Doktori értekezés

Tézisfüzet

Zsuppán Sándor

2008

A Stokes feladatról

Zsuppán Sándor

Témavezető: Dr. Stoyan Gisbert

Egyetemi tanár, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar,
Numerikus Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar,
Matematika Doktori Iskola

Doktori Iskola Vezető: Dr. Laczkovich Miklós

Egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia tagja

Alkalmazott matematika program

Programvezető: Dr. Michaletzky György

Egyetemi tanár

Az értekezés készült:

Berzsenyi Dániel Evangélikus Gimnázium (Líceum) és Kollégium

Sopron, 2008

1 Bevezetés

Ezen disszertáció az elsőfajú Stokes feladatot vizsgálja, amely a folyadékok mozgását leíró Navier-Stokes egyenletrendszerből [25] származtatható:

$$-\Delta \vec{u} + \operatorname{grad} p = \vec{f} \text{ és } \operatorname{div} \vec{u} = 0. \tag{1}$$

Ezen egyenletrendszer megoldásai a folyadék $\vec{u}$ sebességét és p nyomását leíró függvények, amelyeket megfelelően választott függvényterekben keresünk. A függvénytereket értelmezhetjük síkbeli vagy térbeli tartományon is. A megoldáshoz a keresett sebességre peremfeltételeket írunk elő a vizsgált tartomány peremén. Dirichlet peremfeltétel esetén a Stokes feladatot elsőfajúnak nevezzük.

Az értekezés két fő részből épül fel.

Az első részben vizsgáljuk egy síkbeli tartományon kitűzött elsőfajú Stokes feladathoz tartozó Schur komplemens operátort és a tartomány inf-sup konstansát, amelynek négyzete a Schur komplemens operátor legkisebb pozitív sajátértéke. Az inf-sup konstansnak döntő szerepe van a Stokes feladat stabil megoldhatóságában. Értéke csak a taromány alakjától, azaz peremének tulajdonságaitól függ. A tartomány alakja szoros kapcsolatban van továbbá a tartomány Riemann-féle konform leképezésével. Ezen kapcsolatot felhasználva vezetjük le eredményeinket.

A második részben ismertetjük a Stokes függvények reprezentációjában elért eredményeket. Stokes függvényeknek nevezzük a homogén (1) rendszer (azaz $\vec{f} = 0$ esetén) megoldásait a sebességre előírt Dirichlet peremfeltétel esetén. A Stokes függvényekre kapott eredményeket általánosítjuk a lineáris rugalmasságtani egyenletre is.

Az értekezés első része főként az [53] és [54] cikkekre; a második része pedig az [55] cikkre épül.

2 Konform leképezések használatával kapott eredmények

Ebben a részben főként az elsőfajú Stokes feladathoz tartozó

$$\mathcal{S} = \operatorname{div} \Delta_0^{-1} \operatorname{grad} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega) \tag{2}$$

Schur komplemens operátort vizsgáljuk, ahol Δ_0 jelöli a vektor Laplace operátort homogén Dirichlet peremfeltétel esetén.

Levezetjük a felhasznált módszerrel az Ω tartományhoz rendelhető

$$\mathcal{F} = \mathcal{P} \circ \mathcal{C} : AL_2(\Omega) \to AL_2(\Omega), \tag{3}$$

Friedrichs operátor és az $\mathcal{S}$ Schur komplemens operátor között fennálló kapcsolatot. $\mathcal{P}$ jelöli az $L_2(\Omega)$ tér analitikus függvényeket tartalmazó $AL_2(\Omega)$ alterére képező ortogonális vetítést, $\mathcal{C}$ pedig a konjugálás operátora. Ezen kapcsolatot adja meg a – [13]-ban már megfogalmazott – alábbi

