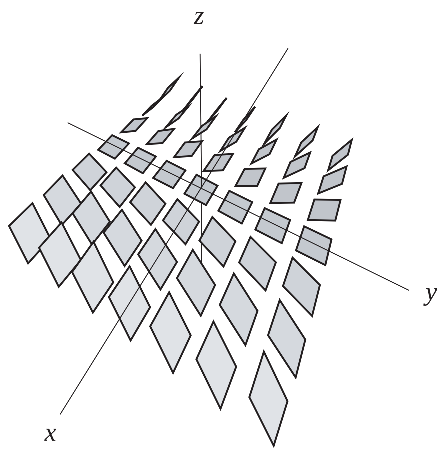
LEGENDRE- ÉS TRANSZVERZ-CSOMÓINVARIÁNSOK HEEGAARD–FLOER-HOMOLÓGIÁKBAN

VÉRTESI VERA

1. Bevezetés

A disszertáció az alacsony dimenziós topológia két fontos ágának, a Heegaard–Floer-homologiáknak és a kontakt struktúráknak a kapcsolatát vizsgálja.

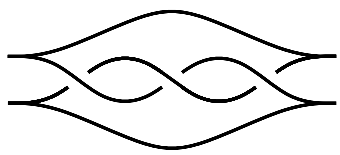
1.1. Kontakt struktúrák. Egy 3-sokaságon egy *kontakt struktúra* egy olyan síkmező az érintőterében, amely semmilyen környezetben sem érint felületet. A 3-dimenziós térben a standard kontakt struktúra a $dz + xdy$ 1-forma magjaként adható meg.



1. ábra. A standard kontakt struktúra: $\xi_{\mathrm{st}} = \ker dz + xdy$.

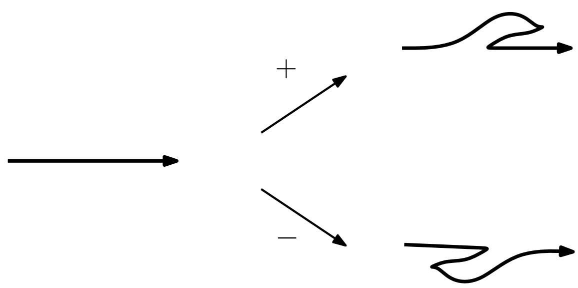
Minden 3-dimenziós sokaságon van kontakt struktúra. A beágyazott körlapok környezetében való viselkedés alapján kétféle kontakt struktúrát különböztetünk meg: túlcsavartakat és feszeseket. A túlcsavart kontakt struktúrák klasszifikálása pusztán homotópikus információk alapján megoldható [3], azonban egy adott sokaságon a feszes kontakt struktúrák klasszifikálása általában nehéz feladat. A Giroux-torziót tartalmazó kontakt struktúrák bizonyos értelemben köztes állapotot képeznek a feszes és túlcsavart kontakt struktúrák között. Egy kontakt struktúrának n a Giroux-torziója, ha van benne olyan beágyazott tórusz, amelynek a környezetében a síkok n egész fordulatot tesznek. A túlcsavart kontakt struktúrákban akármilyen nagy Giroux-torzió található. A kontakt struktúrák megkülönböztetéséhez hasznos az olyan alacsonyabb dimenziós részsokságok megértése, melyek valamilyen értelemben érzékelik a kontakt struktúrát. Ilyenek például a Legendre- illetve a transzverz csomók.

1.2. Csomók kontakt struktúrákban. Egy kontakt struktúrában egy csomó *Legendre-féle*, ha érintővektora a kontakt struktúrát definiáló síkmezőben van. A standard kontakt struktúrában a Legendre-csomók még egyszerűbben leírhatóak. A $dz + xdy$ forma pontosan akkor tűnik el egy csomó érintőjén, ha $x = -\frac{\partial z}{\partial y}$, azaz a standard kontakt struktúrában a Legendre-csomók megadhatóak az (y, z) síkra való vetületükkel.



