]\!] = u(x_N^-)\,,\ \{\!\{u(x_N)\}\!\} = u(x_N^-)\,.$$

Lerögzítjük $\sigma \ge 0$-t a büntetõ paramétert és ε-t, amely tetszõleges szám lehet, de általában a $\{-1, 0, 1\}$ halmazból kerül ki.

Most már definiálhatjuk a (diszkrét) IPDG bilineáris formát:

$$\begin{aligned} a_{DG}(u,v) = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} pu'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{n=0}^{N} \{\!\{pu'(x_n)\}\!\}\,[\![v(x_n)]\!] + \\ \varepsilon \sum_{n=0}^{N} \{\!\{pv'(x_n)\}\!\}\,[\![u(x_n)]\!] + \sum_{n=0}^{N} \frac{\sigma}{h_{n,n+1}} [\![v(x_n)]\!]\,[\![u(x_n)]\!] + \int_0^1 k^2 uv\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Ezután lerögzítünk egy bázist $D_l(\tau_h)$-ben. l-et 1-nek választjuk (az okok megtalálhatóak a disszertációban). $\Phi_i^1(x)$-vel jelöljük a $(2(i-1)+1)$. bázisfüggvényt, és $\Phi_i^2(x)$-vel a $(2(i-1)+2)$. bázisfüggvényt. Az I_i intervallumon $\Phi_i^1(x)$ lineáris, $\Phi_i^1(x_{i-1}^+)=1$, $\Phi_i^1(x_i^-)=0$ és $\Phi_i^2(x)$ szintén lineáris, $\Phi_i^1(x_{i-1}^+)=0$, $\Phi_i^1(x_i^-)=1$, továbbá ezek a függvények 0-ák az I_i intervallumon kívũl.

Végül, a (2) bilineáris formát használva megkonstruáljuk a $\mathbf{K}=(\mathbf{K}_0|\mathbf{K}_\partial)$ IPDG elliptikus operátort, hasonlóan a szokásos véges elemes diszkretizációkhoz. Kis különbségek azért akadnak, ugyanis $\mathbf{K}\in\mathbb{R}^{(2N-2)\times(2N)}$, $\mathbf{K}_0\in\mathbb{R}^{(2N-2)\times(2N-2)}$, és $\mathbf{K}_\partial\in\mathbb{R}^{(2N-2)\times 2}$. A $2N$ bázisfüggvény rendezése a következõ: az elsõ $2N-2$ bázisfüggvény tartozik a belsõ rácspontokhoz, balról jobb felé haladva a számozással. A $(2N-1)$. a bal peremhez, $2N$. a jobb peremhez tartozik.

Diszkrét parabolikus maximum-elvek és a „discrete stabilization property”. Diszkrét parabolikus maximum-elveket az $\mathcal{L}$ hipermátrixra definiáltuk, ahol $(\mathcal{L}\nu)^0=\mathbf{v}^0$, $(\mathcal{L}\nu)^n=\mathbf{X}_1\mathbf{v}^n-\mathbf{X}_2\mathbf{v}^{n-1}$, $n=1,\dots,M$, ahol $\mathbf{X}_1=(\mathbf{X}_{10}|\mathbf{X}_{1\partial})$, $\mathbf{X}_2=(\mathbf{X}_{20}|\mathbf{X}_{2\partial})\in\mathbb{R}^{N\times\overline{N}}$; $\mathbf{X}_{10},\mathbf{X}_{20}\in\mathbb{R}^{N\times N}$; $\mathbf{X}_{1\partial},\mathbf{X}_{2\partial}\in\mathbb{R}^{N\times N_\partial}$, $\overline{N}=N+N_\partial$. $(\nu)^n=\mathbf{v}^n=(\mathbf{v}_0^n|\mathbf{v}_\partial^n)^T\in\mathbb{R}^{\overline{N}}$, $\mathbf{v}_0^n\in\mathbb{R}^N$, $\mathbf{v}_\partial^n\in\mathbb{R}^{N_\partial}$, lásd **Def.4.1.1.**. A diszkrét parabolikus maximum-elvek algebrai szinten karakterizálhatóak, errõl szól a következõ (ismert) lemma.

