

# Végesméret-effektusok kétdimenziós kvantumtérelméletekben

A sine–Gordon-modell csavart, kétfrekvenciás- és  
szuperszimmetrikus változatainak vizsgálatával

DOKTORI ÉRTEKEZÉS TÉZISEI

Wágner Ferenc

ELTE Elméleti Fizikai Tanszék

2009.

ELTE Fizika Doktori Iskola  
(vezető: Horváth Zalán egyetemi tanár, akadémikus)

Részecskefizika és csillagászat program  
(vezető: Csikor Ferenc egyetemi tanár)

Témavezetők: Palla László fiz. tud. dokt., egyetemi tanár  
ELTE Elméleti Fizikai Tanszék  
Bajnok Zoltán fiz. tud. kand., tudományos főmunkatárs  
MTA Elméleti Fizikai Tanszéki Kutatócsoport  
Takács Gábor MTA dokt., tudományos főmunkatárs  
MTA Elméleti Fizikai Tanszéki Kutatócsoport



# Bevezetés

A kvantumtérelméletek elméleti vizsgálatát technikai okokból többnyire végtelen térfogatban végezzük: a megoldáshoz vezető úton komoly segítséget jelenthet a határfeltételek hiánya vagy az egyszerű bázisválasztás lehetősége. A laboratóriumban viszont már nem engedhetjük meg magunknak tetszőlegesen nagy minták használatát, vagy lehet akár éppen az a célunk, hogy egy jelenséget kis méretekben, esetleg kifejezetten a rendszer méretének függvényében vizsgáljunk. Ezért gyakorlati szempontból rendkívül fontos, hogy a kvantumtérelméletek végesméret-effektusairól [1, 2] minél világosabb képünk legyen.

Bár távol eső területnek tűnik, mégis nagyon hasonló okokból játszanak fontos szerepet a véges térfogati effektusok a rácstérelméletben. Jelenleg a rácsok méretének oly mértékű növelése, mely lehetővé tenné például az S-mátrixok aszimptotikus állapotokon keresztüli direkt vizsgálatát, igen komoly technikai akadályokba ütközik. Kézenfekvő felhasználási területe tehát a rácstérelmélet az olyan módszereknek, melyek képesek — például — szórási amplitúdókat megadni valamilyen mennyiség térfogatfüggésének vizsgálata révén.

Egy  $3 + 1$  dimenziós kölcsönható kvantumtérelmélet egzakt megoldásait általában még végtelen térfogatban sem tudjuk előállítani, jellemzően egyes mennyiségek perturbációs sorai vannak csak a kezünkben. Ez hátráltatja a végesméret-effektusok vizsgálatát, hiszen egyrészt kizárja látókörünkben a különösen érdekes nemperturbatív jelenségeket, másrészt biztos összehasonlítási alap híján megnehezíti a véges térfogatban kapott eredmények értelmezését. Ezért különösen alkalmas alanyai ezeknek a vizsgálatoknak a teljesen integrálható elméletek, melyek spektrumáról és szórási amplitúdóiról egzakt analitikus információkkal rendelkezünk.

Dolgozatomban a jól ismert *sine-Gordon-modell*, egy teljesen integrálható  $1 + 1$  dimenziós kvantumtérelmélet különböző változatait vizsgálom. Az egyes változatok különféle megközelítéseket igényelnek, attól függően, hogy a szóban forgó deformáció teljesen integrálható marad-e (mint a csavart- vagy a szuperszimmetrikus modell esetében), hogy felfogható-e szóráselmélet perturbációjaként (mint a kétfrekvenciás modell), illetve, hogy véges vagy végtelen térfogatban végezzük-e a vizsgálatot. A különböző módszerek kombinált használatával nyert egységes kép részint bővíti a módszerek alkalmazhatóságára

vonatkozó tapasztalatainkat és igazol egyes korábbi sejtéseket, másrészt az érvényességi tartományok összekapcsolása révén új információkkal szolgál a már sokat vizsgált modellekről is.

