A Doktori Értekezés Tézisei

Belsőpontos algoritmusok általános lineáris komplementaritási feladatokhoz

Nagy Marianna

Témavezető: Illés Tibor, PhD
Egyetemi docens

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Matematika Intézet,
Doktori Iskola

A Doktori Iskola vezetője:
Laczkovich Miklós egyetemi tanár,
a Magyar Tudományos Akadémia tagja

Alkalmazott matematika doktori program

A program vezetője:
Michaletzky György egyetemi tanár,
a Magyar Tudományos Akadémia doktora

A tézis az Eötvös Loránd Tudományegyetem Operációkutatási Tanszékén készült.

Budapest
2009. Május

Bevezetés

A doktori disszertáció a lineáris komplementaritási feladat belsőpontos algoritmusokkal történő megoldásával, vizsgálatával foglalkozik. A lineáris komplementaritási feladatot (LCP) a következő alakban tekintjük:

$$-M\mathbf{x} + \mathbf{s} = \mathbf{q}, \quad \mathbf{x}\,\mathbf{s} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0},$$

ahol $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. Az LCP feladat $\mathbb{NP}$-teljes [1], ha a feladat együtthatómátrixáról nem tudunk semmit. A szakirodalomból ismertek hatékony megoldó módszerek abban az esetben ha a feladat mátrixa eleme bizonyos speciális osztályok valamelyikének, mint például a kopozitív mátrixosztálynak a Lemke algoritmus esetén, vagy az elégséges mátrixoknak a criss-cross algoritmusnál, vagy pedig a $\mathcal{P}_*$ a belsőpontos algoritmusok esetén (az utolsó két mátrixosztályról ismert, hogy megegyezik). Mind a kopozitív, mind az elégséges mátrixok osztályához tartozó döntési problémák – a mátrix eleme-e ennek a mátrixosztálynak – szintén $\mathbb{NP}$-teljesek [5, 9]. Ebből kifolyólag egy tetszőleges LCP feladatot nem tudunk polinom időben megoldani még abban az esetben sem, ha a mátrixa rendelkezik az előbb említett speciális tulajdonságok valamelyikével, ugyanis nem tudjuk ezt polinom időben leellenőrizni.

Célunk polinomiális algoritmus megalkotása volt, mely valamilyen információval szolgál az LCP feladatról, természetesen a legjobb esetben megad egy megoldását. Ehhez a szakirodalomból már ismert $\mathcal{P}_*(\kappa)$-mátrixú LCP feladatokat megoldó belsőpontos algoritmusokat vettük alapul. A módosított algoritmusok futásideje polinomiális és három lehetséges módon állhatnak le: vagy megoldják a feladatot, vagy megoldják a duál feladatot – ezzel igazolva, hogy az eredeti feladatnak nincs megoldása – vagy pedig leállnak egy tanúval, mely azt bizonyítja, hogy a feladat mátrixa nem elégséges.

A motivációnk nem csak gyakorlati LCP problémák hatékony kezelése volt, hanem elméleti jellegű is. A módosított belsőpontos algoritmusok segítségével újfajta EP tételekre adtunk konstruktív bizonyítást.

A dolgozat két részre bontható. Az első részben főként már ismert eredményeket gyűjtöttünk össze a témával kapcsolatban. Itt a célunk egy áttekintést adni a második részben ismertetett saját eredmények alapjául szolgáló elméletről. Az első részben a bevezető fejezet végén összegyűjtött, LCP feladatra vezető, jól ismert problémákkal illusztráljuk, hogy valóban fontos lenne a gyakorlatban egy hatékony általános mátrixú LCP feladatokat kezelő algoritmus.

A második fejezetben az LCP feladatokkal kapcsolatos, számunkra fontos mátrixosztályokkal foglalkozunk. Itt a $\mathcal{P}_*(\kappa)$-mátrixokkal kapcsolatos néhány megfigyelés saját eredmény. Megállapítottuk, hogy a sajátértékek nem határozzák meg ezt a tulajdonságot, ugyanis van olyan mátrix, mely ebbe az osztályba tartozik, de megadtunk hozzá egy olyan mátrixot, melynek igaz, hogy sajátértékei megegyeznek az első mátrixéival, mégsem elégséges mátrix, sőt még nem is $\mathcal{P}_0$. Ezen kívül a $\kappa(\mathbf{x})$ függvény