Lem. 4.1.3. Az $\mathcal{L}$ hipermátrix rendelkezik a

- „discrete non-positivity preservation property”-vel (DnP) akkor és csak akkor, ha (minden $\mathbf{v}^n,\mathbf{v}^{n-1}$-re) teljesül a következõ:

$$(\mathcal{L}\nu)^n\equiv\mathbf{X}_1\mathbf{v}^n-\mathbf{X}_2\mathbf{v}^{n-1}\le\mathbf{0}\,,\quad \max\{\mathbf{v}^{n-1},\mathbf{v}_\partial^n\}\le 0\quad\Rightarrow\quad\max\mathbf{v}^n\le 0\,;$$

- „discrete maximum principle”-lel (DmP) akkor és csak akkor, ha (minden $\mathbf{v}^n,\mathbf{v}^{n-1}$-re) teljesül a következõ:

$$(\mathcal{L}\nu)^n\equiv\mathbf{X}_1\mathbf{v}^n-\mathbf{X}_2\mathbf{v}^{n-1}\le\mathbf{0}\quad\Rightarrow\quad\max\mathbf{v}^n\le\max\{0,\mathbf{v}^{n-1},\mathbf{v}_\partial^n\}\,;$$

- „discrete strict maximum principle”-lel (DMP) akkor és csak akkor, ha (minden $\mathbf{v}^n,\mathbf{v}^{n-1}$-re) teljesül a következõ:

$$(\mathcal{L}\nu)^n\equiv\mathbf{X}_1\mathbf{v}^n-\mathbf{X}_2\mathbf{v}^{n-1}\le\mathbf{0}\quad\Rightarrow\quad\max\mathbf{v}^n\le\max\{\mathbf{v}^{n-1},\mathbf{v}_\partial^n\}\,.$$

A disszertációban a „discrete stabilization property” fogalmát arra használtuk, hogy kapcsolatot találjunk a diszkrét elliptikus és parabolikus maximum-elvek közt. Definiáljuk $\mathbf{K}$-t, mint $\mathbf{K}=\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_2$. Ha $\mathbf{X}_{10}$ reguláris, akkor

$$\mathbf{v}_0^n=\mathbf{X}_{10}^{-1}\mathbf{X}_{20}\mathbf{v}_0^{n-1}+\mathbf{X}_{10}^{-1}\mathbf{X}_2\mathbf{v}_\partial^{n-1}-\mathbf{X}_{10}^{-1}\mathbf{X}_{1\partial}\mathbf{v}_\partial^n+\mathbf{X}_{10}^{-1}(\mathcal{L}\nu)^n\,,\quad n=1,\dots.$$

Def. 4.3.1. Az $\mathcal{L}$ hipermátrix rendelkezik a „*discrete stabilization property*”-vel (DSP), ha $\mathbf{K}_0$ reguláris és minden $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_0^0$-ra az

$$\mathbf{X}_1\mathbf{v}^n-\mathbf{X}_2\mathbf{v}^{n-1}=\mathbf{K}\mathbf{u}\,,\quad \mathbf{v}_\partial^{n-1}=\mathbf{u}_\partial\,,\quad n=1,\dots$$

iteráció konvergens, továbbá

$$\mathbf{v}^n\to\mathbf{u}$$

teljesül.

2. Probléma. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ nyílt és korlátos, továbbá tegyük fel, hogy lefedhetõ regulárisan egy szimplexekbõl álló $\mathcal{T}_h$ ráccsal, amely minden $S \in \mathcal{T}_h$ szimplexe rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy (hiper)lapjai által meghatározott szögek nem nagyobbak, mint $\pi/2$.

Legyen $v(x,t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ és tekintsük az

$$L_{a,b,c}v = \frac{\partial v}{\partial t} - \mathrm{div}(a \text{ grad } v) + \langle b, \text{grad } v\rangle + c\, v \tag{3}$$

parabolikus operátort, ahol $a, c : \Omega \to \mathbb{R}$, $b : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $a, b, c \in C(\overline{\Omega})$ és $a \in C^1(\Omega)$. A $\langle \cdot, \cdot \rangle$ szimbólum a szokásos skalárszorzat $\mathbb{R}^d$-n. Tegyük fel, hogy $0 < a_m \le a \le a_M$, $\|b\| \le b_M$ és $0 \le c \le c_M$ teljesül az a_m, a_M, b_M, c_M konstansokkal. $\|\cdot\|$ jelöli $\mathbb{R}^d$-ben a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalárszorzat által indukált normát.

