Szinguláris leképezések kobordizmusai

Doktori értekezés tézisei

Terpai Tamás

Iskolavezető: Dr. Laczkovich Miklós
Programvezető: Dr. Szenthe János
Témavezető: Szűcs András

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematika Doktori Iskola
Elméleti Matematika Program

2009

1. Bevezetés

A lokális szingularitáselmélet sima $(\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^{n+k}, 0)$ leképezéscsírák tulajdonságaival foglalkozik. Két csírát $\mathcal{A}$-ekvivalensnek mondunk, ha csak az ős-, illetve képtér sima átparaméterezésében különböznek egymástól. Egy ilyen ekvivalenciaosztályt (mono)szingularitásnak neveznek. A szingularitások teljes osztályozása jelenleg reménytelen, itt csak olyan esetekkel foglalkozunk, ahol az osztályozás már ismert.

A globális szingularitáselmélet sima sokaságok közti leképezések szinguláris helyeinek vizsgálatát foglalja magába. Ebből a szemszögből az is fontossá válik, hogy egy képpont teljes ősképén milyen a leképezés lokális viselkedése. Egy ilyen, több monoszingularitást tartalmazó leírást multiszingularitásnak neveznek.

Kellően általános helyzetben levő leképezés egy-egy mono- vagy multiszingularitáshoz tartozó pontjainak halmaza sokszor hordoz információt a leképezés, illetve az ős- és képsokaság egyéb tulajdonságairól. Ezen értekezés kiindulópontja az a kérdés, hogy egy adott leképezés esetén milyen akadálya lehet annak, hogy ezzel a leképezéssel valamilyen értelemben ekvivalens leképezések között legyen olyan, amely csak bizonyos (multi)szingularitásokkal rendelkezik.

A sokaságok közti leképezések vizsgálatánál az úgynevezett szinguláris bordizmus, illetve kobordizmus relációk szerinti osztályozásra törekszünk. Ez azt jelenti, hogy két leképezést akkor tekintünk ekvivalensnek, ha együttesen határát alkotják egy harmadik, peremes sokaságok közti leképezésnek, amelynek a (multi)szingularitásai csak egy előre meghatározott halmaz elemei lehetnek. Míg absztrakt – a leképezésekre vonatkozó megszorításokkal nem rendelkező – kobordizmus erejéig jól értjük a sima sokaságokat, finomabb osztályozásnál már a sokaságokat sem tudjuk praktikus módon áttekinteni és így a leképezések vizsgálata is nehézkes lenne.

2. Módszerek és eredmények

A bordizmus, illetve kobordizmus szerinti osztályozás vizsgálatánál az elsődleges eszközünk az általánosított Pontrjagin-Thom konstrukció [9], amely a kobordizmus csoportok kiszámolását tisztán homotópiaelméleti kérdéssé fogalmazza át. A konstrukcióban kulcsszerepet játszó klasszifikáló terek vizsgálata az értekezés fő témája.

2.1. Kobordizmuscsoportok

A szinguláris leképezéseket klasszifikáló terek általános konstrukciója [9] ezen tereket az egyes multiszingularitásoknak megfelelő blokkokból ragasztja össze. Ennek következményeként a keletkezett tér homotópiacsoportjait igen nehéz kiszámolni. Szűcs [16] belátta, hogy ha csak olyan multiszingularitáshalmazokra szorítkozunk, amelyek egy monoszingularitáshalmaz elemeiből alkotott összes lehetséges kombinációból áll, akkor ezek között egy úgynevezett „kulcsfibrálás" [16, Definition 109] áll fenn, amelynek segítségével már kezelhetők a klasszifikáló terek homotópiacsoportjai. Ennek a fibrálásnak a létezésére adunk egy szemléletesebb bizonyítást, amely általánosabb körülmények között is működik, mint az eredeti. Így például a pozitív kodimenziós esettel analóg szingularitáseltávolítási tételeket tudunk bizonyítani:

1 Tétel. *Legyen M egy 4-sokaság és P egy 3-sokaság. Ekkor bármely sima, generikus $f : M \to P$ leképezés kobordáns definit és indefinit fecskefarok szingularitással nem rendelkező generikus leképezéshez. Irányított M és P esetén a kobordizmus is választható irányítottnak.*

