

# Kockázati Mértékek Instabilitása

Doktori értekezés tézisei

**Varga-Haszonits István**

ELTE TTK Fizika Doktori Iskola

Statisztikus fizika, biológiai fizika és kvantumrendszerek fizikája program

Iskolavezető: Dr. Horváth Zalán, az MTA rendes tagja, egyetemi tanár

Programvezető: Dr. Kürti Jenő DSc, egyetemi tanár

Témavezető: Dr. Kondor Imre DSc, egyetemi tanár

ELTE TTK Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék



2009



## Bevezetés

A kockázat mérése és különféle feltételek melletti minimalizálása a pénzügyi elmélet talán legalapvetőbb és legnehezebb problémája. A dolog bonyolultságát jelzi, hogy a pénzügyi szakma különböző részvevői (tudósok, banki szakemberek és szabályozók) már a pénzügyi kockázat meghatározásában sem értenek egyet, és ennek megfelelően a szakirodalomban és a gyakorlatban alkalmazott kockázatfogalmaknak és kockázati mértékeknek se szeri se száma. Ráadásul a banki gyakorlatban és szabályozásban az akadémiai szféra többszöri nyomatékos figyelmeztetése ellenére is szinte kizárólag ad-hoc, elméletileg gyengén megalapozott kockázatmérési és -kezelési módszereket alkalmaznak. Ennek köszönhetően a gyakorlat és az elmélet fejlődése sajnálatos módon szétvált: a mindennapi pénzügyi élet egyre kevésbé vett tudomást a legújabb elméleti eredményekről, ugyanakkor a kockázat matematikai elmélete egyre kevésbé vette figyelembe a gyakorlati igényeket.

Nem fordult például kellő figyelem arra, miként teljesítenek ezek a módszerek abban az életszerű helyzetben, amikor a háttér folyamatok vagy legalábbis azok paraméterei nem ismertek, így befektetéseink kockázatát empirikus adatok alapján kell becsülnünk. A pénzügyi kockázat szakirodalmában általánosnak mondható az a megközelítés, amely a matematikai eleganciát, és az absztrakt elméleti megfontolásokat helyezi előtérbe, és (általában implicit módon) feltételezi a háttér folyamatok ismeretét. Ebben a megközelítésben a becslés problematikája mintegy másodlagos feladatként jelenik meg, amelyet mindenképpen meg kell előznie az elvont elméleti megalapozásnak.

Az értekezésben számos példán keresztül mutattuk meg, hogy ez a megközelítés alapjaiban téves. A kockázati mértékek mintavételi zajjal szembeni érzékenységét a portfólió-választási problémán keresztül vizsgáltuk meg, amely a pénzügyi matematika egyik alapfeladata. Részben a szakirodalomra, részben saját kutatási eredményeinkre alapozva számos különböző kockázati mérték zajérzékenységét megvizsgáltuk, és azt találtuk, hogy néhány elméleti és/vagy gyakorlati szempontból igen fontos kockázati mérték – az ún. kockázatotott érték, és a koherens kockázati mértékek – erősen és lényegükből fakadó módon instabilak. Mindezt elemi matematikai megfontolások alapján a kockázati mértékek igen széles körére sikerült belátnunk, megkérdőjelezve ezzel azok gyakorlati alkalmazhatóságát. Mindez egyértelműen arra utal, hogy a kockázatmérési módszerek elméleti megalapozása során a mintavételi hibával szembeni érzékenység kérdése elsődleges jelentőséggel bír.

A fenti vizsgálatok során numerikus szimulációk és elemi matematikai megfontolások mellett jórészt a rendezetlen rendszerek elméletében kidolgozott replika-módszerre támaszkodtunk, újabb példát szolgáltatva a módszer fizikán kívüli alkalmazhatóságára. A dolgozat végén röviden utaltunk rá, miként lehetne a dolgozatban bemutatott, a mintavételi zaj jellemzésére használt módszertant jóval általánosabb keretek között alkalmazni a különféle tudományágakban és szakterületeken kidolgozott modellek zajérzékenységének vizsgálatára.

## Alkalmazott módszerek

A különböző kockázati mértékek és árfolyam-eloszlások melletti portfólió optimalizációs problémák zajérzékenységének jellemzésére a  $q_0$  mennyiséget használtuk, amely a mintából becült optimális portfólió és a valódi optimális portfólió kockázatának hányadosa.  $q_0$  előnyei közé tartozik, hogy dimenziótlan, így alkalmas akár erősen eltérő modellek zajérzékenységének összehasonlítására is, továbbá a mérési hibát a befektetők számára igen könnyen értelmezhető formában jellemzi. A  $q_0$  mennyiség meghatározása mellett az optimum létezésének feltételeit, illetve annak valószínűségét is vizsgáltuk.