$$\kappa(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4}\frac{\mathbf{x}^T M\mathbf{x}}{\sum_{i\in\mathcal{I}_+} x_i(Mx)_i},$$

mely egy adott $\mathbf{x}$ pontban megadja a definíció szerinti alsó korlátot κ értékére, azaz, hogy ha a mátrix elégséges, akkor a handicap értéke legalább mekkora, tulajdonságait vizsgáltuk. A belsőpontos algoritmusok csak lokálisan használják ki a $\mathcal{P}_*(\kappa)$ tulajdonságot, így nem érzékelik, hogy a feladat mátrixa nem elégséges, ha a lépések során olyan irányokkal számolunk, melyekre az előző korlát véges. Megmutattuk, hogy a $\kappa(\mathbf{x})$ függvény nem folytonos még elégséges mátrix esetén sem. Továbbá, hogy ha a mátrix nem oszlop elégséges, akkor a térnek biztosan van olyan pontja, ahol a $\kappa(\mathbf{x})$ függvény nem definiált, ha pedig oszlop, de nem sorelégséges, akkor a pontoknak van olyan sorozata, mely mentén a függvény a végtelenbe tart. A harmadik fejezetben a belsőpontos algoritmusok alapelméletét tekintjük át.

Duál lineáris komplementaritási feladat

A duál lineáris komplementaritási feladatot (DLCP) a következő alakban tekintjük:

$$\mathbf{u} + M^T\mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}^T\mathbf{z} = -1, \quad \mathbf{u}\,\mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}.$$

A duál megengedett megoldások halmazát jelölje:
$\mathcal{F}_D = \{(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \geq \mathbf{0} \ : \ \mathbf{u} + M^T\mathbf{z} = \mathbf{0},\ \mathbf{q}^T\mathbf{z} = -1\}$. Megmutattuk, hogy ha a feladat együtthatómátrixa sorelégséges, akkor a megengedett és a komplementáris megoldások halmaza megegyezik a duál feladat esetében.

1. Lemma. *Legyen M egy sorelégséges mátrix. Ekkor ha $(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \in \mathcal{F}_D$ teljesül, akkor $(\mathbf{u}, \mathbf{z})$ a DLCP feladat egy megoldása.*

A megengedett pontok halmazát lineáris feltételek írják le. Ismert, hogy a lineáris programozási feladatok megoldhatóak polinom időben, például belsőpontos algoritmussal, így a következő komplexitási eredményre jutottunk.

2. Következmény. *Legyen M egy sorelégséges mátrix. Ekkor a DLCP feladat polinomiális időben megoldható.*

Ezek az eredmények a következő EP tétel megfogalmazását teszik lehetővé, melyre konstruktív bizonyítást adtunk.

3. Tétel. *Bármely $M \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ és $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}^n$ esetén polinom időben megmutatható, hogy az alábbiak közül legalább az egyik teljesül:*

(i) *a DLCP feladatnak létezik* $(\mathbf{u}, \mathbf{z})$ *megengedett komplementáris megoldása, amelynek a kódolási mérete az* M *és* q *kódolási méretével polinomiálisan korlátozott.*

(ii) *az LCP feladatnak létezik* $(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ *megengedett megoldása, amelynek a kódolási mérete az* M *és* q *kódolási méretével polinomiálisan korlátozott.*

(iii) *az* M *mátrix nem sorelégséges, és ennek van olyan bizonyítéka, amelynek a kódolási mérete az* M *kódolási méretével polinomiálisan korlátozott.*

A szakirodalomban több LCP feladattal kapcsolatos EP tétel ismert, az első Fukuda, Namiki és Tamura nevéhez fűződik [3], továbbá Csizmadia és Illés adott konstruktív bizonyítást az LCP dualitás tételének EP tételes alakjára [2]. Ám ezen eredmények mindegyike a criss-cross algoritmuson alapszik, így csak a végesség, azaz a létezés bizonyítható ezen algoritmus segítségével, míg a mi esetünkben a polinomiális időben adott válasz is garantálható. Megjegyezzük, a fenti EP tételünk három állítása nem egyezik meg a másik két említett tétel három esetével. Az utóbbi tételekben a második esetben az LCP feladatnak is komplementáris megoldását adják meg, míg a harmadik esetben sorelégségesség helyett a szigorúbb elégségesség szerepel. Mi a duál feladat szemszögéből vizsgálódtunk. Az első esetben megoldjuk a duál feladatot, a második esetben az LCP feladat megengedett megoldása bizonyíték arra, hogy a duál feladatnak nincs megoldása, de nem tudunk semmit mondani arról, hogy az LCP feladatnak van-e komplementáris megoldása, míg a harmadik esetben sajnos egyik feladat megoldhatóságáról sem kapunk információt.