Vagy a τ halmazban megengedhetünk egy globális megszorítást is (vö. [16, Proposition 108]):

2 Tétel. *Legyen η a $k > 0$ kodimenziós leképezések egy monoszingularitása, τ' egy olyan multiszingularitáshalmaz, mely egy rögzített monoszingularitáshalmaz elemeinek összes kombinációjából áll, és tegyük fel, hogy $\eta \notin \tau'$, va-*

lamint $\partial\eta \subseteq \tau'$. Legyen továbbá $r > 0$ természetes szám esetén τ_r mindazon multiszingularitások halmaza, melyek egy τ'-beli multiszingularitásból és legfeljebb r darab η-ból állnak, és jelölje $\tilde{\Gamma}_r$ a legfeljebb r-szeres pontokkal rendelkező, normál $\tilde{\xi}_\eta$-struktúrájú immerziók klasszifikáló terét. Ekkor a természetes felejtő $X_{\tau_r} \to \tilde{\Gamma}_r$ leképezés Serre-fibrálás $X_{\tau'}$ fibrummal.

3 Következmény. *A fenti tétel feltételei mellett egy τ_r-leképezés pontosan akkor τ_r-kobordáns egy τ'-leképezéssel, ha az η-szinguláris halmaza nullkobordáns mint legfeljebb r-szeres pontokkal rendelkező normál $\tilde{\xi}_\eta$-struktúrájú immerzió.*

A kulcsfibrálás segítségével kiszámoljuk a hajtás (fold) leképezések – melyek csak reguláris, illetve a legegyszerűbb szinguláris pontokkal rendelkeznek – kobordizmuscsoportját az első két olyan esetben, amikor ez a csoport nem egyezik meg triviálisan az absztrakt kobordizmuscsoporttal.

4 Tétel ([20]). *Jelölje τ az összes reguláris és hajtás monoszingularitásokból álló multiszingularitás halmazát. Ekkor*

(a) *$k \geq 1$ esetén $Cob_\tau(2k+1, k) \cong \mathfrak{N}_{2k+1}$,*

(b$_1$) *$Cob_\tau^{SO}(5, 2) \cong \Omega_5 \oplus \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$,*

(b$_*$) *$m \geq 2$ esetén $Cob_\tau^{SO}(4m+1, 2m) \cong \Omega_{4m+1}$,*

(c) *$m \geq 1$ esetén $Cob_\tau^{SO}(4m-1, 2m-1) \cong \Omega_{4m-1} \oplus \mathbb{Z}_{3^t}$, ahol $t = \min\{j \mid \alpha_3(2m+j) \leq 3j\}$, és $\alpha_3(x)$ jelöli az x természetes szám 3-as számrendszerbeli számjegyeinek összegét.*

5 Tétel. *a) $Cob_\tau(2k+2, k)$ az $\mathfrak{N}_{2k+2}$ csoport 2 indexű részcsoportja, a $\bar{w}_{k+1}^2 + \bar{w}_{k+2}\bar{w}_k$ karakterisztikus szám nullhelye;*

b$_2$) $Cob_\tau^{SO}(6, 2) \cong 0$;

b$_*$) páros $k \geq 4$ esetén $Cob_\tau^{SO}(2k+2, k)$ az Ω_{2k+2} csoport 2 indexű részcsoportja, a $\bar{w}_{k+1}^2 + \bar{w}_{k+2}\bar{w}_k$ karakterisztikus szám nullhelye;

c) páratlan k esetén $Cob_\tau^{SO}(2k+2,k)$ az Ω_{2k+2} csoport valódi részcsoportja, melyet a $\bar{p}_{(k+1)/2}$ karakterisztikus szám eltűnése definiál.

Az első esetben a gondolatmenet kis módosításával kiadja a hajtás leképezések bordizmus csoportját is az összes (irányított) leképezés bordizmus-csoportjához [13] való viszonylatában:

6 Tétel. (a) *$k \geq 0$ esetén $Bord_\tau(2k+1,k) \cong \mathfrak{N}(2k+1,k)$,*

(b) *$m \geq 1$ esetén $Bord_\tau^{SO}(4m+1,2m) \cong \Omega(4m+1,2m)$,*

(c) *$m \geq 1$ esetén a következő sorozat egzakt:*

$$0 \to \mathbb{Z}_{3^u} \to Bord_\tau^{SO}(4m-1,2m-1) \to \Omega(4m-1,2m-1) \to 0;$$

itt u kielégíti a $0 \leq u \leq t$, $t = \min\{j \mid \alpha_3(2m+j) \leq 3j\}$, feltételt a 4 Tétel jelölését használva.

