Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematika Intézet

Bérczi Kristóf

Arborescence packing and restricted b-matchings

(Fenyő-pakolások és megengedett b-matchingek)

Című doktori értekezésének tézisei

Témavezető: Frank András

Matematika Doktori Iskola
Vezető: Laczkovich Miklós

Alkalmazott Matematika Doktori Program
Vezető: Michaletzky György

ELTE Operációkutatási Tanszék
MTA-ELTE Egerváry Jenő Kombinatorikus Optimalizálási Kutatócsoport

2013. Budapest

Bevezetés

A doktori értekezés két fő témával foglalkozik, melyek közül az első a fenyő-pakolások kérdésköre. Kutatásaink kiindulópontja Edmonds diszjunkt fenyő tétele, mely szükséges és elégséges feltételt ad k éldiszjunkt feszítő r-fenyő létezésére. A probléma két irányban is általánosítható: egyrészt szigorítható a fenyőkre vonatkozó éldiszjunktsági megkötés, másrészt a fenyők által feszített pontok halmaza is szűkíthető.

- *Megcáfoljuk Colussi, Conforti és Zambelli erősen éldiszjunkt fenyőkre vonatkozó sejtését.* A sejtés a $k = 2$ esetben igaz; ezt az eredményt általánosítjuk kördiszjunkt Steiner fenyőkre.

- *Lineáris idejű algoritmust adunk egy pár éldiszjunkt ki- és be-fenyő megtalálására aciklikus gráfokban.* A kérdéses fenyők létezésének eldöntése általában NP-teljes probléma. Algoritmusunk visszavezeti a feladatot egy páros gráfban való maximális párosítás problémára.

- *Erősen polinomiális algoritmust adunk adott konvex halmazokat feszítő éldiszjunkt fenyvesek megkeresésére élkapacitásokkal rendelkező gráfban.* Megoldásunk a fenyő-pakolások és a metsző párhalmazrendszerek fedése közti szoros kapcsolaton alapul.

- *Megadjuk a fenyő-pakolható részgráfok poliéderes leírását„ és igazoljuk, hogy a kapott rendszer TDI.* Bizonyításunk Fujishige tételének bizonyításában megjelenő speciális párhalmaz családok szerkezetén alapul.

A dolgozat második fő témaköre tiltott részgráfokat nem tartalmazó b-matchingek vizsgálata, különös tekintettel az úgynevezett C_k-mentes 2-matchingekre. Ismert, hogy a C_k-mentes 2-matching probléma NP-teljes $k \geq 5$ esetén. A kapcsolódó fejezetekben a C_3-mentes és C_4-mentes 2-matchingek, illetve a $K_{t,t}$- és K_{t+1}-mentes t-matchingek problémáját vizsgáljuk fokszámkorlátozott gráfokban.

- *Min-max tételt és algoritmust adunk a négyszög-mentes 2-matching feladatra szubkubikus gráfokban.* Megmutatjuk, hogy a probléma súlyozott változata már síkbarajzolható páros kubikus gráfokban is NP-nehéz, ugyanakkor pont-indukált költségfüggvény esetén polinomiális algoritmus adható.

- *Min-max tételt és algoritmust adunk a $K_{t,t}$- és K_{t+1}-mentes t-matching feladatra fokszámkorlátozott gráfokban.* Ez a probléma könnyen láthatóan általánosítja a C_3-mentes, a C_4-mentes, illetve a $C_{\leq 4}$-mentes 2-matching problémákat.

- *Igazoljuk a szubkubikus gráfok háromszög-mentes 2-matching poliéderének leírását.* A leíró rendszert Hartvigsen és Li sejtette meg; teljes bizonyítása nemrégiben jelent meg. Egy független bizonyítást adunk az említett leírás helyességére, mely egy új összehúzási műveleten alapul.

A disszertáció utolsó fejezete tetszőleges háromszög-mentes részgráfokkal foglalkozik, azaz a vizsgált részgráfokban a pontokra vonatkozó fokszámkorlátot elhagyjuk. A problémát más ismert területeket érintve tárgyaljuk, mint például az árnyék-rendszerek vagy a Turán-szám.

- *Igazoljuk, hogy egy k méretű alaphalmazon értelmezett k elemű multihalmazok rendszere rendelkezik az úgynevezett splitting tulajdonsággal.* Ezen eredményből kiindulva igazolunk egy kombinatorikus színezési tételt, melyből aztán a Tuza-sejtés egy hipergráfokra való általánosításának törtirányú gyengítése következik.

Fenyők pakolása

Egy $D = (V, A)$ irányított gráfban feszítő r-**fenyőnek** hívunk egy olyan irányított fát, melyben minden pont elérhető a kijelölt r gyökérpontból. Azt mondjuk, hogy D **gyökeresen** k-**élösszefüggő**, ha minden $v \in V$ pontra létezik k éldiszjunkt irányított út r-ből v-be. Edmonds nevezetes tétele megadja k éldiszjunkt feszítő r-fenyő létezésének szükséges és elégséges feltételét [13].

1. Tétel (Edmonds)**.** *Egy $D = (V, A)$ irányított gráfban pontosan akkor létezik k éldiszjunkt feszítő r-fenyő, ha D gyökeresen k-élösszefüggő.*

Edmonds tételének egy lehetséges általánosítása, ha a fenyők által feszítendő pontok halmazát csökkentjük. Ugyanakkor a fenyők méretének csökkentése hamar nehéz problémához vezethet, ahogy azt a következő eredmények is mutatják.