2.1 Tétel *Legyen az Ω síktartomány pereme megfelelően sima. Ekkor a tartományhoz rendelhető Schur komplemens és Friedrichs operátorok az alábbi kapcsolatban vannak:*

$$2\mathcal{S} = \mathcal{I} - \mathcal{C} \circ \mathcal{F}. \tag{4}$$

2.2 Megjegyzés A 2.1 tételbeli tartomány $\partial\Omega$ peremének megfelelő simasága feltétele az operátorok között megfogalmazott kapcsolat teljesülésének. Másrészt $\partial\Omega$ simasága kapcsolatban van a tartományt az egységkörre képező konform leképezés tulajdonságaival is. A 2.1 Tétel állítását bizonyítjuk megfelelően sima peremgörbékkel rendelkező többszörösen összefüggő tartományok esetében is. A bizonyításhoz felhasználjuk [22] eredményeit. □

A konform leképezések használata lehetővé teszi a tanulmányozott (2) és (3) operátorok egyfajta mátrix reprezentációját is. Ehhez felhasználjuk az

$$\mathcal{F}_D(p) := (\mathcal{F}(f) \circ g)g' : AL_2(D) \to AL_2(D) \tag{5}$$

operátort, ahol $p = (f \circ g)g'$ és a

$$g : D \to \Omega \tag{6}$$

függvény jelöli a D egységkörlap bijektív konform leképezését az Ω tartományra. Az $\mathcal{F}_D$ operátor reprezentálható egy végtelen $\mathcal{M}$ mátrixszal, amennyiben az $AL_2(D)$-beli függvényeknek azok Taylor sorának együtthatóiból képezett vektorokat feleltetünk meg.

2.3 Következmény *Az egyszeresen összefüggő $\Omega = g(D)$ síktartomány $\mathcal{F}$ Friedrichs operátora illetve $\mathcal{S}$ Schur komplemens operátora unitér ekvivalens módon megfeleltethető az $\mathcal{M}$ végtelen mátrix által meghatározott*

$$\mathcal{MC} \text{ és } \frac{1}{2}\left(\mathcal{I} - \mathcal{CMC}\right),$$

lineáris operátoroknak. □

2.4 Megjegyzés Az $\mathcal{M}$ mátrix a következő végtelen sorozatokból alkotott vektortéren hat:

$$\ell_{(2,-1)} := \left\{ f \mid f = (f_0, f_1, f_2, \dots)^T \text{ amelyre } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f_n|^2}{n+1} < \infty \right\}.$$

$\mathcal{M}$ elemeit a g és $\frac{1}{g'}$ függvények Taylor soraiban szereplő együtthatókból képzett sorok határozzák meg. Vannak azonban olyan g függvények, amelyek esetén $\mathcal{M}$ elemeit meghatározó sorok divergensek. Megadunk néhány feltételt, amelyek biztosítják ezen sorok konvergenciáját. $\square$

Az $\mathcal{F}_D$ operátort és az $\mathcal{M}$ mátrix felépítését tanulmányozva megfogalmazunk néhány állítást (2) és (3) tartománytól való függésére.

2.5 Tétel *Legyen az η függvény az Ω tartomány konform leképezése az $\tilde{\Omega}$ tartományra, és teljesítse mindkét tartomány a 2.1 Tétel feltételeit. Ekkor érvényesek az alábbi becslések:*

$$\|\tilde{\mathcal{F}} - \mathcal{F}\| \leq 2 \sup_{w\in\Omega} |\sin(\arg \eta'(w))|, \tag{7}$$

$$\|\tilde{\mathcal{S}} - \mathcal{S}\| \leq \sup_{w\in\Omega} |\sin(\arg \eta'(w))|. \tag{8}$$