A bizonyítás során új példákat adunk olyan leképezésre, amelynek a cusp-helye mind az ősben, mind a képben nullhomológ (tehát a Thom polinom [17] segítségével a szinguláris hely nem érzékelhető), de nincs vele akár absztrakt módon kobordáns hajtás leképezés sem.

Hasonló eredményeket láthatunk be akkor is, ha a τ halmaz a reguláris, hajtás és cusp szingularitások összes kombinációjából áll, és az úgynevezett $III_{2,2}$ szingularitást (amely a 2 korangú szingularitások közül a legegyszerűbb) kell elkerülni a kobordizmusokban.

Ha az elkerülendő szingularitás dimenziója 1-nél nagyobb, a fenti tételek bizonyításában használt geometriai módszerek már nem adnak eredményt. Viszonylag kis dimenziók esetén azonban még geometriai jelentést tudunk adni a kiszámolandó obstrukcióknak, melyek $\pi_*(\Gamma T\tilde{\xi})$ alakú homotópiacsoportok elemei. Itt $\tilde{\xi}$ a szingularitáshoz tartozó univerzális képnyalábot [9] jelöli, ez írja le a szinguláris pontok globális viselkedését a képsokaságban. Rögzített r mellett jelölje $\mathcal{C}$ a véges, páratlan, $r+1$-hez relatív prím számokkal nem osztható rendű Abel-csoportok Serre osztályát, és legyen $\mathcal{C}^+$ a véges, $2(r+1)$-hez relatív prím számokkal nem osztható rendű Abel-csoportok osztálya. A $\cong_{\mathcal{C}}$ és $\cong_{\mathcal{C}^+}$ jelek a $\mathcal{C}$-beli, illetve $\mathcal{C}^+$-beli csoportok erejéig való izomorfizmust jelentik.

7 Tétel. *Legyen $\tilde{\tilde{\xi}}$ a $\Sigma^{1_r,0}$ Morin szingularitás univerzális képnyalábja, irányított vagy irányítatlan esetben. Adott $\kappa : \mathbb{S}^{n+k} \to T\tilde{\tilde{\xi}}$ leképezésre jelölje $M = M(\kappa) = \kappa^{-1}(0_{\tilde{\tilde{\xi}}})$ a $\tilde{\tilde{\xi}}$ nyaláb nullszelésének transzverzális ősét (az indukált irányítással, ha $\tilde{\tilde{\xi}}$ irányítható). Ekkor minden $0 \leq m < k$ esetén a következő állítások teljesülnek:*

- *Ha $\tilde{\tilde{\xi}}$ nem irányítható, $\pi_{m+rk+k+r}(\Gamma T\tilde{\tilde{\xi}}) \in \mathcal{C}^+$.*
- *Ha $\tilde{\tilde{\xi}}$ irányítható, $\pi_{m+rk+k+r}(\Gamma T\tilde{\tilde{\xi}}) \cong_{\mathcal{C}^+} \Omega_m$ és a $\mathcal{C}^+$-izomorfizmust M (absztrakt) irányított kobordizmus osztálya adja.*
- *Páros r és irányítatlan $\tilde{\tilde{\xi}}$ esetén $\pi_{m+rk+k+r}(\Gamma T\tilde{\tilde{\xi}}) \cong_{\mathcal{C}} \mathfrak{N}_m(\mathbb{R}P^\infty)$ és a $\mathcal{C}$-izomorfizmust a magnyalábbal ellátott M kobordizmus osztálya adja.*
- *Páros r és irányított $\tilde{\tilde{\xi}}$ esetén $\pi_{m+rk+k+r}(\Gamma T\tilde{\tilde{\xi}}) \cong_{\mathcal{C}} \Omega_m(\mathbb{R}P^\infty)$ és a $\mathcal{C}$-izomorfizmust a magnyalábbal ellátott M irányított kobordizmus osztálya adja.*