A diszkretizációhoz véges elem módszert kombinálunk θ-módszerrel, ahol Ω-t az elõzõekben leírt $\mathcal{T}_h$ ráccsal fedünk és a szokásos kalapfüggvényeket használjuk. Így a következõ alakot kapjuk: $\mathbf{X}_1\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{X}_2\mathbf{v}^n$ – amit $\mathcal{L}_{a,b,c}$-val vagy $\mathcal{L}_{a,b,0}$-vel jelölünk, attól függõen, hogy $L_{a,b,c}$ vagy $L_{a,b,0}$ volt a kiindulási pont – ahol $\mathbf{X}_1 = \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M} + \theta\mathbf{K}$, $\mathbf{X}_2 = \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M} - (1-\theta)\mathbf{K}$, ahol $\mathbf{M}$ és $\mathbf{K}$ a tömeg és merevségi mátrixok, amiket a

$$(\mathbf{M})_{ij} = B_1(\phi_j, \phi_i) = \int_\Omega \phi_j\phi_i \,\mathrm{d}\mathbf{x}\,,$$

$$(\mathbf{K})_{ij} = B_2(\phi_j, \phi_i) = \int_\Omega a\ \langle \mathrm{grad}\phi_j, \mathrm{grad}\phi_i\rangle\ \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega \langle b, \mathrm{grad}\phi_j\rangle\, \phi_i \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega c\phi_j\phi_i \,\mathrm{d}\mathbf{x}\,,$$

bilineáris formák határoznak meg, ahol $i = 1, \ldots, N\,,\ j = 1, \ldots, \overline{N}$.

Az S szimplexet $d+1$ db $\mathbf{x}_i$ csúcs feszít ki, és S_i-vel jelöljük a $(d-1)$-dimenziós lapot, mely szemben van $\mathbf{x}_i$-vel, továbbá $\cos\gamma_{ij}$-vel jelöljük az S_i és S_j által meghatározott szög koszinuszát. Ekkor $(\mathrm{meas_d S})d = (\mathrm{meas_{d-1} S_i})m_i$, ahol m_i az (Euklídeszi) távolság S_i és $\mathbf{x}_i$ közt.

5. Eredmények

1. Algebrai szinten összefoglaltuk az eredményeket a diszkrét elliptikus maximum-elvekrõl és karakterizáltuk a diszkrét erõs maximum-elveket. Ezek az eredmények a [5, Mincsovics és Horváth, 2012] cikken alapulnak.

   Lem. 3.1.5. Legyen $N \ge 2$. A $\mathbf{K}$ mátrix akkor és csak akkor rendelkezik a DNP-vel ha a következõk teljesülnek:

   (N1) $\mathbf{K}_0^{-1} > \mathbf{0}\,;$ (N2) $-\mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{K}_\partial > \mathbf{0}\,.$

   Thm. 3.1.9. Legyen $N \ge 2$. A $\mathbf{K}$ mátrix akkor és csak akkor rendelkezik a DSMP-vel ha a következõk teljesülnek:

   (S1) $\mathbf{K}_0^{-1} > \mathbf{0}\,;$ (S2) $-\mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{K}_\partial > \mathbf{0}\,;$ (S3) $-\mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{K}_\partial\mathbf{e} = \mathbf{e}\,.$

   Thm. 3.1.10. Legyen $N \ge 2$. A $\mathbf{K}$ mátrix akkor és csak akkor rendelkezik a DsMP-vel ha a következõk teljesülnek:

(s1) $\mathbf{K}_0^{-1} > \mathbf{0}$; (s2) $-\mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{K}_\partial > \mathbf{0}$;

(s3) $-\mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{K}_\partial\mathbf{e} < \mathbf{e}$ vagy $-\mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{K}_\partial\mathbf{e} = \mathbf{e}$.