$\square$

2.6 Megjegyzés A 2.5 Tétel folytonossági eredménye átfogalmazható a tartományok peremén értelmezett τ ill. $\tilde{\tau}$ érintő egységvektorok felhasználásával:

$$\|\tilde{\mathcal{F}} - \mathcal{F}\| \leq 2 \max_{w\in\partial\Omega} |\sin(\arg \tilde{\tau}(w) - \arg \tau(w))|, \tag{9}$$

$$\|\tilde{\mathcal{S}} - \mathcal{S}\| \leq \max_{w\in\partial\Omega} |\sin(\arg \tilde{\tau}(w) - \arg \tau(w))|, \tag{10}$$

ahol z az egységkörön van és $w = g(z)$. $\square$

2.7 Lemma *Legyen $\rho \geq 1$ egész szám. $\mathcal{M} \in \mathbb{C}^{\rho\times\rho}$ pontosan akkor, ha* (6) *egy pontosan ρ-adfokú polinom. Ekkor az $\mathcal{M} \in \mathbb{C}^{\rho\times\rho}$ mátrix rangja ρ.* $\square$

2.8 Lemma *Az $\mathcal{M}$ mátrix és a megfelelő $\mathcal{F}$ és $\mathcal{S}$ operátorok pontosan akkor véges rangúak, ha* (6) *egy racionális törtfüggvény.* $\square$

A 2.7 Lemmával kapcsolatos speciális tartományok az ún. (klasszikus) kvadratúra-tartományok. A 2.8 Lemma eredménye már ismert tetszőleges kvadratúra-tartomány esetére [39], ahol a bizonyításhoz nem használták a konform leképezéseket. Azonban ezek használata a bizonyításban nem csak az egyszeresen összefüggő tartományhoz kapcsolódó operátorok magterének dimenziójáról ad információt, hanem annak szerkezetéről is.

2.9 Tétel *Legyen Ω egyszeresen összefüggő $\rho+1$ rendű ($\rho \geq 0$) kvadratúra-tartomány. Ekkor a kapcsolódó $\mathcal{F}$ és $\mathcal{I} - 2\mathcal{S}$ operátorok magterének kodimenziója $\rho+1$. A magterek a tartomány Schwarz függvényének nevezőjével előállíthatóak.* $\square$

2.10 Lemma *Legyen az $\Omega = g(D)$ tartomány véges területű. Ekkor az $\mathcal{M}$ mátrixnak van nem nulla eleme. Vannak végtelen területű tartományok, melyekhez tartozó $\mathcal{M}$ a nullmátrix.* □

Az operátorok vizsgálata után tanulmányoztuk a spektrumukat is, különös tekintettel a $\beta_0(\Omega)$ inf-sup konstansra, amelynek négyzete a Schur komplemens operátor legkisebb pozitív sajátértéke. Kiindulási pontként a Friedrichs egyenlőtlenség [21] egy alternatív formáját választottuk: létezik egy $\Gamma_\Omega \geq 1$ konstans, hogy bármely u és v konjugált harmonikus, $L_2(\Omega)$ térbeli függvényekre

$$\int_\Omega u^2 dA \leq \Gamma_\Omega \int_\Omega v^2 dA \text{ feltéve, hogy } \int_\Omega u dA = 0. \tag{11}$$

Számos eredményt vezethetünk le ebből kiindulva:

2.11 Következmény *Legyen $\Omega = g(D)$ tartomány olyan, hogy a konform leképezés g' deriváltja folytonos a zárt egységkörlapon és $|g'|$ rendelkezik pozitív alsó és felső korláttal az egységkörön. Ekkor az Ω tartomány inf-sup konstansára érvényes az alábbi egyenlőtlenség:*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\inf_{z \in \partial D} |g'(z)|}{\sup_{z \in \partial D} |g'(z)|} \leq \beta_0(\Omega) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{12}$$

Az egyenlőségek $g(z) = z$, azaz $\Omega = D$, esetén teljesülnek. □

2.12 Következmény *Rendelkezzenek az Ω és $\tilde{\Omega}$ tartományok olyan sima peremgörbékkel, hogy az $\eta : \Omega \to \tilde{\Omega}$ bijektív konform leképezés deriváltja folytonos Ω lezárásán, és $|\eta'|$ rendelkezik pozitív alsó és felső korláttal $\partial\Omega$ peremen. Ekkor*

$$\frac{\inf_{\partial\Omega} |\eta'|}{\sup_{\partial\Omega} |\eta'|} \beta_0(\Omega) \leq \beta_0(\tilde{\Omega}).$$