2.2. Bordizmuscsoportok

A szinguláris kobordizmuscsoportoknál valamivel jobban megközelíthetők a bordizmuscsoportok, ugyanis az általánosított Pontrjagin-Thom konstrukció ezeket a megfelelő klasszifikáló terek absztrakt bordizmuscsoportjaival azonosítja, és ezeket a blokk-konstrukció segítségével is lehet kezelni. Ráadásul kohomologikus obstrukciók keresésénél a klasszifikáló tereknél jóval egyszerűbb szerkezetű úgynevezett Kazarján tér vizsgálata is eredményre vezet, például segítségével meghatározhatjuk a cusp szingularitás elkerülő ideálját. Egy η szingularitás esetén η ($\mathbb{Z}_2$ együtthatós) elkerülő ideálja azon Stiefel-Whitney karakterisztikus osztályok halmaza, amelyek minden vektornyalábok közti sima, fibrumonként polinomiális, η-mentes leképezés virtuális normálnyalábján kiértékelve eltűnnek [4].

8 Tétel. *A $\Sigma^{1,1}$ szingularitás elkerülő ideálját mint $H^*(BO;\mathbb{Z}_2)$-ideált a következő halmaz generálja:*

$$\{w_{k+l}w_{k+m} + w_{k+q}w_{k+r} | l, m, q, r \geq 0 \text{ és } l + m = q + r \geq 2\}.$$

9 Következmény. *A $\Sigma^{1,1}$ szingularitás elkerülő ideáljának az elemei pontosan azok a $\sum\limits_{I\in\mathcal{I}} w_I$ alakú összegek, melyekre*

$$\sum_{I\in\mathcal{I}} c^S w_k^{|I^+|} w_{I\setminus I^+} = 0.$$

Itt $\mathcal{I}$ csak olyan I indexsorozatokat tartalmaz, melyekre $\max I > k$, I^+ jelöli az $\cup\{J \subseteq I | \min J > k\}$ részsorozatot és $S = \sum_{i\in I^+}(i-k)$.

Ezen eredmény alkalmazásaként közel optimális korlátokat kaphatunk például valós projektív terek euklideszi terekbe történő hajtás-leképezéseinek létezésére:

10 Tétel. *Legyen $n = 2^s + t$ nemnegatív egész s és $t < 2^s$ mellett. Ha létezik $\mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ hajtás-leképezés, és akkor*

- *ha $\frac{4}{3}2^s < n < 2^{s+1}$, akkor $k \geq 2^{s+1} - n - 2$.*
- *ha $2^s < n < \frac{4}{3}2^s$, akkor*
  - *$n = 2^u(8a+3) + b$ esetén, ahol $0 \leq b < 2^u$ és u maximális, $k \geq 2^{u+2}a + 2^u - b - 2$.*
  - *$\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor \not\equiv 3 \bmod 4$ minden $u \geq 0$ esetén*
    - *$k \geq \frac{n-3}{2}$ páratlan n-re, valamint*
    - *$k \geq \frac{n}{2} - 2^{p-1}$, ha $n = 2^p m$ páratlan m mellett.*

[16] egy mély eredményét, az úgynevezett Kazarján-sejtést felhasználva a hajtás-leképezések Kazarján terének homológiáiból kiszámoljuk a hajtás-leképezések irányítatlan bordizmuscsoportjait.

Végül a klasszifikáló tér elemzésével egy olyan helyzetben is meghatározzuk a szinguláris bordizmuscsoportokat, amikor csak egyszeres hajtásokat és korlátozott multiplicitású többszörös pontokat engedünk meg. Rögzített $k > 0$ kodimenzió mellett jelölje I_2 a hajtásból, illetve a legfeljebb kétszeres reguláris pontokból álló halmazt, legyen q_m az m nemnegatív egész k-nál nagyobb elemeket nem tartalmazó partícióinak száma, és legyen $d_m = \dim_{\mathbb{Z}_2} \mathfrak{N}_m$.