Elégséges mátrixú lineáris komplementaritási feladatok

A dolgozat ötödik fejezetében a Mizuno–Todd–Ye prediktor-korrektor algoritmus egy változatát általánosítjuk $\mathcal{P}_*(\kappa)$ mátrixszal adott LCP feladatokra. Itt végig feltesszük, hogy ismert egy induló belső pont, illetve egy nemnegatív κ, mellyel az LCP feladat mátrixa $\mathcal{P}_*(\kappa)$-mátrix. A fejezet alapjául Potra cikke [7] szolgált, melyben pozitív szemidefinit mátrixú LCP feladatokra fogalmazta meg és vizsgálta az algoritmust. Mizuno–Todd–Ye prediktor-korrektor algoritmus felváltva tesz prediktor, azaz affin lépést – melyben a dualitásrés minél nagyobb mértékben történő csökkentése a cél – illetve korrektor, azaz centráló lépéseket – ahol pedig egy teljes Newton lépéssel a szűkebb környezetbe történő visszatérés a cél. Ez a centrális út két környezetének megfelelő összehangolásával biztosítható. Az algoritmus általánosításának kulcskérdése az eljárás előbbi tulajdonságát szavatoló környezeti paraméterek meghatározása volt. A centrális út alábbi környezetét használtuk:

$$\mathcal{N}(\tau) := \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathcal{F}^+ : \ \left\| \sqrt{\frac{\mathbf{x}\mathbf{s}}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{\mathbf{x}\mathbf{s}}} \right\| \le \tau \right\},$$

ahol $\mathcal{F}^+$ az LCP feladat belső pontjainak halmaza. Jelölje τ a szűkebb, míg $\hat{\tau}$ a tágabb környezetet meghatározó paramétert, azaz $\tau > \hat{\tau} > 0$. Igazoltuk, hogy ha

$$\hat{\tau} < \frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{1+4\kappa}\sqrt[4]{2+\tau^2}} \tag{1}$$

egyenlőtlenség teljesül a két környezeti paraméterre, akkor a fenti tulajdonsága az algoritmusnak továbbra is fennáll. Ennek alapján a tágabb környezetet meghatározó paraméterre a következő felső korlát adható.

4. Lemma. *Legyen* $\tau < \sqrt{-1+\sqrt{1+\frac{16}{(1+4\kappa)^2}}}$*, ekkor létezik olyan* $\hat{\tau}$*, melyre* $0 < \hat{\tau} < \tau$*, továbbá teljesül a (1) egyenlőtlenség, és minden korrektor lépésben a teljes Newton lépés megengedett lesz.*

Ez a lemma rávilágít az általánosított Mizuno–Todd–Ye prediktor-korrektor algoritmus gyengeségére. A κ paraméter értéke hatással van τ és $\hat{\tau}$ a környezeti paraméterek nagyságára. Minél nagyobb κ értéke, annál szűkebbek lesznek azon τ és $\hat{\tau}$ környezetek, melyek esetén biztosítható, hogy a Mizuno–Todd-Ye prdiktor-korrektor algoritmus felváltva tegyen prediktor és korrektor lépéseket. Ebből kifolyólag κ értékének növekedtével romlik az algoritmus komplexitása.

A belsőpontos algoritmusok komplexitásvizsgálatának egyik fő lépése a Newton lépés hosszának alsó becslése. Esetünkben mint már említettük a korrektor lépésben teljes lépést lépünk, így csak a prediktor lépések hosszát kell vizsgálni.

5. Tétel. *A prediktor lépés* θ^* *maximális megengedett lépéshosszára a következő teljesül:* $\theta^* \geq \frac{\chi_n}{\sqrt{n}}$*, ahol*

$$\chi_n = 2\sqrt{\frac{\gamma}{m\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right)(1+4\kappa)}}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{n\,m\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right)(1+4\kappa)}+1}-\sqrt{\frac{\gamma}{n\,m\left(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\right)(1+4\kappa)}}\right) \tag{2}$$

korlátos mennyiség.