□

Ha η majdnem az identikus leképezés abban az értelemben, hogy $\eta' - 1$ maximum normája kicsi, akkor érvényes a következő:

2.13 Tétel *Ha az $\eta : \Omega \to \tilde{\Omega}$ bijektív konform leképezés olyan, hogy bármely $w \in \overline{\Omega}$ esetén $|\eta'(w) - 1| \leq \varepsilon < 1$, akkor*

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \beta_0(\Omega) \leq \beta_0(\tilde{\Omega}) \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \beta_0(\Omega) \tag{13}$$

következik a tartományok inf-sup konstansaira. □

2.14 Megjegyzés Legyen az Ω tartomány pereme $C^{1,\alpha}$ sima valamely $0 < \alpha < 1$ esetén. Konvergáljon az Ω_n, $n = 1, 2, \ldots$ tartománysorozat Ω tartományhoz abban az értelemben, hogy a megfelelő konform leképezésekre igaz legyen a következő: tetszőleges $0 < \varepsilon < 1$ esetén létezik olyan N természetes szám, hogy

$$\sup_D |g_n' - g'| < \varepsilon, \tag{14}$$

bármely $n > N$ esetén. Ekkor 2.13 Tétel alapján következik

$$\lim_{n\to\infty} \beta_0(\Omega_n) = \beta_0(\Omega),$$

azaz a tartománysorozat tagjainak inf-sup konstansaiból képezett számsorozat határértéke a tartománysorozat határértékének inf-sup konstansa. Így kaptunk egy elégséges feltételt az inf-sup konstans tartománytól való folytonos függésére. Ha (14) feltételnél kevesebbet teszünk fel, akkor az inf-sup konstans konvergenciája nem garantált, amit a $g_m(z) = z - \frac{c}{m} z^m$, $m > 1$, $0 < |c| \leq 1$ függvények példája jól illusztrál. Ha $\Omega_m = g_m(D)$, akkor az Ω_m tartománysorozat konvergál az egységkörlaphoz, de

$$\lim_{m\to\infty} \beta_0^2(\Omega_m) = \frac{1}{2} - \frac{|c|}{4} < \frac{1}{2} = \beta_0^2(D).$$

A fenti eredményt az operátorok mátrix reprezentációjának segítségével nyertük. □

A sajátértékek multiplicitása is jól tanulmányozható a konform leképezések segítségével.

2.15 Tétel *Legyen az egyégkörlap bijektív konform leképezése a következő alakú:*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nM+1} z^{nM+1}, \tag{15}$$

ahol $a_1 \neq 0$ és $M \geq 2$ tetszőleges egész. Ekkor vannak a Schur komplemens operátornak többszörös sajátértékei. □

2.16 Megjegyzés A 2.15 Tételben szereplő tartományok M-szeres forgási szimmetriával rendelkeznek. A dolgozatban adunk példát olyan tartományra, amely inf-sup konstansának négyzete a Schur komplemens operátor kétszeres sajátértéke. □

2.17 Megjegyzés A 2.11 Következmény illetve a Schur komplemens operátor mátrix-reprezentációjának segítségével becslést adunk néhány speciális tartomány (pl. csillagszerű, konvex ill. közelítőleg kör alakú tartományok) inf-sup konstansának értékére. Adunk néhány példát sarokkal rendelkező tartományok esetére is: végtelen szögtartomány, körgyűrűcikk stb. □

3 Reprezentációs eredmények

Ebben a részben a Stokes függvények reprezentációs képleteit tanulmányozzuk [55] alapján. Nem alkalmazzuk a komplex függvénytant, mert 3 dimenziós tartományokkal is foglalkozunk. Azonban megmutatjuk a kapcsolatot az előző részbeli eredményekkel.