Subsection 3.1.2. Kiegészítettük azt a listát, mely a gyakorlatban használható elégséges algebrai feltételeket tartamaz a DwMP, a DSMP és a DsMP biztosítására.

Subsection 3.1.3. Numerikus példákkal illusztráltuk a diszkrét erõs és gyenge maximum-elvek közti különbségeket.

2. Az „1. Probléma” esetében vizsgáltuk az elliptikus maximum-elvek megõrzését. A következõ eredmények a [2, Horváth és Mincsovics, 2013] cikken alapulnak.

   Thm. 3.3.2. Legyen a $\mathbf{K} = (\mathbf{K}_0|\mathbf{K}_\partial)$ az (1)-bõl IPDG módszerrel kapott mátrix. Ez a mátrix rendelkezik a DnP-vel ha

   - ε-t a következõképp választjuk:

$$-1 \le \varepsilon \le 0\,, \qquad \text{ha } k = 0\,,$$

$$-1 < \varepsilon \le 0\,, \qquad \text{ha } k > 0\,,$$

   - σ-t pedig:

$$\frac{p(1-\varepsilon)}{2} \le \sigma\,,$$

   - végül a τ_h rácsot:

$$h_i^2 \le \frac{3p(\varepsilon+1)}{k^2}\,, \qquad i = 2, \dots, N-1\,, \qquad \text{(belsõ finomság)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{h_{i,i+1}}{h_{i+1}} - \frac{\varepsilon h_{i,i+1}}{h_i} &\le \frac{2\sigma}{p}\,, \quad i = 1, \dots, N-1 \\ \frac{h_{i,i+1}}{h_i} - \frac{\varepsilon h_{i,i+1}}{h_{i+1}} &\le \frac{2\sigma}{p}\,, \quad i = 1, \dots, N-1\,. \end{aligned}\right. \qquad \text{(uniformitás)}$$

   Thm. 3.3.3. Legyen a $\mathbf{K} = (\mathbf{K}_0|\mathbf{K}_\partial)$ az (1)-bõl IPDG módszerrel kapott mátrix. Ez a mátrix rendelkezik a DwMP-lel ha

   - ε-t a következõképp választjuk:

$$-\frac{1}{2} \le \varepsilon \le 0\,, \qquad \text{ha } k = 0\,,$$

$$-\frac{1}{2} < \varepsilon \le 0\,, \qquad \text{ha } k > 0\,,$$

   - σ-t pedig:

$$\frac{p(1-\varepsilon)}{2} \le \sigma\,,$$

   - végül a τ_h rácsot:

$$h_i^2 \le \frac{3p(2\varepsilon+1)}{k^2}\,, \qquad i = 1, N\,, \qquad \text{(finomság a peremen)}$$

$$h_i^2 \leq \frac{3p(\varepsilon+1)}{k^2}, \qquad i = 2, \ldots, N-1, \qquad \text{(belsõ finomság)}$$

$$\frac{h_{i,i+1}}{h_{i+1}} - \frac{\varepsilon h_{i,i+1}}{h_i} \leq \frac{2\sigma}{p}, \quad i = 1, \ldots, N-1$$
$$\frac{h_{i,i+1}}{h_i} - \frac{\varepsilon h_{i,i+1}}{h_{i+1}} \leq \frac{2\sigma}{p}, \quad i = 1, \ldots, N-1. \qquad \text{(uniformitás)}$$

Rem. 3.3.4. Megvizsgáltuk a gyakorlatban használt paraméterválasztásokat: $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$.

Ex. 3.3.6. és 7. Numerikus példákon keresztül megvizsgáltuk Thm. 3.3.2 és Thm. 3.3.3. élességét.

3. Megvizsgáltunk egy lineáris parabolikus problémát, ahol diszkretizációként véges elemes módszert kombináltunk θ-módszerrel. Elégséges feltételeket adtunk a fontosabb diszkrét parabolikus maximum-elvek teljesülésére. Az alábbi eredmény a [3, Mincsovics, 2010] cikkben szerepel.