2. ábra. A háromlevelű csomó egy Legendre-realizációjának vetülete.

A Legendre-csomók elméletének fő kérdése — a (sima) csomóelméletéhez hasonlóan — a következő: Mely Legendre-csomók izotópak Legendre-csomókon keresztül? A Legendre-csomók megkülönböztetésére két klasszikus invariánst vezettek be: a Thurston–Bennequin-számot és a rotációt. A különböző Legendre-csomókat legegyszerűbben ezen klasszikus invariánsok segítségével különböztethetjük meg. A stabilizáció egy olyan lokális művelet Legendre-csomókkal, amely mindkét klasszikus invariánst megváltoztatja.



3. ábra. A kétféle stabilizáció az (y, z)-síkra való vetületen.

Eliashberg és Fraser [4] belátták, hogy a klasszikus invariánsok elegendőek a triviális csomó összes Legendre-realizációjának megkülönböztetésére. Az ilyen csomóosztályokat, amelyek Legendre-reprezentánsaihoz a klasszikus invariánsok teljes invariáns rendszert alkotnak, *Legendre-egyszerűnek* nevezzük. Azóta további csomóosztályokról: a tóruszcsomókról és a nyolcascsomóról [7] is belátták hogy Legendre-egyszerűek. Az első áttörést Checkanov [2] ellenpéldája jelentette, mely szerint nem minden csomóosztály Legendre-egyszerű. Chekanov egy újabb Legendre-csomóinvariáns, egy gradált differenciálalgebra segítségével megmutatta, hogy a csavart csomók (köztük pl. az 5_2 csomó) sem Legendre-egyszerűek. Később több Legendre-nemegyszerű csomóosztályt is találtak [5, 13], az utóbbi konstrukció egy Heegaard–Floer-csomóhomológiabeli invariánst használ.

Egy csomó *transzverzális*, ha érintői transzverzálisak a kontakt síkokra. A transzverz csomók elláthatóak egy természetes irányítással, ha megköveteljük, hogy az érintői koirányítsák a kontakt síkokat. Egy Legendre-csomót a kontakt síkokkal transzverzális irányban kicsit eltolva egy transzverz csomót kapunk. Sőt, minden transzverz csomó közelében található Legendre-csomó. Ez az approximáció egy egy-a-sokhoz megfeleltetést ad a Legendre- és transzverz csomók között. Ennek segítségével transzverzális csomók leírhatóak a közelükben lévő Legendre-csomókkal; épp azok a Legendre-csomók approximálják ugyanazt a transzverz csomót, melyek néhány negatív stabilizálás után Legendre-izotópok lesznek. Az osztályozás kérdése a transzverz csomókra is hasonló: Mely transzverz csomók izotópak transzverz csomókon keresztül? Transzverz csomókra csak egy klasszikus invariáns van, az önhurkolódási szám. Egy csomó transzverz egyszerű, ha transzverz reprezentánsai az önhurkolódási szám segítségével megkülönböztethetőek. Mivel egy transzverz csomó leírható a közelében lévő Legendre-csomók segítségével is, ezért a Legendre-egyszerűségből következik a transzverz egyszerűség. Így a triviális csomó [4], a tóruszcsomók és a nyolcascsomó [7] transzverz egyszerűek is. A transzverz nemegyszerű csomók konstruálása lényegesen nehezebbnek bizonyult. Az első példákat fonatok segítségével Birman és Menasco adtak [1], majd konvex felületelméleti módszerekkel Etnyre és Honda [6] belátta, hogy a $(2,3)$ tóruszcsomó $(2,3)$-kábele nem transzverz egyszerű. Az utóbbi időben több transzverz nemegyszerű csomót konstruáltak Heegaard–Floer-homológiabeli invariánsok segítségével [14, 15].