A lépéshosszra adott előző alsó korlát segítségével megbecsültük az új pont dualitásrését, majd erre támaszkodva az algoritmus lépésszámára felső korlátot adtunk. Meghatároztunk két megengedett környezeti paramétert, és ezek mellett az algoritmus komplexitását.

6. Tétel. *Tekintsük egy* $\mathcal{P}_*(\kappa)$*-mátrixszal adott LCP feladatot, ahol* $\kappa \geq 0$ *és legyen* $\mu_0 = 1$*,* $\tau = \frac{1}{1+4\kappa}$*,* $\hat{\tau} = \frac{\sqrt{2}}{1+4\kappa}$*. Ekkor a Mizuno–Todd–Ye algoritmus* $O((1+\kappa)^{\frac{3}{2}}\sqrt{n}\log\frac{n}{\varepsilon})$ *lépésben megad egy* $(\mathbf{x},\mathbf{s},\mu)$ *pontot, melyre a dualitásrés* $\mathbf{x}^T\mathbf{s} < \varepsilon$*.*

Általános mátrixú lineáris komplementaritási feladatok

Fő eredményeinket az utolsó fejezet tartalmazza. Az előző fejezetben két feltételezéssel éltünk: 1. ismert egy induló belső pont; 2. az LCP feladat együtthatómátrixa $\mathcal{P}_*(\kappa)$ egy előre ismert $\kappa \geq 0$ értékkel. Az első feltétel nem okoz nagy gondot, ugyanis vagy beágyazásos technikával, vagy pedig infizibilis belsőpontos algoritmus alkalmazásával kezelhető. Ezzel szemben a második feltevés túl erős. Nem ismert polinomiális algoritmus annak eldöntésére, hogy egy adott mátrix $\mathcal{P}_*(\kappa)$ tulajdonságú-e. Potra és Liu gyengített ezen a feltételen [8], ők már csak az elégségességet, azaz a véges κ érték létezését követelik meg. Ez szintén nem ellenőrizhető polinom időben, mint már említettük a bevezetőben.

Célunk az volt, hogy a belsőpontos algoritmusokat oly módon módosítsuk, hogy tetszőleges mátrixú LCP feladatokon polinom időben futó eljárásokat kapjunk. Mivel az általános esetben az LCP feladatok $\mathbb{NP}$-teljesek, nem várhatjuk, hogy egy polinomiális algoritmus minden esetben megoldást szolgáltasson. Ezért az algoritmusaink háromféleképpen állhatnak le: vagy megadják az LCP feladat egy megoldását, vagy megadják a duál feladat egy megoldását, vagy pedig egy tanút szolgáltatnak, mely igazolja, hogy a feladat mátrixa nem $\mathcal{P}_*(\tilde{\kappa})$, ahol $\tilde{\kappa}$ egy adott, de tetszőlegesen nagy érték. (Megjegyezzük, hogy itt a megoldás a belsőpontos algoritmusok elméletének megfelelően ε-optimális megoldást jelent, azaz olyan megengedett megoldást, melynek dualitásrése legfeljebb $\varepsilon > 0$ előre adott érték.)

Potráék az elégséges mátrixú LCP feladatok megoldása során kezdetben feltételezték, hogy a mátrix $\mathcal{P}_*(1)$. Majd minden iterációban ellenőrizték, hogy a kapott pont benne van-e a centrális út megfelelő környezetében. Ha az új pont nem volt benne a környezetben, akkor megduplázták a κ értékét. Mi finomítottuk ezt a módszert. Mivel minél nagyobb a κ értéke, annál rosszabb az algoritmus komplexitása, mi csak a szükséges növelést végezzük el (míg el nem érjük a $\tilde{\kappa}$ értéket).

A belsőpontos algoritmusok csak lokálisan használják ki a mátrix $\mathcal{P}_*(\kappa)$-tulajdonságát, csak a $\Delta\mathbf{x}$ Newton irányokra nézve. Például ez a tulajdonság biztosítja, hogy egy bizonyos lépéshosszal visszajussunk a centralis út megfelelő környezetébe és/vagy a komplementaritási rés csökkenésének mértéke elegendően nagy legyen. Tehát ha a kívánt tulajdonságok nem teljesülnek κ aktuális értékkel, akkor az új értékének a $\Delta\mathbf{x}$ Newton irány által definiált alsó korlátot választjuk, azaz a $\kappa(\Delta\mathbf{x})$ számot. Ha létezik olyan $\Delta\mathbf{x}$ vektor, melyre $\mathcal{I}_+(\Delta\mathbf{x}) = \emptyset$, és így $\kappa(\Delta\mathbf{x})$ nem definiált, akkor M, az LCP feladat mátrixa nem $\mathcal{P}_*$. Ekkor az algoritmus leáll a $\Delta\mathbf{x}$ vektorral, mint tanúval, mely igazolja, hogy M nem $\mathcal{P}_*$ mátrix.