2. Tétel (B. és Frank [2])**.** *Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, melyben V két részből áll: az $R = \{r_1, \dots, r_q\}$ gyökérpontok halmazából és egy T terminálhalmazból. Tegyük fel, hogy R pontjaiba nem lép be él. Ekkor annak eldöntése, hogy létezik-e k éldiszjunkt fenyő különböző R-beli gyökérpontokkal, melyek mindegyike feszíti T-t, NP-teljes.*

3. Tétel (B. és Frank [2])**.** *Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, $u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$ és legyen $U_1 = V$, $U_2 = V - v_1$. Ekkor annak eldöntése, hogy léteznek-e éldiszjunkt F_1, F_2 fenyők úgy, hogy F_i feszíti U_i-t és a gyökere u_i, NP-teljes.*

2009-ben Kamiyama, Katoh és Takizawa Edmonds tételének egy meglepő általánosítását adták [17], melynek az alábbi ekvivalens alakját Fujishige fogalmazta meg. A ponthalmaz X és Y diszjunkt részhalmazaira Y **elérhető** X-ből, ha létezik olyan irányított út D-ben, melynek kezdőpontja X-ben, végpontja Y-ban található. A pontok egy U részhalmazát **konvexnek** nevezzük, ha nincs olyan $v \in V \setminus U$ pont, melyre $v$elérhető U-ból, és U is elérhető v-ből.

4. Tétel (Kamiyama, Katoh és Takizawa, Fujishige)**.** *Legy $D = (V, A)$ irányított gráf, $R = \{r_1, \dots, r_k\} \subseteq V$ pedig -nem feltétlenül különböző- gyökérpontok egy listája. Tegyük fel, hogy minden $1 \le i \le k$-ra adott a pontok egy U_i konvex részhalmaza, melyre $r_i \in U_i$. Ekkor pontosan akkor létezik $k$db éldiszjunkt fenyő úgy, hogy az i. fenyő gyökere r_i és feszíti U_i-t, ha*

$$\varrho_D(Z) \ge p_1(Z) \text{ minden } Z \subseteq V \text{ esetén,} \tag{1}$$

ahol $p_1(Z)$ jelöli azon U_i halmazok számát, melyekre $U_i \cap Z \neq \emptyset$ és $r_i \notin Z$.

Egy F r-fenyőben az u pont F-**őse** a v pontnak, ha v elérhető irányított F-beli úton u-ból. Ezt az egyértelmű $u - v$ utat $F(u, v)$-val jelöljük. Egy w pont **dominálja** a v pontot, ha minden irányított $r - v$ út tartalmazza a w pontot. Két irányított él **szimmetrikus**, ha végpontjaik megegyeznek, de ellentétes irányításúak. Két r-fenyő F_1 és F_2 erősen éldiszjunkt, ha az $F_1(r, v)$ és $F_2(r, v)$ utak uniója nem tartalmaz szimmetrikus élpárt semelyik $v \in V$ pontra.

5. Sejtés (Colussi, Conforti és Zambelli)**.** *Egy $D = (V, A)$ irányított gráfban pontosan akkor létezik $k$db páronként erősen éldiszjunkt feszítő r-fenyő, ha D gyökeresen k-élösszefüggő.*

A sejtést a $k = 2$ esetre igazolták [10]; $k \ge 3$ esetén azonban az állítás nem igaz, melyre a dolgozatban ellenpéldát is adunk. Ugyanakkor a $k = 2$ eset általánosítható kördiszjunkt Steiner fenyőkre. Adott $T \subseteq V$

terminálhalmaz esetén egy T-t feszítő r-fenyőt **Steiner-fenyőnek** nevezünk. Az F_1, F_2 Steiner-fenyők **élfüggetlenek**, ha az $F_1(r,t), F_2(r,t)$ utak éldiszjunktak minden $t \in T$ terminálpontra. Két élfüggetlen Steiner-fenyő **kördiszjunkt**, ha minden $t \in T$ pontra az $F_1(r,t)$ és $F_2(r,t)$ utak uniója nem tartalmaz irányított kört.

6. Tétel (B. és Kovács [5])**.** *Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, r gyökérpont, $T \subseteq V$ pedig egy terminálhalmaz. Pontosan akkor létezik két kördiszjunkt r gyökerű Steiner-fenyő, ha D gyökeresen 2-élösszefüggő.*

Mostantól a fenyőknek két típusát különböztetjük meg: ki-fenyő alatt a már eddig is használt fenyő fogalmát értjük, míg be-fenyőnek nevezünk egy olyan irányított fát, melynek éleit megfordítva egy ki-fenyőt kapunk. Ismert [8], hogy egy éldiszjunkt r_1-ki-fenyő és r_2-be-fenyő pár létezésének eldöntése NP-teljes feladat. Ezt a problémát aciklikus irányított gráfokban vizsgáljuk, és lineáris futásidejű algoritmust adunk a feladatra.