2. Heegaard–Floer-homológiák

A közelmúltban Ozsváth és Szabó által definiált Heegaard–Floer-homológiák [17] egy új és az eddigieknél könnyebben alkalmazható eszközt szolgáltattak a 3-sokaságok és a csomók vizsgálatához. Az elmélet legegyszerűbb változata, $\widehat{HF}$ a Heegaard-felbontás segítségével egy gradált $\mathbb{Z}_2$-vektorteret rendel minden 3-sokasághoz. A Heegaard–Floer-homológia egy változata a Heegaard–Floer-csomóinvariáns [16], $\widehat{\mathrm{HFK}}$, mely tehát egy 3-sokaságbeli csomóhoz rendel homológiákat. Juhász [9] definiálta a két elmélet egy közös általánosítását, SFH-t, amely a konstrukció kiterjesztése bizonyos peremes 3-sokaságokra.

Ozsváth, Szabó és Thurston [18] definálták két invariánst, $\widehat{\lambda}^{+}$-t és $\widehat{\lambda}^{-}$-t a standard kontakt struktúrabeli Legendre-csomókra a $\widehat{\mathrm{HFK}}$ csoportban. A definíció kombinatorikus jellegű, a Legendre-csomók ügyes négyzetrácsra rajzolhatóságán múlik. Az egyik invariáns ($\widehat{\lambda}^{+}$) ugyanazt az értéket adja egy transzverz csomó minden Legendre-approximációjára, így definiálva egy $\widehat{\theta}$ transzverz invariánst is.

Lisca, Ozsváth, Stipsicz és Szabó [12] a kontakt invariáns definíciójának módosításával megadtak egy Legendre-csomóinvariánst ($\widehat{\mathcal{L}}$) szintén a Heegard–Floer-csomóhomológia csoportokban, amely már tetszőleges kontakt 3-sokaságban értelmes. Ugyanúgy, mint a fenti invariáns, ez is definiál egy transzverz invariánst is, melyet $\widehat{\mathcal{T}}$ jelöl.

Honda, Kazez és Matić [8] szintén a kontakt invariáns definíciójának módosításával adtak egy másik invariánst (EH) ezúttal a csomó komplementumának Heegard–Floer-homológiájában, SFH-ban.

3. Tézisek

A disszertációban a fenti kontakt csomóinvariánsokról szóló állítások segítségével láttam be tételeket Legendre- és transzverz csomókról.

A sima konstrukcióhoz hasonlóan a standard kontakt struktúrában definiálható Legendre-csomók összefüggő összege. Bebizonyítottam egy összefüggőösszeg-formulát a kombiantorikus Legendre-invariánsra:

1. **tézis.** *Legyenek L_1 és L_2 (irányított) Legendre-csomók. Ekkor a*

$$\widehat{\mathrm{HFK}}(m(L_1)) \otimes_{\mathbb{Z}_2} \widehat{\mathrm{HFK}}(m(L_2)) \to \widehat{\mathrm{HFK}}(m(L_1 \# L_2))$$

izomorfizmus, a $\widehat{\lambda}_+(L_1) \otimes \widehat{\lambda}_+(L_2)$-et $\widehat{\lambda}_+(L_1 \# L_2)$-be viszi. Hasonló állítás igaz a $\widehat{\lambda}_-$ invariánsra is. [P1]

Ugyanez igaz a kombinatorikus transzverz csomóinvariánsra is:

2. **tézis.** *Legyenek T_1 és T_2 transzverz csomók. Ekkor a*

$$\widehat{\mathrm{HFK}}(m(T_1)) \otimes_{\mathbb{Z}_2} \widehat{\mathrm{HFK}}(m(T_2)) \to \widehat{\mathrm{HFK}}(m(T_1 \# T_2))$$

izomorfizmus, a $\widehat{\theta}(T_1) \otimes \widehat{\theta}(T_2)$-et $\widehat{\theta}(T_1 \# T_2)$-be viszi. [P1]

A $\widehat{\theta}$ invariáns alkalmas csomók transzverz nemegyszerűségének belátására [14]. Például a 10_{132} csomónak vannak azonos önhurkolódású transzverz reprezentánsai, melyek egyikére $\widehat{\theta}$ eltűnik, a másikra pedig nem. Ez a tulajdonság a tenzorszorzás során megőrződik, így:

3. **tézis.** *Végtelen sok transzverz nemegyszerű csomóosztály van.* [P1]

Egy tetszőleges kontakt 3-sokaságbeli Legendre-csomóra két Legendre-csomóinvariánst is definiáltak, $\widehat{\mathcal{L}}$-et és EH-t. Ezen invariánsok nem is ugyanabban a homológiában vannak, és $\widehat{\mathcal{L}}$ irányított csomókra definiált, EH pedig nem érzékeny az irányításra. Így egy nemirányított csomóra $\widehat{\mathcal{L}}$ két invariánst is ad, míg EH csak egyet. Egy ragasztás által definiált leképezés megadja $\widehat{\mathcal{L}}$ és EH között a kapcsolatot:

4. **tézis.** *Egy L Legendre-csomó minden irányításához definálható egy*

$$\mathrm{SFH}(Y - \nu(L), \Gamma) \to \widehat{\mathrm{HFK}}(m(L))$$

homomorfizmus, mely $\mathrm{EH}(L)$*-et $\widehat{\mathcal{L}}$-be képezi.* [P2]

Ezen összefüggés segítségével elegáns módon újrabizonyítható, hogy hogyan változik a Legendre-invariáns pozitív illetve negatív stabilizálás során:

5. **tézis.** *Jelölje L^+ és L^- az L Legendre-csomó pozitív illetve negatív stabilizáltját, ekkor:* [P2]

$$\widehat{\mathcal{L}}(L^-) = \widehat{\mathcal{L}}(L) \qquad \textit{és} \qquad \widehat{\mathcal{L}}(L^+) = 0$$

Ismert volt, hogy ha egy Legendre-csomó komplementuma túlcsavart, akkor $\widehat{\mathcal{L}} = 0$, a leképezés segítségével egy erősebb eltűnési tétel is belátható:

6. **tézis.** *Ha egy Legendre-csomó komplementumában nemnulla a Giroux-torzió, akkor $\widehat{\mathcal{L}} = 0$.* [P2]

A tétel visszafelé is alkalmazható. Ha egyes Legendre-reprezentánsokat meg tudtunk $\widehat{\mathcal{L}}$ segítségével különböztetni, akkor a csomók komplementumán a kontakt struktúrákat megkülönböztetik az EH invariánsok:

7. **tézis.** *Az (n csavarú) csavart csomók komplementumán van legalább $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ különböző kontakt struktúra.* [P2]

4. További kutatási irányok

A Heegaard–Floer-homológiabeli Legendre- és transzverz-csomóinvariánsoknak még nagyon sok alkalmazása várható, a témában azóta is sok eredmény született. Kawamuro [10] fonatok segítségével is konstruált végtelen sok transzverz nemegyszerű csomók. A napokban Khandawit és Ng [11] mutatott végtelen sok transzverz-nemegyszerű prím csomót is.

Nagyon kevés csomóosztályról bizonyított, hogy Legendre-egyszerű. Azt sejtik, hogy pl. pozitív fonatok Legendre-egyszerűek. Be szeretném látni ennek a sejtésnek egy speciális esetét, mely szerint a pozitív fonatoknak pontosan egy maximális Thurston–Bennequin-számú reprezentánsa van.

A nem Legendre-egyszerű csomók Legendre-reprezentánsainak klasszifikálása általában nehéz feladat, és csak a $(2,3)$-tóruszcsomó $(2,3)$-kábelére megoldott [6]. A továbbiakban ki szeretném dolgozni a csavart csomók Legendre-osztályainak klasszifikálását.

Egy hosszabb távú kutatás során meg szeretném érteni a kéthidas csomók Legendre-osztályozását. Egy csomó kéthidas, ha beágyazható a térbe két-két szélsőértékkel. Ez a csomók egyik legegyszerűbb osztálya, de a válasz már ebben az esetben sem lesz triviális. Ugyanis léteznek nem transzverzálisan egyszerű kéthidas csomók [15], azonban a $(2,n)$-tóruszcsomók is kéthidasak, ezek pedig már Legendre-egyszerűek is.