Először bizonyítjuk [29] és [30] reprezentációs képleteinek ekvivalenciáját. A bizonyítás egy a $\vec{q}$ és p konjugált párokra vonatkozó hasonló reprezentációs képleten alapul, amelyeket az Ω térbeli tartományon [50] alapján az alábbiak szerint értelmezünk:

$$\operatorname{rot}\vec{q}(\vec{x}) = -\nabla p(\vec{x}), \quad \operatorname{div}\vec{q}(\vec{x}) = 0 \quad \text{ahol} \quad \vec{x} \in \Omega. \tag{16}$$

3.1 Lemma *Legyen az $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tartomány csillagszerű az origóra nézve. Ekkor az Ω-n értelmezett $(\vec{q}, p)$ függvények pontosan akkor alkotnak konjugált párt, ha léteznek olyan Ω-n harmonikus φ és ϕ függvények, hogy*

$$\vec{q}(\vec{x}) = \nabla\varphi(\vec{x}) + \vec{x} \times \nabla\phi(\vec{x}), \tag{17}$$

$$p(\vec{x}) = \phi(\vec{x}) + \vec{x} \cdot \nabla\phi(\vec{x}), \tag{18}$$

ahol $\vec{x} \in \Omega$. Ezeket a harmonikus függvényeket egyértelműen meghatározza a $(\vec{q}, p)$ pár, amennyiben $\varphi(0) = \phi(0) = p(0) = 0$:

$$\phi(\vec{x}) = \int_0^1 \frac{1}{\tau^2} e^{1-\frac{1}{\tau}} p(\tau\vec{x}) d\tau, \tag{19}$$

$$\varphi(\vec{x}) = \int_0^1 \vec{x} \cdot \vec{q}(\tau\vec{x}) d\tau \left(= \int_0^1 \vec{x} \cdot (\vec{q}(\tau\vec{x}) - \tau\vec{x} \times \nabla\phi(\tau\vec{x}))\, d\tau \right). \tag{20}$$

$\square$

3.2 Tétel *Legyen az $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tartomány csillagszerű az origóra nézve. Ekkor [29] és [30] reprezentációs képletei ekvivalensek.* $\square$

3.3 Megjegyzés A 3.2 Tételben szereplő reprezentációs képleteket kapcsolatba hozzuk még egy harmadik eredménnyel is, melyet Papkovich-Neuber reprezentációnak neveznek [38]. $\square$

Tanulmányozzuk azt a kérdést is, hogy a 3.2 Tétel eredményét hogyan általánosíthatjuk a csillagszerű tartományok esetéről tetszőleges tartományok esetére.

3.4 Tétel *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ tetszőleges tartomány. Ekkor $(\vec{v}, p)$ pontosan akkor alkot Stokes-párt az Ω tartományon, ha léteznek olyan $\vec{w}$ és ψ harmonikus függvények, hogy*

$$\begin{aligned} \vec{v} &= -\frac{1}{2}\nabla\left(\vec{x}\cdot\vec{w}\right) - \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\left(\vec{x}\times\vec{w} + \psi\vec{x}\right) + \vec{w}, && (21)\\ p &= -2\,\mathrm{div}\,\vec{w}. && (22) \end{aligned}$$

Ezek a harmonikus függvények a következőképpen adhatók meg:

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \frac{2}{3}\vec{v} - \frac{1}{6}\left(p\vec{x} - \vec{x}\times\mathrm{rot}\,\vec{v}\right), && (23)\\ \psi &= -\frac{1}{6}\vec{x}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}. && (24) \end{aligned}$$

Ezt követően a fentiekhez hasonló reprezentációs eredményeket fogalmazunk meg a lineáris rugalmasságtani egyenletre. (Ezeket tekinthetjük a [29] és [30]-beli eredmények általánosításának.)