## Alkalmazott módszerek

A *csonkított konform állapotér közelítés* (TCSA) egy numerikus módszer perturbált konform térelméletek véges térfogatú spektrumának vizsgálatára. Nem igényli a perturbált modell integrálhatóságát, ezért a sine–Gordon-modell mindhárom vizsgált deformációjára alkalmazható, ám közelítő numerikus módszer lévén a kapott eredmények értelmezése különös körültekintést igényel.

Teljesen integrálható modellek véges térfogatú spektruma vizsgálható a végtelen térfogatú spektrumleírásból kiindulva is. Nagy térfogatban a tömeges részecskék lényegében mindig távol vannak egymástól, emiatt pontszerűnek tekinthetők és energiaszintjeik térfogatfüggése kvantummechanikai módszerekkel vizsgálható az egzakt S-mátrix ismeretében.

Nem integrálható modellekben hasonló eredmények *formfaktor-perturbációszámítással* (FFPT) kaphatók, ha a kérdéses modell valamilyen integrálható modell perturbációjának tekinthető. Esetünkben a kétfrekvenciás sine–Gordon-modell ilyen, sőt, két perturbatív tartománnyal is rendelkezik a potenciálagok szerepének felcserélhetősége révén. Mivel azonban a modell egy különösen érdekes vonása, a fázishatár jelenléte perturbatív módszerekkel nem vizsgálható, annak megtalálására egyetlen lehetőségünk a TCSA marad.

## Eredmények

A sine–Gordon-modell különböző változatainak vizsgálatával a következő eredményeket értem el:

- A  $k$ -csavart sine–Gordon-modellre megmutattam [10], hogy a peremfeltételek megváltoztatása nem rontja el a sine–Gordon-modell integrálhatóságát, de a spektrumot jellegzetes módon megváltoztatja. Láthatóvá vált, hogy a  $k$ -függő degenerációk és a többrészecske-állapotok energiájának térfogatfüggése helyesen írható le a Klassen és Melzer által kifejlesztett [3] formalizmussal, és ezzel áttételesen ellenőriztem az S-mátrixra vonatkozó sejtést is. Másodsorban megmértem az exponenciális terek várható értékét a modell különböző vákuumaiban, és eredményeimmel alátámasztottam Lukyanov és Zamolodchikov [4] egzakt formuláját.
- A kétfrekvenciás sine–Gordon-modellben első lépésként ellenőriztem [11], hogy a formfaktor-perturbációszámítás és a TCSA azonos eredményeket

ad a modell két perturbatív tartományában.

- Közelebbről is megvizsgáltam az  $1/2$  frekvenciaarányú modellben Del-  
fino és Mussardo által megjósolt [5] másodrendű fázisátalakulást. Az iro-  
dalomban felbukkant [6] kételyekkel ellentétben úgy találtam, hogy bár  
az effektív potenciál összes legalacsonyabb rendű korrekciós tagja képes  
lenne a fázisátalakulást elsőrendűvé változtatni, a vizsgált esetben ez nem  
történik meg, azaz a TCSA pontosságán belül minden  $\beta$  paraméterér-  
tékre másodrendű marad az átalakulás. A spektrum részletes vizsgálata  
továbbá azt mutatta, hogy a legalacsonyabb állapotok egy Ising-típusú  
IR fixpont által meghatározottak. Az UV- és IR állapotok megfeleltetését  
az irodalomban található [6] sejtésekkel megegyezőnek találtam.
- Röviden kitértem az eredményeimnek ellentmondó szemiklasszikus meg-  
fontolások [12] kritikájára is. A finomabb numerikus analízis során két  
nagyágrenddel kizártam a [7] által adott jóslatokat, majd rámutattam  
az ott alkalmazott számítási módszer következetlenségeire.
- A szuperszimmetrikus sine–Gordon-modell vizsgálatát vákuumszerkeze-  
tének tisztázásával kezdtem [13]: a perturbált trikritikus Ising-modellre  
vonatkozó [8] érvelést adaptálva megmutattam, hogy a vákuum- és kink-  
szerkezet megfelel az S-mátrixra adott korábbi [9] sejtésnek.
- Ezt követően perturbált konform térelméleti keretben definiáltam a mo-  
dellt, és igazoltam, hogy a Lagrange-i leírással ellentétben ott nincs szük-  
ség a tisztán skalárpotenciált tartalmazó tag szerepeltetésére.
- Bár nagy térfogatokban kicsi az elérhető pontosság az UV divergenciák  
és az energialevágással rendkívül gyorsan növő állapotszám miatt, az  
IR spektrum minőségi jellemzőit és az első gerjesztések tömegarányait  
TCSA-ból helyesen kaptam meg, így az alacsonyan fekvő aszimptotikus  
állapotokat meg tudtam feleltetni az őket keltő konform térelméleti ope-  
rátoroknak.