A belsőpontos algoritmusok egy másik pontjánál is gondok jelentkezhetnek, ha a mátrix nem $\mathcal{P}_*$. Ha az M mátrix nem $\mathcal{P}_0$, akkor előfordulhat, hogy a Newton rendszernek nincs, vagy nem egyértelmű a megoldása. Ekkor az aktuális $(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ pont tanúsítja, hogy a mátrixunk nem $\mathcal{P}_0$, azaz egyúttal nem is $\mathcal{P}_*$.

Összegezve, három tesztet végzünk az algoritmusokban. Minden teszt során az M mátrix valamely tulajdonságát ellenőrizzük indirekt módon. Mikor a Newton rendszer megoldhatóságát és egyértelműségét vizsgáljuk, akkor azt ellenőrizzük, hogy a feladat mátrixa $\mathcal{P}_0$, vagy sem. Mikor az új pont bizonyos tulajdonságait vizsgáljuk – mint például hogy a centrális út megfelelő környezetében van-e – akkor a $\mathcal{P}_*(\kappa)$ tulajdonságot ellenőrizzük az adott κ értékre. Végül ha a $\kappa(\Delta\mathbf{x})$ érték nem definiált, akkor a mátrixunk nem $\mathcal{P}_*$. Megjegyezzük, hogy minden iterációban az említett tulajdonságokat csak lokálisan ellenőrizzük, az $\mathbb{R}^n$ tér egyetlen vektorára. Következésképp előfordulhat, hogy a feladat mátrixa nem $\mathcal{P}_*$ sőt még nem is $\mathcal{P}_0$ ám az algoritmus ezt nem veszi észre és polinom időben megoldja a feladatot, ugyanis a fenti tulajdonságok teljesülnek az algoritmus során előállított $\mathbf{x}$ pontokra és $\Delta\mathbf{x}$ irányokra. Továbbá az is megtörténhet, hogy a mátrixunk nem $\mathcal{P}_*$, ám az algoritmus ezt nem érzékeli. Csupán csak növeli a κ értékét, mikor $\kappa < \kappa(\Delta\mathbf{x})$. Ezért van szükségünk egy $\tilde{\kappa}$ felső korlátra, így biztosítva az algoritmus végességét.

Három jól ismert belsőpontos algoritmust módosítottunk: a hosszú-lépéses útkövető [6], az affin skálázású [4], illetve a prediktor-korrektor [8] belsőpontos módszereket.

Jelölje minden iterációban $\bar{\theta}$ az aktuális lépéshosszt a módosított algoritmus esetén. Továbbá, $\theta^*(\kappa)$ az eredeti algoritmusok komplexitás vizsgálatában bevezetett speciális megengedett lépéshossz.

Hosszúlépéses útkövető belsőpontos algoritmus

A hosszúlépéses útkövető algoritmus módosított verziója esetén minden iterációban megvizsgáljuk, hogy a centralitási mérték – centrális úttól vett távolság – elegendően nagy mértékben csökkent-e.

7. Lemma. *Ha egy belső iteráció során a centralitási mérték csökkenése nem elegendő, azaz* $\delta^2(\mathbf{xs}, \mu) - \delta^2(\mathbf{x}(\bar{\theta})\mathbf{s}(\bar{\theta}), \mu) < \frac{5}{3(1+4\kappa)}$, *akkor az LCP feladat mátrixa nem* $\mathcal{P}_*(\kappa)$ *az aktuális* κ *értékel, és a* $\Delta\mathbf{x}$ *Newton irány ennek egy bizonyítéka.*

Ha a csökkenés nem volt elegendő, akkor megnöveljük κ értékét $\kappa(\Delta\mathbf{x})$ szerint. Igazoltuk, hogy ekkor a módosított hosszúlépéses útkövető algoritmus komplexitása a következő.