7. Tétel (B., Fujishige és Kamiyama [3])**.** *Egy $D = (V, A)$ irányított gráfban $O(|A|)$ időben eldönthető, hogy az $r_1, r_2 \in V$ gyökérpontokra nézve létezik-e egy éldiszjunkt r_1-ki-fenyő és r_2-be-fenyő pár. Ha a kérdéses fenyők léteznek, akkor $O(|A|)$ időben megtalálhatóak.*

Metsző párhalmazrendszerek fedése

Adott V alaphalmaz esetén az $X = (X_O, X_I)$ részhalmazokból álló párt **párhalmaznak** nevezzük, ha $X_I \subseteq X_O \subseteq V$. Ekkor X_O a párhalmaz **külső**, X_I pedig a **belső** tagja. Párhalmazok **metszete** $\cap$ és **uniója** $\cup$ természetesen definiálható: $X \cap Y := (X_O \cap Y_O, X_I \cap Y_I)$, $X \cup Y := (X_O \cup Y_O, X_I \cup Y_I)$. Két párhalmaz **metsző**, ha $X_I \cap Y_I \neq \emptyset$. Párhalmazok egy családját **metszőnek** nevezzük, ha bármely két metsző tagjának a metszete és az uniója is a családhoz tartozik. Egy irányított él **lefogja** az X párhalmazt, ha feje X_I-ben, töve X_O-n kívül helyezkedik el. Hasonlóan definiálható párhalmazok egy rendszerének **lefogása** egy élhalmazzal.

Edmonds tételének egy más irányú általánosítását kapjuk, ha fenyők pakolása helyett párhalmazrendszerek fedésének problémáját vizsgáljuk. Az $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ párhalmazrendszerek rendelkeznek az úgynevezett **kereszttulajdonsággal**, ha

$$X \in \mathcal{F}_i,\ Y \in \mathcal{F}_j,\ X_I \cap Y_I \neq \emptyset\ \Rightarrow\ X \cap Y \in \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j.$$

Egy X párhalmazra jelölje $p_2(X)$ az őt tartalmazó $\mathcal{F}_i$ rendszerek számát. Szegő metsző halmazrendszerek fedéséről szóló tétele kiterjeszthető párhalmazokra [9], így a következő tétel adható.

8. Tétel (B. és Frank)**.** *Legyenek $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ metsző párhalmazrendszerek a $D = (V, A)$ irányított gráf ponthalmazán, melyek rendelkeznek a kereszttulajdonságot. Ekkor D éleit pontosan akkor lehet k részre partícionálni úgy, hogy az i. rész lefogja $\mathcal{F}_i$-t, ha*

$$\varrho_D(X) \geq p_2(X) \text{ minden } X \text{ párhalmazra.}$$

[9]-ben megmutattuk, hogy a 4. Tétel következik a 8. Tételből. A párhalmazok használata új szemszögből enged betekintést a konvex halmazok struktúrájába. A bizonyítás során használt speciális párhalmazrendszerek segítségével erősen polinomiális algoritmus adható adott gyökérzetű és adott konvex halmazokat feszítő fenyvesek megtalálására egy élkapacitásokkal rendelkező irányított gráfban.

9. Tétel (B. és Frank [2]). *Legyen $D = (V, A)$ egy irányított gráf, $g : A \to \mathbb{Z}_+$ egy kapacitásfüggvény az éleken, $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_k\}$ gyökérhalmazok, $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_k\}$ pedig konvex halmazok egy listája úgy, hogy $R_i \subseteq U_i$. Legyen továbbá $m : \mathcal{R} \to \mathbb{Z}_+$ egy igény függvény. Ekkor erősen polinomiális algoritmus adható $m(\mathcal{R})$ éldiszjunkt fenyves megtalálására (ha léteznek), melyek közül $m(R_i)$ gyökérhalmaza R_i és feszíti U_i-t, továbbá minden $e \in A$ él élt legfeljebb $g(e)$ fenyves tartalmaz.*

Az említett speciális párhalmazrendszereket felhasználva poliéderes megadható a fenyő-pakolható részgráfok poliéderes leírása, mely ráadásul TDI.

10. Tétel (B. és Frank [2]). *Az $x \in \mathbb{R}^A$-ra vonatkozó*

$$\{0 \le x \le g,\ \varrho_x(Z) \ge p_1(Z) \text{ minden nemüres } Z \subseteq T\text{-re}\} \tag{2}$$

rendszer TDI. Speciálisan, a fenyő-pakolható részgráfok incidenciavektorainak konvex burka a következő:

$$\{x \in \mathbb{R}^A :\ 0 \le x \le 1,\ \varrho_x(Z) \ge p_1(Z) \text{ minden nemüres } Z \subseteq T\text{-re}\}. \tag{3}$$

C_4-mentes 2-matchingek

Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf pontjain legyen adott egy $b : V \to \mathbb{Z}_+$ felső korlát függvény. Élek egy $F \subseteq E$ részhalmazát ***b*-matchingnek** nevezzük, ha $d_F(v) \le b(v)$ teljesül minden $v \in V$ pontra. Valamely $t \ge 2$ egész számra t-matching alatt olyan b-matchinget értünk, melyre $b(v) = t$ minden $v \in V$ pontra. Ha mindenhol $d_F(v) = b(v)$ áll, akkor F-et ***b*-faktornak** nevezzük.