# Irodalomjegyzék

- [1] M. Luscher, „Volume Dependence of the Energy Spectrum in Massive Quantum Field Theories. 1. Stable Particle States,” *Commun. Math. Phys.* **104** (1986) 177.
- [2] M. Luscher, „Volume Dependence of the Energy Spectrum in Massive Quantum Field Theories. 2. Scattering States,” *Commun. Math. Phys.* **105** (1986) 153–188.
- [3] T. R. Klassen and E. Melzer, „Kinks in finite volume,” *Nucl. Phys.* **B382** (1992) 441–485, [hep-th/9202034](#).
- [4] S. L. Lukyanov and A. B. Zamolodchikov, „Exact expectation values of local fields in quantum sine-Gordon model,” *Nucl. Phys.* **B493** (1997) 571–587, [hep-th/9611238](#).
- [5] G. Delfino and G. Mussardo, „Non-integrable aspects of the multi-frequency sine-Gordon model,” *Nucl. Phys.* **B516** (1998) 675–703, [hep-th/9709028](#).
- [6] M. Fabrizio, A. O. Gogolin, and A. A. Nersesian, „Critical properties of the double-frequency sine-Gordon model with applications,” *Nucl. Phys.* **B580** (2000) 647–687, [cond-mat/0001227](#).
- [7] G. Mussardo, V. Riva, and G. Sotkov, „Semiclassical particle spectrum of double sine-Gordon model,” *Nucl. Phys.* **B687** (2004) 189–219, [hep-th/0402179](#).
- [8] A. B. Zamolodchikov, „Fractional-spin integrals of motion in perturbed conformal field theory,” in *Fields, Strings and Quantum Gravity* (H. Guo, Z. Qui, and E. Tye, eds.), Gordon&Breach, 1984.
- [9] C. Ahn, „Complete S matrices of supersymmetric Sine-Gordon theory and perturbed superconformal minimal model,” *Nucl. Phys.* **B354** (1991) 57–84.

- [10] Z. Bajnok, L. Palla, G. Takacs, and F. Wagner, „The k-folded sine-Gordon model in finite volume,” *Nucl. Phys.* **B587** (2000) 585–618, [hep-th/0004181](#).
- [11] Z. Bajnok, L. Palla, G. Takacs, and F. Wagner, „Nonperturbative study of the two frequency sine-Gordon model,” *Nucl. Phys.* **B601** (2001) 503–538, [hep-th/0008066](#).
- [12] G. Takacs and F. Wagner, „Double sine-Gordon model revisited,” *Nucl. Phys.* **B741** (2006) 353–367, [hep-th/0512265](#).
- [13] Z. Bajnok, C. Dunning, L. Palla, G. Takacs, and F. Wagner, „SUSY sine-Gordon theory as a perturbed conformal field theory and finite size effects,” *Nucl. Phys.* **B679** (2004) 521–544, [hep-th/0309120](#).