A doktori értekezés tézisei

Parity problems of combinatorial polymatroids

(Kombinatorikus polimatroidok párosításai)

Makai Márton

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi kar

Doktori iskola: Matematika
A doktori iskola vezetője: Laczkovich Miklós

Doktori program: Alkalmazott matematika
A doktori program vezetője: Prékopa András

Témavezető: Zoltán Király, Ph.D.

MTA-ELTE Egerváry Jenő Kombinatorikus Optimalizálási Kutatócsoport

2009. február

1. Bevezetés

A kombinatorikus optimalizálás egyik legfontosabb területe a szubmoduláris függvények köré szerveződik. Egy másik terület a paritás szerepét vizsgálja. Fontos feladatok ezen területekről a matroid metszet feladat s a gráfok párosítási feladata. A hetvenes évek elején Lawler ezek közös általánosításaként vezette be a polimatroidok párosításait. Legyen $f : 2^S \to \mathbb{Z}_+$ egy polimatroid függvény és

$$\mathcal{P}(f) = \{x \in {\mathbb{R}_+}^S : x(U) \leq f(U) \text{ minden } U \subseteq S \text{ halmazra}\}$$

az általa definiált polimatroid, ahol $x(U) = \sum_{s \in U} x(s)$. Jobbára azzal a feltevéssel élünk, hogy az alaphalmaz véges, az egyedüli végtelen polimatroidok a lineárisak lesznek. A $\mathcal{P}(f)$ csupa páros koordinátájú egész vektorait *párosítás*oknak nevezzük, egy m párosítást pedig *legnagyobb*nak, ha maximalizálja $m(S)$-t. Egy $x \in {\mathbb{Z}_+}^S$ vektor rangja legyen $r_f(x) = \max\{y(S) : y \leq x : x \in \mathcal{P}(f)\}$. Ha $r_f(c) = f(S)$ egy c páros vektorra, akkor *fedés*nek nevezzük. Legyen

$$\begin{aligned} \nu(f) &= \max\{m(S)/2 : m \text{ párosítása } f\text{-nek}\}, \\ \varrho(f) &= \min\{c(S)/2 : c \text{ fedése } f\text{-nek}\}. \end{aligned}$$

A feladat $\nu(f)$ (ekvivalensen $\varrho(f)$) meghatározása jó karakterizáció és algoritmikus értelemben.

Amennyiben $\mathcal{M}_i$, $i \in \{1,2\}$ matroidok r_i rangfüggvényekkel, akkor az $r_1 + r_2$ polimatroid párosításai megfelelnek az $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ közös függetlenjeinek. Ha $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf, akkor legyen $q : 2^E \to \mathbb{Z}$, $q(F) = |\bigcup F|$ ahol $F \subseteq E$, azaz az F végpontjainak száma. Ekkor a G gráf párosításai megfelelnek a q polimatroid párosításainak.

Jensen és Korte [7] és Lovász [9] egymástól függetlenül bebizonyították, hogy $\nu(f)$ kiszámítása bonyolultságelméleti szempontból nehéz. Lovász [9] azonban megmutatta, hogy ha a polimatroid lineáris, akkor $\nu(f)$ jól karakterizálható, és algoritmust is adott a lineárisan reprezentált esetre. Nem nehéz látni, hogy $\nu(f) \leq \left\lfloor \frac{f(S)}{2} \right\rfloor$, $\nu(f|_{2^A}) \leq \sum_{j=1}^{t} \nu(f|_{2^{A_j}})$ ahol $A_1, \ldots, A_t$ az $A \subseteq S$ partíciója, és $\nu(f) \leq r_f(z) + \nu(f/z)$ ahol $z \in {\mathbb{Z}_+}^S$. Így $\nu(f)$ karakterizációja (ha van) a következő becsléseken alapul:

(1)

$$\nu(f|_{2^A}) \leq \min\left\{\sum_{j=1}^{t}\left\lfloor\frac{f(A_j)}{2}\right\rfloor : A_1,\ldots,A_t \text{ az } A \text{ partíciója}\right\},$$

(2)

$$\nu(f|_{2^A}) \leq \min\left\{r_f(z) + \sum_{j=1}^{t}\left\lfloor\frac{(f/z)(A_j)}{2}\right\rfloor : z \in {\mathbb{Z}_+}^S, A_1,\ldots,A_t \text{ az } A \text{ partíciója}\right\}.$$

Dupla kör tulajdonságú polimatroidokra egyenlőség áll (2)-ben (Dress és Lovász [2]). Az egyszerűbb (1) egyenlőtlenség is érdekes, a dolgozatban (és [13]-ben) ugyanis megmutatjuk, hogy a nemtriviális kompatibilis dupla körökkel nem rendelkező polimatroidokra itt egyenlőség áll. A disszertáció olyan új kombinatorikus polimatroidok osztályait vizsgálja, melyekre e két tulajdonság valamelyike teljesül. Az így kapott karakterizációkból számos érdekes gráfelméleti eredmény következik.