8. Tétel. *Legyen* $\tau = 2$, $\gamma = 1/2$ *és* $(\mathbf{x}^0, \mathbf{s}^0)$ *egy megengedett belső pont, melyre* $\delta_c(\mathbf{x}^0\mathbf{s}^0, \mu^0) \leq \tau$. *Ekkor a módosított hosszúlépéses útkövető algoritmus legfeljebb* $\mathcal{O}\left((1+4\hat{\kappa})n \log \frac{(\mathbf{x}^0)^T\mathbf{s}^0}{\varepsilon}\right)$ *lépésben (ahol* $\hat{\kappa} \leq \tilde{\kappa}$ *az algoritmus futása során előforduló legnagyobb* κ *érték) vagy előállít egy* $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}})$ *pontot, melyre* $\hat{\mathbf{x}}^T\hat{\mathbf{s}} \leq \varepsilon$ *és* $\delta_c(\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mu}) \leq \tau$, *vagy szolgáltat egy tanút, mely igazolja, hogy az LCP feladat mátrixa nem* $\mathcal{P}_*(\tilde{\kappa})$.

Affin skálázású belsőpontos algoritmus

A módosított affin skálázású belsőpontos algoritmus esetén a dualitásrés csökkenését ellenőrizzük.

9. Lemma. *Ha* $\mathbf{x}(\bar\theta)^T\mathbf{s}(\bar\theta) > (1 - 0.25\,\nu\,\theta_a^*(\kappa))\,\mathbf{x}^T\mathbf{s}$*, azaz a dualitasrés csökkenés a* $\delta_a \leq \tau$ *környezetben nem megfelelő mértékű, akkor az LCP feladat* M *mátrixa nem* $\mathcal{P}_*(\kappa)$ *az aktuális* κ *értékre nézve. A* $\Delta\mathbf{x}$ *Newton irány tanúként szolgál erre.*

Hasonlóan a fentiekhez, ha a csökkenés nem megfelelő, akkor növeljük κ értékét. Továbbá, igazoltuk a módosított algoritmus polinomialitását.

10. Tétel. *Legyen* $(\mathbf{x}^0,\mathbf{s}^0) \in \mathcal{F}^+$*, melyre* $\delta_a(\mathbf{x}^0\mathbf{s}^0) \leq \tau = \sqrt{2}$*. Ekkor a módosított affin skálázású algoritmus legfeljebb*

$$\begin{cases} \mathcal{O}\left(\frac{n(1+4\hat\kappa)}{1-2^{-\rho}}\log\frac{(\mathbf{x}^0)^T\mathbf{s}^0}{\varepsilon}\right), & \textit{if } 0<\rho\leq 1 \textit{ és } n\geq 4 \\ \mathcal{O}\left(n(1+4\hat\kappa)\log\frac{(\mathbf{x}^0)^T\mathbf{s}^0}{\varepsilon}\right), & \textit{if } \rho = 1 \textit{ és } n\geq 4 \\ \mathcal{O}\left(2^{2\rho-2}n(1+4\hat\kappa)\log\frac{(\mathbf{x}^0)^T\mathbf{s}^0}{\varepsilon}\right), & \textit{if } 1<\rho \textit{ és } n \textit{ elegendően nagy} \end{cases}$$

iterációban vagy megad egy $(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{s}})$ *pontot, melyre* $\hat{\mathbf{x}}^T\hat{\mathbf{s}} \leq \varepsilon$ *és* $\delta_a(\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{s}}) \leq \tau$*, vagy egy polinomiális méretű tanúval áll le, mely igazolja, hogy a feladat mátrixa nem* $\mathcal{P}_*(\tilde\kappa)$*, ahol* $\hat\kappa \leq \tilde\kappa$ *a* κ *paraméter algoritmus futása során előforduló legnagyobb értéke.*

Prediktor-korrektor belsőpontos algoritmus

Mint már említettük, a prediktor–korrektor típusú eljárásoknak kétféle lépése van. Ennek megfelelően a módosított prediktor-korrektor algoritmus során két tesztet végzünk a Newton lépés hosszával kapcsolatban. Először a prediktor lépéshosszt vizsgáljuk.

11. Lemma. *Ha* $\bar\theta < \theta_p^*(\kappa)$*, akkor az* M *mátrix nem* $\mathcal{P}_*(\kappa)$ *mátrix és az affin Newton irány tanúként szolgál erre.*

A korrektor lépésben azt vizsgáljuk meg, hogy a $\theta_c^*(\kappa)$ lépéshosszal visszajutunk-e a centrális út megfelelő környezetébe.