$q_0$  viselkedését illetve az optimum létezését egyrészt a replika-módszer, másrészt numerikus szimulációk segítségével végeztük. A véges mintán történő portfólió-optimalizációs feladat ugyanis formálisan ekvivalens egy olyan statisztikus fizikai problémával, amelyben a portfólió súlyok megfelelnek a rendszer általánosított koordinátáinak (pl. pozíció vagy spinek), a csatolási állandók pedig a véges mintából származtathatók. Mivel a minta, és azzal együtt a csatolási állandók véletlen változók, ezért a vizsgált probléma analóg a spinűvegek, illetve a rendezetlen rendszerek egyes modelljeivel (pl. a Sherrington-Kirkpatrick-moddal), így hatékonyan alkalmazható az ilyen rendszerek analitikus vizsgálatára kidolgozott replika-módszer.

Ahol azonban a modell bonyolultsága miatt a replika-módszer nem volt alkalmazható, vagy a replika-módszerrel kapott analitikus eredményeinket ellenőrizni akartuk, Monte Carlo szimulációt alkalmaztunk. Ennek lényege, hogy a véletlen mintákat egy előre rögzített eloszlásból saját magunk generáltuk, és a portfólió optimalizációt minden egyes mintára végrehajtottuk. Ennek megfelelően  $q_0$  alakulását, illetve az optimum létezését mintáról mintára nyomon követtük, és megbecsültük pl.  $q_0$  átlagát, vagy az optimum létezésének valószínűségét.

A dolgozat végén az egyes kockázati mértékekre vonatkozó speciális eredményeinket igen általános formában is megfogalmaztuk, itt elsősorban elemi matematikai módszerekre támaszkodtunk.

## Tézisek

1. A replika-módszer segítségével reprodukáltuk a klasszikus Markowitz-feladat mérési hibájának az  $N$  piacmérettől és a  $T$  mintamérettől való függését leíró  $q_0 = (1 - N/T)^{-1/2}$  formulát. Habár a végeredmény nem újdonság, annak replika-módszerrel történő levezetése még nem szerepelt az irodalomban. Mivel a klasszikus Markowitz-feladat tulajdonképpen a lehető legegyszerűbb portfólió-választási probléma, ezért annak replika-módszerrel történő jellemzése jó kiindulópontként szolgál a bonyolultabb kockázat-minimalizációs modellek (pl. veszteségoldali kockázati mértékek) elemzéséhez is.
2. A replika-módszer segítségével megvizsgáltuk néhány fontos veszteségoldali kockázati mérték (Value-at-Risk, Expected Shortfall, szemivariancia) minimalizációjának zajérzékenységét abban az esetben, ha a kockázatot parametrikus illesztéssel (és nem historikus módszerrel) becsüljük. (Más szóval az árfolyammozgások eloszlásának alakját előre feltesszük, és csak az eloszlás paramétereit becsüljük.) Megállapítottuk, hogy az Expected Shortfall historikus becsléséhez hasonlóan a veszteségoldali kockázati mértékek parametrikus becslése is instabil, és véges valószínűséggel bekövetkezhet, hogy az optimum nem létezik. A „termodinamikai” limeszben (amikor mind az értékpapírok  $N$  száma, mind pedig a minta  $T$  mérete végtelenhez tart, miközben az  $r = N/T$  arány rögzített) az  $r$  relatív mintaméret és a Value-at-Risk vagy Expected Shortfall  $\alpha$  konfidencia-szintje által kifizített paramétersík egy jól definiált kritikus görbe mentén két fázisra esik szét: a görbe alatti tartományban létezik optimum, fölötte pedig nem. Beláttuk továbbá, hogy a megoldható tartományból a fázishatár felé közeledve a mérési hiba a  $q_0 \sim (r_c - r)^{-1/2}$  módon divergál, ahol  $r_c$  az  $N/T$  kritikus (azaz a fázishatáron felvett) értéke. Kritikus viselkedése alapján tehát az itt vizsgált probléma vélhetően ugyanabba az univerzalitási osztályba tartozik, mint az irodalomban, illetve az értekezésben vizsgált egyéb portfólió-választási feladatok. További fontos következtetés, hogy a parametrikus becslés (várakozásoknak megfelelően) ugyan valamivel stabilabb, mint a historikus becslés, ugyanakkor továbbra is megengedi, hogy az optimum véges valószínűséggel ne létezzék, a fő problémát tehát nem oldja meg.
3. Mivel a független, azonos eloszlású, normális hozamingadozások feltételezése erősen leegyszerűsítő, ezért a portfólió-választás zajérzékenységét megvizsgáltuk a valamivel realiztikusabb GARCH-modellek (egész pontosan az ún. CCC-GARCH(1,1)-modell) alkalmazása mellett is. Numerikus módszerek felhasználásával megállapítottuk, hogy amennyiben a befektető tisztában van a GARCH-hatás jelenlétével (tehát ismeri a folyamat jellegét, de nem ismeri a paramétereit), akkor az optimalizáció becslésből származó hibája éppen a korábban megismert  $q_0 \sim (1 - N/T)^{-1/2}$  módon viselkedik. Ha azonban a befektető a GARCH-hatás jelenléte ellenére naiv módon független, gauss-i fluktuációkat feltételez, akkor a  $q_0$  hiba jóval nagyobb lesz, és  $T \rightarrow \infty$  esetben sem tart 1-hez. Ezek az eredmények tehát jó példát szolgáltatnak a téves modellspecifikációból eredő hiba potenciális nagyságára.