2. Néhány előzmény

Ebben a részben a megértéshez szükséges előzményeket tárgyaljuk. Az $x(S) - r_f(S)$ mennyiséget az $x \in \mathbb{Z}_+$ vektor *hiány*ának nevezzük. Az 1-hiányú vektorokat *virág*oknak, az olyan $c \in {\mathbb{Z}_+}^S$ 1-hiányú vektorokat melyekre $c - \chi_s \in \mathcal{P}(f)$ minden $s \in \operatorname{supp}(c)$-re *kör*öknek nevezzük. A 2-hiányú vektorokat *dupla virág*oknak, az olyan $y \in {\mathbb{Z}_+}^S$ 2-hiányú vektorokat melyekre $y - \chi_s$ minden $s \in \operatorname{supp}(y)$-ra 1-hiányú, *dupla kör*öknek nevezzük. Így minden x (dupla) virágra létezik egy egyértelmű $c \leq x$ (dupla) kör. Azt mondjuk, hogy az y dupla kör *kompatibilis (CDC)*, ha minden $s \in \operatorname{supp}(y)$-ra az $y - \chi_s$ egyértelmű körének tartója nem tartalmazza s-et. Ha y egy CDC, akkor $\operatorname{supp}(y)$-nek van egy egyértelmű $U_1, U_2, \ldots, U_d$ partíciója, melyre $y_i = y|_{\operatorname{supp}(y)-U_i}$, $i = 1,2,\ldots,d$ pontosan y körei. Amennyiben $d \geq 3$, akkor a CDC-t *nemtriviálisnak (NTCDC)* mondjuk. $\nu(f)$ karakterizációja a következő dekompozíción alapul:

2.1. Theorem (Lovász [9]). *Az $f : 2^S \to \mathbb{Z}_+$ polimatroid függvényre a következők legalább egyike igaz:*

(3i) $f(S) = 2\nu(f) + 1.$

(3ii) *Létezik egy* $S = S_1 \dot\cup S_2$ *partíció, hogy* $S_i \neq \emptyset$ *és* $\nu(f) = \nu(f|_{2^{S_1}}) + \nu(f|_{2^{S_2}})$.

(3iii) *Létezik olyan* $s \in \bigcap\{\mathrm{sp}_f(m) : \ m \text{ legnagyobb párosítás}\}$, *hogy* $f(s) > 0$.

(3iv) f*-nek van egy* x *páros nemtriviális kompatibilis dupla virágja, melyre* $x(S) = 2\nu + 2$.

Az első három esetben a feladat természetes módon dekomponálható kisebbekre. Az utolsó esetben azonban redukció csak bizonyos polimatroidosztályok elemeire lehetséges. Egy lehetséges követelmény a Dress és Lovász [2] által bevezetett *dupla kör tulajdonság (DCP)*. Azt mondjuk, hogy az f DCP tulajdonságú, ha

$$(f/z)\left(\bigcap_{i=1}^{d} \mathrm{sp}_{f/z}(y_i)\right) > 0 \tag{4}$$

teljesül az f minden f/z összehúzásának minden y NTCDC-jére.

2.2. Theorem (Lovász [9; 10; 11], Dress és Lovász [2]). *DCP polimatroidokra egyenlőség áll (2)-ben minden* $A \subseteq S$*-re. Legyen* $\mathcal{M}$ *matroid* E *alaphalmazzal,* $A \subseteq 2^E$*, továbbá* $f : 2^{E \cup A} \to \mathbb{Z}_+$, $f(F \cup B) = r_{\mathcal{M}}(F \cup \bigcup B)$ *ahol* $F \subseteq E$ *és* $B \subseteq A$*. Amennyiben* $\mathcal{M}$ *DCP tulajdonságú, akkor*

$$\nu(f|_{2^A}) = \min\left(f(Z) + \sum_{j=1}^{t}\left\lfloor\frac{(f/Z)(A_j)}{2}\right\rfloor\right), \tag{5}$$

ahol a minimum az összes $Z \subseteq E$ *halmazra és az* A *összes* $A_1, \ldots, A_t$ *partíciójára megy.*

Lovász bebizonyította, hogy ha egy lineáris polimatroid alaphalmaza tartalmazza a teljes lineáris teret, akkor a polimatroid DCP. Bár a kombinatorikus alkalmazásokban előforduló polimatroidok legtöbbször lineárisak, az így kapott min-max formula nem tükrözi a feladat kombinatorikus természetét, hisz Z bármilyen lineáris altér lehet. Ugyanakkor az is megeshet, hogy nem tudjuk determinisztikusan megadni a lineáris polimatroid egy reprezentációját olyan test fölött, ahol az elemi műveletek hatékonyan elvégezhetők.