Az értekezés második fő témája a C_k-mentes illetve $C_{\le k}$-mentes 2-matching problémák vizsgálata. Egy $M \subseteq E$ 2-matching **C_k-mentes**, ha nem tartalmaz k hosszú, és **$C_{\le k}$-mentes**, ha nem tartalmaz legfeljebb k hosszú kört. Papadimitriou megmutatta, hogy a maximális méretű ilyen tulajdonságú élhalmazok megtalálása már $k \ge 5$ esetén is NP-teljes [11], míg a $k = 3$ esetre Hartvigsen adott rendkívül bonyolult javító utas algoritmust [14]. A C_4-mentes valamint $C_{\le 4}$-mentes 2-matching problémák továbbra is nyitottak.

A fenti problémákat több kér dés is motiválja. Egyrészt a Hamilton-kör probléma természetes relaxáltjai, de szorosan kapcsolódnak az irányítatlan pontösszefüggőség-növeléshez is. Ez utóbbi kérdés egy érdekes speciális esete az összefüggőség eggyel való növelés problémája, mely a következő: egy $(k-1)$-pontösszefüggő irányítatlan gráfot tegyünk k-pontösszefüggővé minimális számú új él hozzávételével.

Kutatásunk középpontjában az eggyel való növelés problémája állt k nagy értékeire[1]. Könnyen látható, hogy $k = n-1$-re a gráfot egyszerűen egy teljes gráffá kell kiegészíteni; $k = n-2$-re pedig a probléma ekvivalens egy maximális párosítás keresésével a gráf komplementerében. Meggondolható, hogy $k = n-3$-ra az összefüggőség eggyel való növelése ekvivalens egy maximális méretű C_4-mentes 2-matching meghatározásával az eredeti gráf komplementerében, mely -lévén $(k-1)$-összefüggő- szubkubikus.

Az értekezésben polinomiális idejű algoritmust és min-max tételt adunk a C_4-mentes 2-matching problémára szubkubikus gráfokban. Jelölje γ_1 a b-faktor probléma megoldásához szükséges futási időt mikor $b(v) \le 2$ teljesül minden $v \in V$ pontra.

11. Tétel (B. és Kobayashi [4]). *Szubkubikus gráfokban a C_4-mentes 2-matching probléma $O(n^3\gamma_1)$ időben megoldható.*

Ebből egyből polinomiális idejű algoritmust kapunk az említett összefüggőség-növelési problémára is.

[1] A pontösszefüggőség eggyel való növelésének problémáját azóta Végh megoldotta [23].

12. Tétel (B. and Kobayashi [4]). *Egy $(n-4)$-összefüggő gráf $(n-3)$-összefüggővé növelésének problémája $O(n^3\gamma_1)$ időben megoldható.*

Algoritmusunk azon alapul, hogy egy egyszerű szubkubikus gráfban a C_4-mentes 2-matchingek fokszámsorozatai egy matroid-szerű struktúrát, úgynevezett 'jump system'-et alkotnak.

A fenti problémák súlyozott változata szintén érdekes. Adott $(k-1)$-összefüggő $G=(V,E)$ gráf és egy $w:\bar{E}\to\mathbb{R}_+$ súlyozás esetén ($\bar{E}$ a komplementer gráf élhalmazát jelöli) ekkor a következő kérdés kapjuk: minimális összsúlyú élhalmaz hozzávételével tegyünk egy $(k-1)$-összefüggő G gráfot k-összefüggővé. Ismert, hogy ez a probléma NP-nehéz $k\geq 2$ esetén. Amikor a kiindulási gráf $(n-4)$-összefüggő, lényegében egy maximális összsúlyú C_4-mentes 2-matchinget kell keresnünk egy szubkubikus gráfban.

Király Z. megmutatta, hogy a maximális súlyú C_4-mentes 2-faktor probléma már páros gráfokban és 0,1 súlyozás esetén is NP-nehéz. Ugyanakkor ismert, hogy a feladat megoldható abban a speciális esetben, mikor a súlyfüggvény minden C_4-en pontindukált. A G gráf egy $H=(V(H),E(H))$ részgráfjára azt mondjuk, hogy w **pontindukált** H-n, ha létezik olyan $\pi_H:V(H)\to\mathbb{R}$ függvény, melyre $w(e)=\pi_H(u)+\pi_H(v)$ minden $e=uv\in E(H)$ élre.

Megmutatjuk, hogy a maximális összsúlyú C_4-mentes 2-matching probléma polinom időben megoldható szubkubikus gráfokban, ha a súlyfüggvény pontindukált. Tegyük fel, hogy egy G gráfban a w élsúlyozás mellett egy $x\in\{0,1,2\}^V$ vektorra γ_2 időben meg tudunk találni egy maximális súlyú $F\subseteq E$ élhalmazt, melyre $d_F=x$.

13. Tétel (B. és Kobayashi [4]). *Egy w élsúlyozott szubkubikus G gráfban, ahol w pontindukált minden C_4-en, a súlyozott C_4-mentes 2-matching probléma $O(n^3\gamma_2)$ időben megoldható.*

Megmutatjuk továbbá, hogy a probléma NP-nehéz általános súlyokra.

14. Tétel (B. és Kobayashi [4]). *A súlyozott C_4-mentes 2-matching probléma NP-nehéz már kubikus, páros, síkbarajzolható gráfokra is.*

A súlyozott problémára adott algoritmusunk Murota M-konkáv és M-konvex függvényekről szóló eredményein alapul.