11 Tétel.

$$\dim Bord_{I_2}(n) = \sum_{s=0}^{n+k} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-k-s-1}{2} \right\rfloor} q_j q_{n-k-s-j} d_s + \sum_{s=0}^{n+k} \sum_{r=\left\lceil \frac{n-k-s}{2} \right\rceil}^{n-k-s-1} q_r d_s +$$
$$+ \sum_{s=0}^{n+k} q_{n-s} d_s + d_{n+k}$$

Hasonló explicit képletet kapunk koirányított leképezések I_2-bordizmuscsoportjára is, és ennek segítségével meghatározzuk az összes további irányítatlan, illetve koirányított I-bordizmuscsoportot minden olyan I halmazra, mely csak egyszeres hajtás és korlátozott multiplicitású reguláris többszörös pontokat tartalmaz. Irányított sokaságok közti leképezések esetén az I-bordizmus csoportokat racionálisan számoljuk ki.

Hivatkozások

[1] P. E. Conner, E. E. Floyd: Differentiable periodic maps, Bull. Amer. Math. Soc. 68/2 (1962), 76–86

[2] A. Dold: Erzeugende der Thomschen Algebra $\mathfrak{N}$, Math. Z. 65 (1956), 25–35

[3] P. J. Eccles: Characteristic numbers of immersions and self-intersection manifolds, Topology with applications (Szekszárd, 1993), Bolyai Soc. Math. Stud. 4, János Bolyai Math. Soc. (1995), 197–216

[4] L. Fehér, R. Rimányi: Calculation of Thom polynomials and other cohomological obstructions for group actions, Real and Complex Singularities (Saõ Carlos, 2002), Contemp. Math. 354 (2004), 69–93

[5] M. Kazarian: Characteristic classes in Singularity Theory, Moscow 2003, Habilitation Dissertation (in Russian), http://mi.ras.ru/~kazarian/papers/diser.ps

[6] M. Kazarian: Morin maps and their characteristic classes, http://mi.ras.ru/~kazarian/papers/morin.pdf

[7] I. Madsen, R. Milgram: The classifying spaces for surgery and cobordism of manifolds, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1979

[8] B. Morin: Formes canoniques des singularitiés d'une application différentiable, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) 260 (1965), 5662–5665

[9] R. Rimányi, A. Szűcs: Pontrjagin–Thom-type construction for maps with singularities, Topology 37 (1998), 1177–1191

[10] F. Ronga: The integral Thom polynomial for $\Sigma^{1,1}$, http://www.unige.ch/math/folks/ronga/

[11] P. A. Schweitzer: Joint cobordism of immersions, Lect. Notes in Math. 168 (1970), Springer Verlag, 267–282

[12] R. E. Stong: Normal characteristic numbers, Proc. Amer. Math. Soc. 130/5 (2002), 1507–1513

[13] R. E. Stong: Cobordism of maps, Topology 5 (1966), 245–258

[14] A. Szűcs: Cobordism groups of immersions with restricted self-intersections, Osaka J. Math. 21 (1984), 71–80

[15] A. Szűcs: Elimination of singularities by cobordism, Contemporary Mathematics 354 (2004), 301–324

[16] A. Szűcs: Cobordism of singular maps, Geometry & Topology 12(4) (2008), 2379–2452

[17] R. Thom: Les singularités des applications différentiables, Ann. Inst. Fourier 6 (1955-56), 43–87

[18] C. T. C. Wall: Cobordism of pairs, Comm. Math. Helv. 35 (1961), 136–145

[19] T. Yamamoto: Classification of singular fibres of stable maps from 4-manifolds to 3-manifolds and its applications, preprint at http://eprints.math.sci.hokudai.ac.jp/archive/00000073/

Publikációim

[20] T. Ekholm, A. Szűcs, T. Terpai: Cobordisms of fold maps and maps with prescribed number of cusps, Kyushu J. Math. 61/2 (2007), 395–414

[21] T. Terpai: Cobordisms of fold maps of $2k+2$-manifolds into $\mathbb{R}^{3k+2}$, Geometry and topology of caustics, Banach Center Publications vol. 82 (2008), 209–213

[22] T. Terpai: Calculation of the avoiding ideal for $\Sigma^{1,1}$, Algebraic Topology – Old and New, Banach Center Publications vol. 85 (2009), 307–313

[23] T. Terpai: Fibration of classifying spaces in the cobordism theory of singular maps, submitted to Proceedings of the Arnold-70 conference

[24] A. Szűcs, T. Terpai: Bordism groups of fold maps, submitted to Acta. Math. Hung.