A 6. rész kivételével (ahol NTCDC-mentes polimatroidokkal foglalkozunk) az az általános célunk, hogy alkalmazások által indukált új kombinatorikus polimatroidokat konstruáljunk melyek DCP tulajdonságú polimatroidba ágyazhatók, s e DCP polimatroidok kombinatorikusak, nem tartalmazzák a teljes lineáris teret.

3. (k,l)-matroidok

Teljes gráfok körmatroidjai és egy sűrűségi feltételt ([2; 9]) teljesítő transzverzális matroidok fontos DCP tulajdonságú matroidok. Ezek természetes általánosításai a következő (k,l)-matroidok. Az $\mathcal{M}_{k,l}(H)$ matroid alaphalmaza legyen a $H=(V,E)$ hipergráf élhalmaza, és $F \subseteq E$ független ha $|F'| \le k|\bigcup F'| - l$ minden $F' \subseteq F$-re.

Pszeudomodularitásból [1; 6] következik, hogy $\mathcal{M}_{k,l}(H)$ DCP tulajdonságú, ha $k = l = 1$ és H-ban van él minden pontpár közt, vagy ha $k=1$, $l=0$ és V minden részhalmaza hiperél elég nagy multiplicitással. Iwata egy homomorf képre vonatkozó konstrukciójával formula vezethető le a $k = l \ge 2$ esetre. Más (k,l)-ekre azonban nem ismeretes más megoldás mint a következő. [14]-ben megmutattuk, hogy ha H elég sűrű, akkor $\mathcal{M}_{k,l}(H)$ rendelkezik a DCP tulajdonsággal:

3.1. Theorem ([14]). *$\mathcal{M}_{k,l}(H)$ rendelkezik a DCP tulajdonsággal amennyiben*

(6) $\quad r_{\mathcal{M}_{k,l}(H)}(E[X]) = k|X| - l$ *teljesül minden* $X \subseteq V, k|X| - l \ge 0$ *halmazra.*

3.2. Theorem ([14]). *Legyen $l = ck + d$ ahol c, d egészek, $0 \le d < k$. Ekkor (6) teljesül, ha E tartalmazza*

(7i) V minden $c+1$ méretű részhalmazát legalább $k-d$ multiplicitással, és

(7ii) V minden $c+2$ méretű részhalmazát legalább $cd+d-ck$ multiplicitással.

A Berge-Tutte formulát és a transzverzális matroid párosítási formulát speciális esetként kapjuk. Nincs ez másként hipergrafikus matroidok párosításaira, melynek Lovász háromszögkaktuszos tétele egy speciális esete. A következő bekezdésekben a 3.1 és 3.2 tételek új alkalmazásait mutatjuk.

Ha $k=2$ és $l=3$, akkor a 2-dimenziós generikus merevségi matroidot kapjuk speciális esetként. Legyen $G=(V,E)$ irányítatlan gráf, $A_1 \subseteq \binom{E}{2}$, $A_2 \subseteq \binom{\binom{V}{2}}{2}$. Ha G generikusan merev, akkor $\nu(r_{\mathcal{M}}|_{2^{A_1}})$ a legnagyobb A_1 élpárjaiból álló halmaz elemszáma mely szerepelhet G egy minimálisan generikusan merev részgráfjában. Ha G nem generikusan merev, de $(V, E \cup \bigcup A_2)$ igen, akkor $\varrho(r_{\mathcal{M}/E}|_{2^{A_2}})$ az A_2 élpárjainak azon legkisebb számát adja, melyekkel G generikusan merevvé tehető.

Legyen újra $G=(V,E)$ irányítatlan gráf és $A \subseteq \binom{V}{2}$ extra élek egy halmaza. Mi azon legkisebb $B \subseteq A$ halmaz, hogy a G-ből B elemeinek összehúzásával kapott gráfnak van k él-diszjunkt feszítőfája? A válasz triviális $k=1$-re, NP-nehéz ha k az input része. Érdekes, hogy $k=2$-re a feladat (2,2)-matroid párosítására vezet.