$K_{t,t}$- és K_{t+1}-mentes t-matchingek

A C_4-mentes 2-matching problémának két természetes általánosítása is adódik. Az egyik az úgynevezett $K_{t,t}$-mentes t-matching probléma, míg a másik a $K_{a,b}$-mentes t-matching probléma az $a+b=t+2$ értékek mellett. Ez utóbbi probléma ekvivalens a gráf pontösszefüggőségének minimális számú él hozzávételével történő $n-t-1$-re való növelésével. Az értekezésben mi az első lehetőséget vizsgáljuk.

Legyen $\mathcal{K}$ tiltott $K_{t,t}$ (teljes páros gráf $2t$ ponton) és K_{t+1} (teljes $t+1$ pontú gráf) részgráfok egy listája. Min-max tételt adunk a $\mathcal{K}$-mentes b-matchingek méretére, és egy polinomiális algoritmust a kérdéses élhalmaz megkeresésére. A bizonyítás során feltesszük, hogy bármely $K\in\mathcal{K}$ és bármely $v\in K$ esetén

$$V_K \text{ nem feszít párhuzamos éleket} \tag{4}$$

$$b(v)=t \tag{5}$$

$$d_G(v)\leq t+1. \tag{6}$$

A fenti feltételek mellett ez a feladat általánosítja a C_3-mentes, a C_4-mentes, és a $C_{\leq 4}$-mentes 2-matching problémákat szubkubikus gráfokban.

Egy teljes négypontú gráfot **telítettnek** hívunk, ha mindhárom C_4, melyet tartalmaz, tiltott. A (6) feltétel miatt minden telített K_4 egy összefüggőségi komponensét alkotja G-nek. Jelölje az ilyen komponensek számát a $t = 2$ esetben $S(G)$, egyébként legyen $S(G) = 0$.

15. Tétel (B. és Végh [6])**.** *Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf, $b : V \to \mathbb{Z}_+$ egy felső korlát a pontokon, és $\mathcal{K}$ tiltott $K_{t,t}$ és K_{t+1} részgráfok egy listája úgy, hogy (4), (5) és (6) teljesül. Ekkor a maximális $\mathcal{K}$-mentes b-matching mérete egyenlő a*

$$b(U) + |E[W]| - |\dot{\mathcal{K}}[W]| + \sum_{T \in \mathcal{P}} \left\lfloor \tfrac{1}{2}(b(T) + |E[T, W]| - |\dot{\mathcal{K}}[T, W]|) \right\rfloor - S(G) \tag{7}$$

kifejezés minimumával, ahol U és W diszjunkt részhalmazai V-nek, $\mathcal{P}$ a $G - U - W$ összefüggőségi komponenseinek egy partíciója, és $\dot{\mathcal{K}} \subseteq \mathcal{K}$ pontdiszjunkt tiltott részgráfok egy halmaza.

A megszorító feltételek közül (4) és (5) természetesek, hiszen a maximális $K_{t,t}$-mentes t-matching probléma esetében is fennállnak. Ugyanakkor a (6) fokszámkorlát egy nagyon erős extra megkötés, mely alapvető nehézségeket zár ki. Bizonyításunk nagyban támaszkodik erre a megkötésre, így várhatóan nem terjeszthető ki a fokszámkorlát nélküli esetre.

A háromszög-mentes 2-matching poliéder

A párosítások elméletének egyik legfontosabb eredménye Edmonds tétele [12], mely megadja a teljes párosítások incidenciavektorainak konvex burkát leíró rendszert. Edmonds egyben a b-faktor poliédert is karakterizálta. Egy $K \subseteq V$ ponthalmaz és $F \subseteq \delta(K)$ élhalmaz egy **párt** alkot. A pár **páratlan** ha $b(K)+|F|$ páratlan.

16. Tétel (Edmonds)**.** *A b-faktor poliéder a következő rendszerrel írható le:*

$$\begin{aligned} &(i)\ 0 \leq x_e \leq 1 && (e \in E), \\ &(ii)\ x(\dot{\delta}(v)) = b(v) && (v \in V), \\ &(iii)\ x(\delta(K) \setminus F) - x(F) \geq 1 - |F| && ((K, F)\ \textit{páratlan}). \end{aligned} \tag{P_2}$$

A b-matching poliéder leírása könnyen levezethető a 16. Tételből.

17. Tétel. *A b-matching poliéder a következő rendszerrel írható le:*

$$\begin{aligned} &(i)\ 0 \leq x_e \leq 1 && (e \in E), \\ &(ii)\ x(\dot{\delta}(v)) \leq b(v) && (v \in V), \\ &(iii)\ x(E[K]) + x(F) \leq \lfloor \tfrac{b(K)+|F|}{2} \rfloor && ((K, F)\ \textit{páratlan}). \end{aligned} \tag{P_3}$$

Ha a C_k-mentes 2-matching probléma súlyozott változatát vizsgáljuk, lényeges különbség figyelhető meg a háromszög- és a négyszög-mentes esetek között. Király Z. bizonyította [18], hogy a súlyozott C_4-mentes 2-faktor probléma NP-nehéz már páros gráfokban és 0,1 súlyozás mellett is. Szubkubikus gráfokban Hartvigsen és Li [15], valamint Kobayashi [19] adott polinomiális algoritmust a háromszög-mentes 2-matching problémára. Ezek alapján nem remélhetünk szép leírást a négyszög-mentes esetben, ugyanakkor a háromszög-mentes eset megoldhatósága volt kutatásaink egyik fő motivációja.