4. Elemi matematikai módszerekkel beláttuk, hogy a becült optimum létezésével kapcsolatos instabilitás nem csupán a fent vizsgált kockázati mértékek speciális jellemzője, hanem azok bizonyos alapvető tulajdonságaiból fakad. Így kiderült, hogy az elméletben és gyakorlatban alkalmazott kockázati mértékek igen nagy része (köztük a Value-at-Risk, és a pénzügyi matematikusok körében igen népszerű koherens mértékek) instabil, ami kérdésessé teszi a gyakorlati használhatóságukat. Az alkalmazott gondolatmenetből kiindulva a jövőben lehetővé válhat a kockázatmérés új, stabilabb technikáinak a kidolgozása.
5. Megállapítottuk továbbá, hogy az értekezésben alkalmazott módszertan nemcsak a portfólió-optimalizációs feladatok körében alkalmazható, hanem tanulmányozhatjuk vele például természéletes tudományterületen kidolgozott modellek véletlen mintával szembeni érzékenységét is, és alsó becslést adhatunk a várható hibára, illetve a modellillesztéshez használt idősor ajánlott hosszára. Ez a kapcsolat a portfólió-optimalizáció és a statisztikai becslés elmélete között továbbá lehetőséget nyújt arra, hogy a statisztikus fizika módszereit olyan területeken is hatékonyan alkalmazzuk, ahol eddig a hagyományos matematikai módszerek voltak az uralkodóak.

## Következtetések

- Az értekezés legfontosabb pénzügyi vonatkozású következtetése, hogy a kockázati mértékek elméleti megalapozása nem hagyhatja figyelmen kívül a kockázatmérés és -minimalizáció gyakorlati kérdéseit, például a véges mintából történő becslést. Ennek a kritériumnak sem a gyakorlatban alkalmazott, sem pedig az elméleti szakemberek által javasolt kockázati mértékek nem felelnek meg, a kockázatmérés gyökeresen új megközelítésére van tehát szükség.
- Ezen túlmenően kibővítettük a replika-módszer statisztikus fizikán túli, konkrétan pénzügyi alkalmazásainak körét, és a dolgozat végén megmutattuk, hogy a portfólió-választás problémakörén túllépve miként vihető át ez a módszertan a hagyományos matematikai statisztika területére.

## A tézisek alapjául szolgáló publikációk

- I. Varga-Haszonits and I. Kondor, *Noise Sensitivity of Portfolio Selection in Constant Conditional Correlation GARCH Models*, Physica A 385, p307-318 (2007)
- I. Varga-Haszonits and I. Kondor, *The Instability of Downside Risk Measures*, J. Stat. Mech. 12, P12007 (2008)
- I. Kondor and I. Varga-Haszonits, *Feasibility of Portfolio Optimization under Coherent Risk Measures*, arXiv:0803.2283v3 [physics.soc-ph], submitted to Quantitative Finance (2008)
- I. Kondor and I. Varga-Haszonits, *Divergent estimation error in portfolio optimization and in linear regression*, Eur. Phys. J. B 64, p601-605 (2008)