A standard kontakt struktúrában mindhárom Legendre-invariáns értelmes, és ezek közül csak kettő kapcsolatát értjük. A kombinatorikus invariáns $\widehat{\lambda}_+$ és a Legendre invariáns $\widehat{\mathcal{L}}$ minden ismert tulajdonsága megegyezik, ezért azt sejtik, hogy meg is egyeznek. Ezt a sejtést szeretném belátni.

Publikációk

[P1] V. Vértesi. Transversely nonsimple knots. *Algebraic & Geometric Topology*, 8:1481–1498, 2008. arXiv:0712.2803v3.

[P2] A. Stipsicz and V. Vértesi. On invariants for Legendrian knots. *Pacific Journal of Math.*, 2008. arXiv:0806.1436v1.

HIVATKOZÁSOK

[1] J. S. Birman and W. M. Menasco. Stabilization in the braid groups II. Transversal simplicity of knots. *Geometry & Topology*, 10:1425–1452, 2006. math.GT/0310280.
[2] Y. Chekanov. Differential algebra of Legendrian links. *Invent. Math.*, 150(3):441–483, 2002.
[3] Y. Eliashberg. Contact 3–manifolds twenty years since J. Martinet's work. *Ann. Inst. Fourier*, (42):165–192, 1992.
[4] Y. Eliashberg and M Fraser. *Classification of topologically trivial Legendrian knots*, volume 15, pages 17–51. Amer. Math. Soc., Providence, Monteal, 1998. arXiv:0801.2553v1.
[5] J. Epstein, D. Fuchs, and M. Meyer. Chekanov-Eliashberg invariants and transverse approximations of Legendrian knots. *Pacific J. Math.*, 201(201):89–106, 2001. arXiv:math/0006112v1.
[6] J. B. Etnyre and K. Honda. Cabling and transverse simplicity. *Ann. of Math.*, 162(3):1305–1333, 2001. arXiv:math/0306330v2.
[7] J. B. Etnyre and K. Honda. Knots and contact geometry. I. Torus knots and the figure eight knot. *J. Symplectic Geom.*, 1(1):63–120, 2001. arXiv:math/0006112v1.
[8] K. Honda, W. Kazez, and G. Matić. The contact invariant in sutured Floer Homology. 2007. arXiv:0705.2828v2.
[9] A. Juhász. Holomorphic discs and sutured manifolds. *Algebraic & Geometric Topology*, 6:1429–1457, 2006. arXiv:math/0601443v2.
[10] K. Kawamuro. Connect sum and transversely non simple knots. 2008. math/08022585.
[11] T. Khandhawit and L. Ng. A family of transversely nonsimple knots. arXiv:0806.1887v2.
[12] P. Lisca, P. Ozsváth, A. Stipsicz, and Z. Szabó. Heegaard Floer invariants of Legendrian knots in contact 3-manifolds. 2008. arXiv:0802.0628v1.
[13] L. Ng. Legendrian Thurston-Bennequin bound from Khovanov homology. *Algebraic &. Geometric Topology*, 5:1637–1653, 2004. math.GT/0508649.
[14] L. Ng, P. Ozsváth, and D. Thurston. Transverse knots distinguished by knot Floer homology. *Algebraic &. Geometric Topology*, 5:1637–1653, 2004. math/0703446.
[15] P. Ozsváth and A. Stipsicz. Contact surgeries and the transverse invariant in knot Floer homology. arXiv:0803.1252.
[16] P. Ozsváth and Z. Szabó. Holomorphic disks and knot invariants. *Adv. Math.*, 186(1):58–116, 2004.
[17] P. Ozsváth and Z. Szabó. Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 159(3):1027–1158, 2004.
[18] P. Ozsváth, Z. Szabó, and D. Thurston. Legendrian knots, transverse knots and combinatorial Floer homology. arXiv:math/0611841v2.