Legyen $\mathcal{T}$ tiltott háromszögek egy lsitája. Hartvigsen és Li a következő poliéderes leírást adták a $\mathcal{T}$-mentes 2-faktor poliéderre szubkubikus gráfokban [15].

18. Tétel (Hartvigsen and Li)**.** *Egyszerű szubkubikus gráfokban a $\mathcal{T}$-mentes b-faktor poliéder a következő rendszerrel írható le:*

$$\begin{aligned} &(i)\ 0 \le x_e \le 1 && (e \in E), \\ &(ii)\ x(\delta(v)) = 2 && (v \in V), \\ &(iii)\ x(\delta(K) \setminus F) - x(F) \ge 1 - |F| && (K \subseteq V, F \subseteq \delta(K), |F| \text{ páratlan}), \\ &(iv)\ x(E_T) = 2 && (T \in \mathcal{T}). \end{aligned} \qquad (P_5)$$

A szerzők a $\mathcal{T}$-mentes 2-matching poliéder leírására is javasoltak egy rendszert, vázolva a bizonyítás alapötletét; a teljes bizonyítás nemrégiben jelent meg [16].

Korábban láttuk, hogy a b-matching és a b-faktor poliéderek leírása nagyon hasonló. Meglepő módon ez nem igaz a háromszög-mentes esetben. Azt mondjuk, hogy egy $T \in \mathcal{T}$ háromszög **2-illeszkedik** egy $K \subseteq V$ halmazra, ha $|V_T \cap K| = 2$. Ekkor T **speciális éle** az az $e \in E_T$, melynek nincs végpontja K-ban. Ezt az élt e_T-vel jelöljük. A K-ra 2-illeszkedő tiltott háromszögek halmazát $\mathcal{T}_K^2$-vel jelöljük.

19. Definíció. $(K, F, \mathfrak{T})$ **2-es típusú háromszög-fésű**, ha

1. $K \subseteq V$, $F \subseteq \delta(K)$, $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{T}_K^i$.
2. $F \cap E_{\mathfrak{T}} = \emptyset$.
3. A háromszögek $\mathfrak{T}$-ben éldiszjunktak.

Egy háromszög-fésű **páratlan** ha $|F| + |\mathfrak{T}|$ páratlan.

Hartvigsen és Li a következőt bizonyították [15,16].

20. Tétel (Hartvigsen és Li)**.** *Egyszerű szubkubikus gráfokban a $\mathcal{T}$-mentes b-matching poliéder a következő rendszerrel írható le:*

$$\begin{aligned} &(i)\ 0 \le x_e \le 1 && (e \in E), \\ &(ii)\ x(\delta(v)) \le 2 && (v \in V), \\ &(iii)\ x(E[K]) + x(F) + \textstyle\sum_{T \in \mathfrak{T}} x(E_T) \le |K| + \lfloor \frac{|F| + 3|\mathfrak{T}|}{2} \rfloor && ((K, F, \mathfrak{T}) \text{ páratlan} \\ &&& \text{2-es típusú}), \\ &(iv)\ x(E_T) \le 2 && (T \in \mathcal{T}). \end{aligned} \qquad (P_6)$$

Algoritmikus bizonyításuk tiltott háromszögek 'semlegesítésén' és egy, az Edmonds maximális párosítás algorimusában használthoz hasonló alternáló erdő felépítésén alapul. Az értekezésben új, Hartvigsen és Li cikkétől független bizonyítást adunk a 18. és 20. Tételek egy kicsit általánosabb alakjára.

Splitting tulajdonság és árnyékrendszerek

A $\mathcal{P} = (P, \prec)$ részben rendezett halmaz egy $H \subseteq P$ részhalmazára az $\mathcal{U}(H) = \{x \in P : \exists h \in H : x \succeq h\}$ és $\mathcal{L}(H) = \{x \in P : \exists h \in H : x \preceq h\}$ halmazokat H **felső** és **alsó árnyékának** nevezzük. Egy A maximális antilánc rendelkezik a **splitting tulajdonsággal**, ha két részre partícionálható úgy, hogy $A_1 \cup A_2 = A$ és $\mathcal{U}(A_1) \cup \mathcal{L}(A_2) = P$. Az antilánc **sűrű**, ha teljesíti a következőt: bármely $a \in A$, $x, y \in P$, $x \prec a \prec y$ esetén létezik $a' \in A \setminus \{a\}$, melyre $x \prec a' \prec y$. A következő eredmény [7]-ben jelent meg.

21. Tétel (Ahlswede, Erdős és Graham)**.** *Egy véges részbenrendezett halmazban minden sűrű maximális antilánc rendelkezik a splitting tulajdonsággal.*

Az értekezésben k elemű alaphalmazon értelmezett multihalmazokkal foglalkozunk. Formálisan, a $\mathbb{Z}_k$ csoport elemeire színekként gondolunk, a $\mathbb{Z}_k \to \mathbb{Z}$ vektorokat **k-színmintáknak** hívjuk, halmazukat M_k-val jelöljük. Ezen a halmazon definiálhatunk egy természetes rendezést: $a, c \in M_k$-ra $a \prec c$, ha $a_i \leq c_i$ minden $i \in \mathbb{Z}_k$-ra és $a \neq c$. Ekkor azt is mondjuk, hogy a **árnyéka** c-nek.