   Tekintsük a 2. Problémát. Ekkor az alábbi jelölésekkel

$$m = \min_{\mathcal{T}_h} m_i, \quad M = \max_{\mathcal{T}_h} m_i, \quad G = \min_{\mathcal{T}_h} \cos\gamma_{ij},$$

$$\spadesuit = \frac{a_M}{2}\frac{(d+1)(d+2)}{m^2} + \frac{b_M}{2}\frac{d+2}{m} + c_M, \quad \heartsuit = a_m G\frac{(d+1)(d+2)}{M^2} - b_M\frac{d+2}{m} - c_M.$$

   a következõ tételt fogalmazhatjuk meg.

   Thm. 4.2.5. Legyen a $\mathcal{T}_h$ rács olyan, hogy teljesül rá, hogy

$$0 < \heartsuit \qquad \text{(rácsfeltétel)}$$

   Továbbá teljesüljön a

$$\frac{\spadesuit}{\spadesuit + \heartsuit} \leq \theta \qquad \text{(megszorítás } \theta\text{-ra)}$$

   feltétel, illetve a

$$\frac{1}{\theta}\frac{1}{\heartsuit} \leq \Delta t \leq \frac{1}{1-\theta}\frac{1}{\spadesuit} \qquad \text{(megszorítás a } \Delta t \text{ idõlépésre)}$$

   feltétel. Ekkor $\mathcal{L}_{a,b,c}/\mathcal{L}_{a,b,0}$ rendelkezik a DmP/DMP tulajdonsággal.

   A **Tab. 4.1. and 2.** táblázatokban összefoglaltuk a Thm. 4.2.5. felhasználásával kapott, illetve a valódi feltételeket arra, hogy teljesüljön a DmP tulajdonság egy adott problémán. Ezzel megvizsgálhattuk Thm. 4.2.5. élességét.

4. Kapcsolatot találtunk a diszkrét elliptikus és parabolikus maximum-elvek között. Ezek az eredmények a [4, Mincsovics, 2010] cikken alapulnak.

   Lem. 4.3.3. Karakterizáltuk a DSP tulajdonságot.

   Thm. 4.3.4. Megmutattuk, hogy feltéve azt, hogy az $\mathcal{L}$ hipermátrix rendelkezik a DnP tulajdonsággal, akkor a $\mathbf{K}$ DnP tulajdonsága ekvivalens az $\mathcal{L}$ DSP tulajdonságával.

Thm. 4.3.5. Megmutattuk, hogy ha az $\mathcal{L}$ hipermátrix reguláris $\mathbf{K}_0$ mátrixot definiál, akkor $\mathcal{L}$ DmP tulajdonságából következik $\mathcal{L}$ DSP tulajdonsága és $\mathbf{K}$ DwMP tulajdonsága.

Ezek az eredmények mutatják, hogy a nem megfelelõ rácsválasztás már önmagában is meggátolhatja a diszkrét parabolikus maximum-elvek teljesülését.

Ex. 4.3.10. és 11. Numerikus példákkal illusztráltuk Thm. 4.3.4.-et.

Hivatkozások

[1] Faragó, I., Mincsovics, M. E., Fekete, I.: Notes on the Basic Notions in Nonlinear Numerical Analysis. E. J. of Qualitative Theory of Differential Equations, Proc. 9'th Coll. QTDE, 2011, No. 6, 1–22 (2012)

[2] Horváth, T. L. and Mincsovics, M. E.: Discrete maximum principle for interior penalty discontinuous Galerkin methods. CEJM, 11 no.4, 664–679 (2013)

[3] Mincsovics, M. E.: Discrete maximum principle for finite element parabolic operators. LSSC 2009, LNCS 5910, 604–612 (2010)

[4] Mincsovics, M. E.: Discrete and continuous maximum principles for parabolic and elliptic operators. JCAM 235, 470–477 (2010)

[5] Mincsovics, M. E. and Horváth, T. L.: On the differences of the discrete weak and strong maximum principles for elliptic operators. LSSC 2011, LNCS 7116, 614–621 (2012)

[6] Palencia, C. and Sanz-Serna, J. M.: A General Equivalence Theorem in the Theory of Discretization Methods. Math. of Comp., 45/171, 143–152 (1985)

[7] Stetter, H. J.: Analysis of Discretization Methods for Ordinary Differential Equations. Springer, Berlin, (1973)