3.5 Tétel *Legyen az $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tartomány csillagszerű az origóra nézve, és legyen $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu \neq \frac{3}{4}, 1$. A $\vec{v} \in C_2(\Omega)$ és $p \in C_1(\Omega)$ függvények pontosan akkor elégítik ki a*

$$\Delta\vec{v} = \nabla p, \quad \mathrm{div}\,\vec{v} = \nu p \tag{25}$$

összefüggéseket, ha létezik olyan $\vec{h} \in C_2(\Omega)$ harmonikus függvény, amelyre

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{x}) &= -\frac{1}{2}\left(\vec{x}\,\mathrm{div}\,\vec{h}(\vec{x}) + \vec{x}\times\mathrm{rot}\,\vec{h}(\vec{x})\right) + \left(\frac{3}{2} - 2\nu\right)\vec{h}(\vec{x}), && (26)\\ p(\vec{x}) &= -2\,\mathrm{div}\,\vec{h}(\vec{x}), \text{ ahol } \vec{x}\in\Omega. && (27) \end{aligned}$$

Ez a harmonikus függvény egyértelműen meghatározott, mégpedig

$$\vec{h}(\vec{x}) = \frac{2}{3-4\nu}\left(\vec{v}(\vec{x}) - \frac{1}{4}\left(p(\vec{x})\vec{x} - \frac{1}{1-\nu}\vec{x}\times\mathrm{rot}\,\vec{v}(\vec{x})\right) + \vec{x}\times\nabla\phi(\vec{x})\right), \tag{28}$$

ahol az Ω tartományon harmonikus ϕ függvény értelmezése:

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{1}{4(1-\nu)}\int_0^1 t^{4(1-\nu)}\vec{x}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}(t\vec{x})dt. \tag{29}$$

$\square$

A 3.5 Tételhez hasonló reprezentációs eredményeket vezetünk le kétdimenziós tartományok esetére is.

3.6 Tétel *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ egy tetszőleges tartomány és legyen $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu \neq \frac{1}{2}, 1$. A $\vec{v} \in C_2(\Omega)$ és $p \in C_1(\Omega)$ függvények pontosan akkor elégítik ki* (25) *összefüggéseket, ha létezik olyan $\vec{h} \in C_2(\Omega)$ harmonikus függvény, amelyre*

$$\vec{v}\,(\vec{x}) = -\frac{1}{2}\left(\vec{x}\,\mathrm{div}\,\vec{h}\,(\vec{x}) + \vec{x}^{\perp}\,\mathrm{rot}\,\vec{h}\,(\vec{x})\right) + (1-2\nu)\vec{h}\,(\vec{x})\,, \tag{30}$$

$$p\,(\vec{x}) = -2\,\mathrm{div}\,\vec{h}\,(\vec{x})\,,\ \textit{ahol}\ \vec{x} \in \Omega; \tag{31}$$

ez a harmonikus függvény egyértelműen meghatározott, mégpedig

$$\vec{h}\,(\vec{x}) = \frac{1}{1-2\nu}\left(\vec{v}\,(\vec{x}) - \frac{1}{4}\left(p\,(\vec{x})\,\vec{x} - \frac{1}{1-\nu}\vec{x}^{\perp}\,\mathrm{rot}\,\vec{v}\,(\vec{x})\right)\right),\ \textit{ahol}\ \vec{x} \in \Omega. \tag{32}$$

□

3.7 Megjegyzés A (30) és (31) képletek átírhatóak olyan komplex alakba, amelyek ekvivalensek a 2. részben használtakkal. □

Befejezésül összefüggéseket fogalmazunk meg a kétdimenziós illetve háromdimenziós reprezentációs eredmények között.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Dr. Stoyan Gisbert Professzor Úrnak, a témafelvetést, valamint a munkám során adott folyamatos támogatást és bátorítást.

References

[1] Adams R.A., Sobolev Spaces, Pure and Appl. Math. 65., Academic Press, New York (1975)

[2] Aharonov D., Shapiro H.S., Domains in which analytic functions satisfy quadrature identities, J. Analyse Math. 30 (1976), 39–73.

[3] Aristov P.P. and Chizhonkov E.V., On the constant in the LBB condition for rectangular domains. Report No. 9534, Dept. Math., Univ. of Nijmegen, Sept. 1995.