Jelölje

$$M_k^r = \{x \in M_k, \sum_{i \in \mathbb{Z}_k} x_i = r\}.$$

az r elemű k-színminták halmazát.

Az értekezés utolsó fejezetének egyik fő eredménye a splitting tulajdonság igazolása az M_k^k antiláncra.

22. Tétel (B., Csikvári, Kovács és Végh [1])**.** *Az $(M_k, \prec)$ részbenrendezett halmazban az M_k^k maximális antilánc rendelkezik a splitting tulajdonsággal, azaz M_k^k két részre partícionálható oly módon, hogy $A = A_1 \cup A_2$ és $\mathcal{U}(A_1) \cup \mathcal{L}(A_2) = M_k$.*

Könnyen látható, hogy M_k^k nem sűrű, így a 21. Tételből nem következik az állítás.

Az $r \leq t \leq n$ pozitív egészekre **Turán** (n, t, r)**-rendszer** alatt egy olyan n ponton értelmezett r-uniform hipergráfot értünk, melyben bármely t elemű ponthalmaz feszít legalább egy hiperélt. Az ilyen hipergráfok minimális méretét a $T(n, t, r)$ **Turán-számmal** jelöljük; pontos értékének meghatározását elsőként Turán Pál vetette fel [21].

A

$$t(t, r) = \lim_{n \to \infty} \frac{T(n, t, r)}{\binom{n}{r}}$$

határérték azt fejezi ki, hogy az összes r elemű hiperél mekkora részét szükséges bevenni egy Turán (n, t, r)-rendszerbe. Meglepő módon semmilyen $t > r > 2$ értékekre nem ismert a pontos válasz -1981-ben Erdős Pál \$500-os jutalmat ajánlott fel egyetlen speciális eset, és \$1000-os jutalmat az általános eset megoldásáért. A jelenleg ismert legjobb felső korlát Sidorenko nevéhez fűződik [20].

23. Tétel (Sidorenko)**.**

$$t(t, r) \leq \left(\tfrac{r-1}{t-1}\right)^{r-1}. \tag{8}$$

A 22. Tételbeli $A_1 \subseteq M_k^k$ halmaznak minden $c \in M_k^{k+1}$ vektorra tartalmaznia kell c-nek legalább egy árnyékát. Ezt általánosítandó, $r < t$ esetén az $A \subseteq M_k^r$ halmazt $(t, r; k)$**-árnyékrendszernek** nevezzük, ha minden $c \in M_k^t$ vektorra tartalmazza c-nek legalább egy árnyékát. Ezzel a jelöléssel a 22. Tételbeli A_1 halmaz egy $(k+1, k; k)$-árnyékrendszer. Tekintsünk most egy $s \in \mathbb{Z}_k^r$ vektort. Az $a = M(s) \in M_k^r$ **szín-profil** természetes módon defeiniálható: legyen a_i az s-ben szereplő i-k száma minden $1 \leq i \leq k$ esetén.

Árnyék-rendszerek segítségével új bizonyítást adunk a fenti korlátra, felhasználva az alábbi kombinatorikus színezési tételt.

24. Tétel (B., Csikvári, Kovács és Végh [1])**.** *Létezik olyan $(t, r; t-1)$-árnyék-rendszer -jelölje ezt $\mathcal{A}_r^t \subseteq M_{t-1}^r$-, melyre egy véletlen választott $s \in \mathbb{Z}_{t-1}^r$ vektorra annak a valószínűsége, hogy $M(s) \in \mathcal{A}_r^t$, $\left(\frac{r-1}{t-1}\right)^{r-1}$.*

A dolgozatban bevezetjük a Turán-szám egy természetes súlyozott változatát: a V alaphalmaz r elemű részhalmazain adott w nemnegatív költségfüggvény esetén jelölje w^* az r elemű részhalmazok összsúlyát. A

$T_w(n,t,r)$-rel jelölt **Turán-súly** egy minimális összsúlyú Turán (n,t,r) rendszer súlyát jelöli. A már látott $t(t,r)$ értékhez hasonlóan definiálhatjuk a

$$tw(t,r) = \lim_{n\to\infty} \sup_w \frac{T_w(n,t,r)}{w^*}$$

határértéket. Belátjuk, hogy $tw(t,r) = t(t,r)$, azaz a korlátot nem befolyásolja a súlyozás.

25. Tétel (B., Csikvári, Kovács és Végh [1]). *$tw(t,r) = t(t,r)$, és így $tw(t,r) \le \left(\frac{r-1}{t-1}\right)^{r-1}$.*

A Turán-rendszerek szoros kapcsolatban állnak Tuza híres sejtésével [22], mely szerint tetszőleges irányítatlan gráfban a háromszögeket lefogó élek minimális száma legfeljebb kétszerese az éldiszjunkt háromszögek maximális számának. A minimális élhalmaz megtalálása egy $G = (V,E)$ gráfban ekvivalens a $T_w(n,3,2)$ érték meghatározásával, ahol $n = |V|$ és $w(e) = 1$ ha $e \in E$ és $w(e) = 0$ egyébként.

Legyen most $H = (V,\mathcal{E})$ egy egyszerű $(r-1)$-uniform hipergráf, $w : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ pedig egy súlyozás a hiperéleken. Egy r pontú teljes részhipergráfot r**-blokknak** hívunk. Az r-blokkokat fedő hiperélek minimális összsúlyát $\tau_w(H)$-val, míg a minden $e \in \mathcal{E}$ hiperélt legfeljebb $w(e)$-szer fedő r-blokkok maximális számát $\nu_w(H)$-val jelöljük.