12. Lemma. *Ha* $\theta_c^*(\kappa)$ *korrektor lépéshosszra* $(\bar{\mathbf{x}}(\theta_c^*(\kappa)),\bar{\mathbf{s}}(\theta_c^*(\kappa))) \notin \mathcal{D}(\gamma)$*, akkor az* M *mátrix nem* $\mathcal{P}_*(\kappa)$ *mátrix és a korrektor Newton irány tanúként szolgál erre.*

Végül megvizsgáltuk a harmadik módosított algoritmus komplexitását, és bebizonyítottuk, hogy ez szintén polinomiális eljárás.

13. Tétel. *Legyen* $(\mathbf{x}^0, \mathbf{s}^0) \in \mathcal{F}^+$, *melyre* $(\mathbf{x}^0, \mathbf{s}^0) \in \mathcal{D}(\gamma)$. *Ekkor a módosított prediktor-korrektor algoritmus legfeljebb*

$$\mathcal{O}\left((1+\hat{\kappa})n \log \frac{(\mathbf{x}^0)^T\mathbf{s}^0}{\varepsilon}\right)$$

lépésben (ahol $\hat{\kappa} \leq \tilde{\kappa}$ *az algoritmus futása során előforduló legnagyobb* κ *érték) vagy előállít egy* $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}})$ *pontot, melyre* $\hat{\mathbf{x}}^T\hat{\mathbf{s}} \leq \varepsilon$ *és* $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}}) \in \mathcal{D}(\gamma)$, *vagy egy tanúval tér vissza, mely igazolja, hogy az* M *mátrix nem* $\mathcal{P}_*(\tilde{\kappa})$.

A módosított belsőpontos algoritmusokra, illetve a fenti komplexitási eredményekre támaszkodva az alábbi EP típusú tételt fogalmaztuk meg.

14. Tétel. *Legyen adott egy tetszőleges* $M \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ *mátrix, egy* $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}^n$ *vektor és* $(\mathbf{x}^0, \mathbf{s}^0) \in \mathcal{F}^+$, *melyre* $\delta_c(\mathbf{x}^0\mathbf{s}^0, \mu^0) \leq \tau$. *Ekkor polinom időben igazolható, hogy a következő állítások közül legalább az egyik fennáll:*

(1) az LCP feladatnak létezik egy ε*-optimális* $(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ *megoldása, amelynek a kódolási mérete polinomiálisan korlátozott.*

(2) az M *mátrix nem* $\mathcal{P}_*(\tilde{\kappa})$ *mátrix, és ennek van olyan bizonyítéka, amelynek kódolási mérete polinomiálisan korlátozott.*

A fenti tétel belsőpont feltételét elhagyva kapjuk fő eredményünket. Erre szintén konstruktív bizonyítást adtunk. Elsőként a duál problémát próbáljuk meg megoldani. Ha a 3. Tétel második esete áll fenn, akkor valamely módosított belsőpontos algoritmust alkalmazzuk a beágyazott feladatra.

15. Tétel. *Legyen adott egy tetszőleges* $M \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ *mátrix és egy* $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}^n$ *vektor. Ekkor polinom időben igazolható, hogy a következő állítások közül legalább az egyik teljesül:*

(1) az LCP feladatnak létezik olyan ε*-optimális* $(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ *megoldása, amelynek kódolási mérete polinomiálisan korlátozott.*

(2) a DLCP feladatnak létezik olyan $(\mathbf{u}, \mathbf{z})$ *megengedett komplementáris megoldása, amelynek kódolási mérete polinomiálisan korlátozott.*

(3) az M *mátrix nem* $\mathcal{P}_*(\tilde{\kappa})$ *mátrix.*

A 15. Tétel a 14. Tétel általánosítása. Mivel a belsőpont feltevést elhagytuk, előfordulhat, hogy az LCP feladatnak nincs megoldása, habár az M mátrix elégséges. Ez a 15. Tétel második esete. A beágyazásnak köszönhetően a (3) állítás egyik esetében csak indirekt bizonyítékunk van. Ez az oka annak, hogy az utolsó állításban nem tudjuk biztosítani a polinomiális méretű explicit tanút. Tehát a 15. Tétel erősebb, mint a 14. Tétel, mivel a belsőpont feltételt elhagytuk, ám csak indirekt bizonyítékkal tudunk szolgálni az utolsó esetben. Kihangsúlyozzuk, hogy ezen EP tételek ereje a polinom időben adott válasz.