[4] Arushanyan I.O. and Chizhonkov E.V., Numerical investigation of the constant in the inf-sup inequality using boundary integral equations. In: Packages of Programmes for Applications, V.A. Morozov, O.B. Arushanyan (eds.), Editing House of Moscow Univ., 1997, 49–59.

[5] Babuška I., The finite element method with Lagrangian multipliers, Numer. Math. 20. (1973), 179–192.

[6] Bergman S., Schiffer M., Kernel functions and conformal mapping, Composition Math. 8. (1951), 205–249.

[7] Bourdon P.S., Density of the polynomials in Bergman spaces, Pacific Journal of Mathematics 130, No. 2 (1987), 215–221.

[8] Brezzi F., On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers, R.A.I.R.O. Anal. Numer. 8. (1974), 129–151.

[9] Brezzi F., Fortin M., Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer, New York, (1991).

[10] Chizhonkov E.V., On the constant in the LBB condition for ring domains. Report No. 9537, Dept. Math., Univ. of Nijmegen, Sept. 1995.

[11] Chizhonkov E.G., On spectral properties of the pressure operator induced by the Stokes equations. In: Proceedings of the Conference in memory of the 175th birthday of P.L. Chebyshev, v. 2. Editing House of the Mech.-Math. Faculty of Moscow Univ., 1996, 363–366.

[12] Chizhonkov E.V. and Olshanskii M.A., On the domain geometry dependence of the LBB condition. Math. Modell. Numer. Analysis 34, 5 (2000), 935–951.

[13] Costabel M. and Dauge M.: On the Cosserat spectrum in polygons and polyhedra, IRMAR Conference Lausanne 2000.

[14] Crouzeix M., Étude d'une méthode de linéarisation. Résolution numérique des équations Stokes stationnaires. In: Cahier de l'INRIA 12, 1974, 139–244.

[15] Crouzeix M., On an operator related to the convergence of Uzawa's algorithm for the Stokes equation. In: Computational Science for the 21st Century (J. Périaux et al., eds.). New York: Wiley 1997, 242–249.

[16] Dobrowolski M., On the LBB constant on stretched domains, Mat. Nachr.(2003), 254–255, 64–67.

[17] Dobrowolski M., On the LBB condition in the numerical analysis of the Stokes equations, Appl. Numer. Math. 54, No. 3-4 (2005), 314–323.

[18] Dobrowolski M., Stoyan G., Algebraic and discrete Velte decompositions, BIT 41(3). (2001), 465–479.

[19] Duren P.L., Theory of H^p spaces, Pure and Appl. Math. 38., Academic Press, New York (1970)

[20] Duren P.L., Univalent Functions, Springer-Verlag, New York (1983)

[21] Friedrichs K., On certain inequalities and characteristic value problems for analytic functions and for functions of two variables. Trans. AMS 41 (1937), 321–364.

[22] Garabedian P.R., A partial differential equation arising in conformal mapping, Pacific J. Math. 1(1951), 485–524.

[23] Garcia S.R., Means of unitaries, conjugations, and the Friedrichs operator, J. Math. Anal. Appl. 335 (2007), 941–947.

[24] Gaultier M., Lezaun M., Quelques propriétés du spectre de l' opérateur $-\operatorname{div}(-\Delta)^{(-1)}\nabla$ dans L^2, C.R. Acad. Sci.(Paris) 315 (1992), 321–364.

[25] Girault V., Raviart P.A., Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Springer, New York (1986)

[26] Horgan C.O. and Payne L.E., On inequalities of Korn, Friedrichs and Babuška-Aziz. Achive Rat. Mech. Anal. 82 (1983), 165–179.

[27] Jakobsson S., The harmonic Bergman kernel and the Friedrichs operator, Ark. Mat., 40 (2002), 89–104.

[28] Kellogg O.D., On the derivatives of harmonic functions on the boundary, Trans. Amer. Math. Soc. 33(2)(1931), 486–510.

[29] Kratz W., On the representation of Stokes flows, SIAM J. Math. Anal. 22(1991)2, 414–423.