A következő sejtés Tuza sejtésének súlyozott hipergrafikus kiterjesztése.

26. Sejtés (B., Csikvári, Kovács és Végh [1]). *Egy $H = (V,\mathcal{E})$ egyszerű $(r-1)$-uniform hipergráfban a $w : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ súlyozásra nézve $\tau_w(H) \le \lceil \frac{r+1}{2} \rceil \nu_w(H)$.*

A sejtés nyitott, ám sikerült egy törtirányú gyengítését igazolnunk.

27. Tétel (B., Csikvári, Kovács és Végh [1]). *Egy $H = (V,\mathcal{E})$ egyszerű $(r-1)$-uniform hipergráfban a $w : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ súlyozásra nézve $\tau_w(H) \le (r-1)\tau^*_w(H)$.*

A 27. Tétel Krivelevich egy hasonló eredményét általánosítja; a bizonyításban felhasználjuk az árnyékrendszerekre kapott eredményeinket.

Az értekezés alapjául szolgáló közlemények

[1] K. Bérczi, P. Csikvári, E. R. Kovács, and L. A. Végh. Splitting property via shadow systems. Technical Report TR-2013-02, Egerváry Research Group, Budapest, 2013. www.cs.elte.hu/egres. 8, 9

[2] K. Bérczi and A. Frank. Packing arborescences. *Lecture Notes, in: RIMS Kokyuroku Bessatsu B*, 23:1–31, 2009. 2, 4

[3] K. Bérczi, S. Fujishige, and N. Kamiyama. A linear-time algorithm to find a pair of arc-disjoint spanning in-arborescence and out-arborescence in a directed acyclic graph. *Information Processing Letters*, 109(23):1227–1231, 2009. 3

[4] K. Bérczi and Y. Kobayashi. An algorithm for $(n-3)$-connectivity augmentation problem: Jump system approach. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 102(3):565–587, 2012. 4, 5

[5] K. Bérczi and E. R. Kovács. A note on strongly edge-disjoint arborescences. In *Proceedings of 7th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and its Applications*, pages 10–18, Kyoto, 2011. 3

[6] K. Bérczi and L. A. Végh. Restricted b-matchings in degree-bounded graphs. In F. Eisenbrand and F. Shepherd, editors, *Integer Programming and Combinatorial Optimization*, volume 6080 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 43–56. Springer, 2010. 6

Hivatkozások

[7] R. Ahlswede, P. Erdős, and N. Graham. A splitting property of maximal antichains. *Combinatorica*, 15(4):475–480, 1995. 7

[8] J. Bang-Jensen. Edge-disjoint in-and out-branchings in tournaments and related path problems. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 51(1):1–23, 1991. 3

[9] K. Bérczi and A. Frank. Variations for Lovász' submodular ideas. *Building Bridges*, pages 137–164, 2008. 3

[10] L. Colussi, M. Conforti, and G. Zambelli. Disjoint paths in arborescences. *Discrete mathematics*, 292(1):187–191, 2005. 2

[11] G. Cornuéjols and W. Pulleyblank. A matching problem with side conditions. *Discrete Mathematics*, 29(2):135–159, 1980. 4

[12] J. Edmonds. Maximum matching and a polyhedron with $0, 1$ vertices. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 69:125–130, 1965. 6

[13] J. Edmonds. Edge-disjoint branchings. *Combinatorial Algorithms*, 9:91–96, 1973. 2

[14] D. Hartvigsen. *Extensions of matching theory.* PhD thesis, Carnegie-Mellon University, 1984. 4

[15] D. Hartvigsen and Y. Li. Triangle-free simple 2-matchings in subcubic graphs (extended abstract). In M. Fischetti and D. Williamson, editors, *Integer Programming and Combinatorial Optimization*, volume 4513 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 43–52. Springer, 2007. 6, 7

[16] D. Hartvigsen and Y. Li. Polyhedron of triangle-free simple 2-matchings in subcubic graphs. *Mathematical Programming*, pages 1–40, 2012. 7

[17] N. Kamiyama, N. Katoh, and A. Takizawa. Arc-disjoint in-trees in directed graphs. In *Proceedings of the nineteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 518–526. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008. 2

[18] Z. Király. Restricted t-matchings in bipartite graphs. Technical Report QP-2009-04, Egerváry Research Group, Budapest, 2009. `www.cs.elte.hu/egres`. 6

[19] Y. Kobayashi. A simple algorithm for finding a maximum triangle-free 2-matching in subcubic graphs. *Discrete Optimization*, 7(4):197–202, 2010. 6

[20] A. Sidorenko. Systems of sets that have the T-property. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya I. Matematika, Mekhanika*, pages 19–22, 1981. 8

[21] P. Turán. Research problems. *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézet Közleménye*, 6:417–423, 1961. 8

[22] Zs. Tuza. Conjecture. In *Finite and Infinite Sets, Proc. Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, page 888. North-Holland, 1981. 9

[23] L. A. Végh. Augmenting undirected node-connectivity by one. In *Proceedings of the 42nd ACM symposium on Theory of computing*, pages 563–572. ACM, 2010. 4