A dolgozat végén ismertetjük a módosított hosszúlépéses útkövető, illetve a prediktor-korrektor algoritmusok futási eredményeit az Arrow–Debreu piaci egyensúlyi probléma egy speciális feladatán. A módosított algoritmusok hatékonyságát a Ye és társai [10] által adott algoritmusokéval hasonlítottuk össze. A módosított algoritmusok versenyképesek kis feladatokon (legfeljebb 100 dimenziós). A módosított belsőpontos algoritmusok legfőbb előnye, hogy több különböző megoldást is megtalálnak. Továbbá, mi nem használtuk ki a feladat speciális struktúráját, csupán az induló pontok előállításánál, de ez helyettesíthető a beágyazásos technikával.

A módosított belsőpontos algoritmusok fejlesztésére több lehetőség is adott, mint például kifinomultabb induló pont generálás, vagy a megelőző futásokból nyert információ felhasználása. Elméleti oldalról pedig a belsőpontos algoritmusok Kikerekítési eljárását (hogyan határozható meg pontos megoldás egy ε-optimális megoldásból) szeretnénk megvizsgálni tetszőleges mátrix esetére, majd erre is megfogalmazni egy EP típusú tételt, így a 14. és 15. Tételekben az "ε-optimális megoldás" helyett "megengedett komplementáris megoldást" írhatnánk.

A tézis alapjául szolgáló dolgozatok

[1] T. Illés and M. Nagy. A Mizuno–Todd–Ye type predictor-corrector algorithm for sufficient linear complementarity problems. *European Journal of Operation Research,* 181(3):1097–1111, 2007.

[2] T. Illés, M. Nagy and T. Terlaky. An EP theorem for dual linear complementarity problems. *Journal of Optimization Theoryan Applications,* 140(2):233–238, 2009. http://www.springerlink.com/content/w3x6401vx82631t2/fulltext.pdf

[3] T. Illés, M. Nagy and T. Terlaky. A polynomial path-following interior point algorithm for general linear complementarity problems. *Journal of Global Optimization,* In print, accepted: 26 August 2008.
Online version: http://www.springerlink.com/content/547557t2077t2525/

[4] T. Illés, M. Nagy and T. Terlaky. Polynomial interior point algorithms for general linear complementarity problems. Submitted.

Hivatkozások

[1] S. J. Chung. NP-completeness of the linear complementarity problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 60(3):393–399, March 1989.

[2] Zs. Csizmadia and T. Illés. New criss-cross type algorithms for linear complementarity problems with sufficient matrices. *Optimization Methods and Software*, 2:247–266, 2006.

[3] K. Fukuda, M. Namiki, and A. Tamura. EP theorems and linear complementarity problems. *Discrete Applied Mathematics*, 84:107–119, 1998.

[4] T. Illés, C. Roos, and T. Terlaky. Polynomial affine–scaling algorithms for $P_*(\kappa)$ linear complementarity problems. In P. Gritzmann, R. Horst, E. Sachs, and R. Tichatschke, editors, *Recent Advances in Optimization*, number 452 in Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, pages 119–137. Proceedings of the 8-th French-German Conference on Optimization, Trier, July 21-26, 1996, Springer, 1997.

[5] K. G. Murty and S. N. Kabadi. Some NP-complete problems in quadratic and nonlinear programming. *Mathematical Programming*, 39:117–129, 1987.

[6] J. Peng, C. Roos, and T. Terlaky. New complexity analysis of primal–dual Newton methods for $P_*(\kappa)$ linear complementarity problems. In J.B.G. Frenk, C. Roos, T. Terlaky, and S. Zhang, editors, *High Performance Optimization Techniques*, pages 245–266, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[7] F. A Potra. The Mizuno-Todd-Ye algorithm in a larger neighborhood of the central path. *European Journal of Operational Research*, 143:257–267, 2002.

[8] F. A. Potra and X. Liu. Predictor-corrector methods for sufficient linear complementarity problems in a wide neighborhood of the central path. *Optimization Methods & Software*, 20(1):145–168, 2005.

[9] P. Tseng. Co-NP-completeness of some matrix classification problems. *Mathematical Programming*, 88:183–192, 2000.

[10] Z. Zhu and Y. Ye. A FPTAS for computing a symmetric Leontief competitive economy equilibrium. Technical report, Management Science and Engineering, Stanford University, February 2008. http://www.stanford.edu/~yyye/SymLeontief31.pdf.