[30] Kratz W., Lindae A., A representation formula for three-dimensional Stokes flows, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen 11(1992)3, 371–375.

[31] Kratz W. and Peyerimhoff A., A numerical algorithm for the Stokes problem based on an integral equation for the pressure via conformal mappings, Numerische Mathematik 58 (1990), 255–272.

[32] Ladyzhenskaya O.A., The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, Gordon and Breach, New York (1969).

[33] Lin P., Rochberg R., On the Friedrichs operator, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 3335–3342.

[34] Maday Y., Meiron D., Patera A.T., Ronquist E.M., Analysis of iterative methods for the steady and unsteady Stokes problem: application to spectral element discretizations, SIAM J. Sci. Comput. 14 (1993), 310–337.

[35] Mikhlin S.G., The spectrum of the operator pencil of elasticity theory, Uspekhi Mat. Nauk 28, No. 3 (171), (1973), 43–82.

[36] Nečas J., Equations aux Dérivées Partielles, Presses le l'Université de Montreal, (1965).

[37] Nehari Z., Conformal Mapping. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1952.

[38] Neuber H., Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie, Z. Angew. Math. Mech. 14(1934), 203–212. (German)

[39] Putinar M., Shapiro, H.S., The Friedrichs operator of a planar domain, Oper. Theory Adv. Appl.,113 , Birkhäuser Verlag, Basel (2000), 303–330.

[40] Putinar M., Shapiro, H.S., The Friedrichs operator of a planar domain II, Oper. Theory Adv. Appl.,127 , Birkhäuser Verlag, Basel (2001), 519–551.

[41] Razali M. R. M., Nashed M. Z. and Murid A. H. M., Numerical conformal mapping via the Bergman kernel, Journal of Computational and Applied Mathematics 82 (1997), 333–350.

[42] Sakai M., Null quadrature domains, J.Analyse Math 40 (1981), 144–154.

[43] Sakai M., Quadrature domains, Lecture Notes in Math. 934, Springer-Verlag (1982), 287–331.

[44] Shapiro H.S., Unbounded quadrature domains, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag (1987), 287–331.

[45] Stoyan G., Towards discrete Velte decompositions and narrow bounds for inf-sup constants, Computers & Maths. with Appls., 38, 7-8, (1999), 243–261.

[46] Stoyan G., Iterative Stokes solvers in the harmonic Velte subspace, Computing 67 (2000), 13–33.

[47] Stoyan G., $-\Delta = -\operatorname{grad}\operatorname{div} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}$ for matrices, with application to the finite element solution of the Stokes problem, East-West J. Numer. Math. 8., (2000) 323–340

[48] Stoyan G., Strauber Gy., Baran Á., Generalizations to discrete and analytical Crouzeix-Velte decompositions, Numerical Linear Algebra, 11 (2004), 565–590.

[49] Velte W., On optimal constants in some inequalities. In: The Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Methods (Heywood J.G. et al., eds.). Lecture Notes in Math. 1431. Springer-Verlag Berlin 1990, 158–168.

[50] Velte W., On inequalities of Friedrichs and Babuška-Aziz, Meccanica 31 (1996), 589–596.

[51] Warschawski S., Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung (in German), Math. Zeitschrift 35 (1932), 21–456.

[52] Zimmer S., Rand-Druckkorrektur für die Stokes-Gleichung, Thesis, Techn. Univ. München, 1996.

[53] Zsuppan S., On the spectrum of the Schur complement of the Stokes operator via conformal mapping, Methods and Applications of Analysis, Vol.11, No.1 (2004), 133–154.

[54] Zsuppan S., On connections between the Stokes-Schur and the Friedrichs operator, with applications to the inf-sup problem, Annales Univ. Sci. Budapest., 48.(2005), 151–171.

[55] Zsuppan S., On representations of Stokes flows and of the solutions of Naviers equation for linear elasticity, Analysis, Vol. 28, Issue 2 (2008), 219–237.