A (k,l)-matroidok párosításainak vizsgálata a 3-dimenziós generikus merevségi matroidnak köszönhető. Nem ismerjük az utóbbi matroid rangjának jó karakterizációját, sem determinisztikus algoritmust a rang kiszámítására. Jackson és Jordán igazolta, hogy ha a $G=(V,E)$ gráfnak minden $X \subseteq V$, $|X| \geq 2$ élhalmaza legfeljebb $\frac{5|X|-7}{2}$ élet feszít, akkor E független a 3-dimenziós generikus merevségi matroidban. Tehát megadták a függetlenek halmazokának egy viszonylag nagy részét. A szóbanforgó élhalmazok karakterizációja (5,7)-matroidok párosítási feladata.

4. Tömör polimatroidok

Metsző szubmoduláris függvények reszelése természetes módon definiál polimatroidokat. A (k,l)-matroidok lényeges tulajdonságainak kiemelésével bevezethetünk DCP polimatroidok egy új osztályát, érdekes alkalmazásokkal. Az eredmények [13]-ből vannak.

(8i) Legyen S véges alaphalmaz, és $\emptyset \in \mathcal{L} \subseteq 2^S$ egy metszetképzésre zárt halmazrendszer, melyre $\bigcup \mathcal{L} = S$. Legyen továbbá $b : \mathcal{L} \to \mathbb{Z}_+$, $b(\emptyset) = 0$ egy halmazfüggvény a következő *metsző szubmodularitási* tulajdonsággal. Tegyük fel, hogy bármely $U_1, U_2 \in \mathcal{L}$, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, esetén van $\mathcal{L}$-nek egy $U_1 \vee U_2$-vel jelölt eleme amire $U_1 \cup U_2 \subseteq U_1 \vee U_2$, és

$$b(U_1) + b(U_2) \geq b(U_1 \cap U_2) + b(U_1 \vee U_2).$$

Ekkor $\widehat{b} : 2^S \to \mathbb{Z}_+$,

$$\widehat{b}(U) = \min_{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L} - \{\emptyset\},\ U \subseteq \bigcup \mathcal{F}} \sum_{U_i \in \mathcal{F}} b(U_i) \tag{9}$$

polimatroid függvény. Legyen $\mathcal{F}_U$ a (9)-ben egyenlőséget adó halmazrendszerek közül a „maximális”. Most következnek a DCP-t biztosító feltételek:

(8ii) Ha $U \in \mathcal{L} - \{\emptyset\}$, akkor $|\mathcal{F}_U| = 1$.

(8iii) Legyenek $U_1, U_2, U_3 \in \mathcal{L}$ olyan halmazok, hogy $b(U_{i,j}) > 0$ minden $U_{i,j} \in \in \mathcal{L}$, $U_i \cap U_j \subseteq U_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq 3$ esetén. Ekkor tegyük fel az $\mathcal{L}$ egy $\sqcup(U_1, U_2, U_3)$-vel jelölt elemének létezését, melyre $U_1 \cup U_2 \cup U_3 \subseteq \sqcup(U_1, U_2, U_3)$, és

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 3} b(U_i \cap U_j) + b(\sqcup(U_1, U_2, U_3)) \leq \sum_{i=1}^{3} b(U_i) + b(U_1 \cap U_2 \cap U_3). \tag{10}$$

Az (8i-8iii) feltételeket kielégítő $(S, \mathfrak{L}, b, \vee, \sqcup)$ ötöst és $\widehat{b}$ polimatroid függvényt *tömör*nak nevezzük. Tömör polimatroidokra vonatkozó fő eredményünk:

4.1. Theorem. *([13]) A tömör polimatroidok osztálya zárt összehúzásra, és prematroid képzésre. A tömör polimatroidok DCP-k.*

A (6)-et kielégítő (k, l)-matroidok tömörek. Nézzünk egy másik alkalmazást tömör polimatroidok párosításaira. Kezdjük Mader pont-diszjunkt $\mathcal{A}$-útjainak [12] feladatával, amit Lovász megfogalmazott párosítási feladatként és levezette Mader formuláját nemkonstruktív módon. Schrijver megadta a szóbanforgó polimatroid egy lineáris reprezentációját, mely tehát algoritmushoz is elvezet. A kapott algoritmus azonban nem tekinthető kombinatorikusnak, hisz a kombinatorikus duál megoldás helyett is egy lineárisat kapunk. A dolgozatban megmutatjuk, hogy Lovász polimatroidja beágyazható egy kis tömör polimatroidba, a kapott formulából pedig levezethető Maderé. Amennyiben lenne párosítás algoritmus DCP vagy tömör polimatroidokra, akkor az új kombinatorikus algoritmust adna Mader feladatára.

5. Paritásos összefüggőségi irányítások

A paritásos összefüggőségi irányítási feladatok központi szerepet játszanak a dolgozatban. Itt hipergráfok olyan irányításainak létezését vizsgáljuk, melyek kielégítenek bizonyos összefüggőségi feltételt, s minden pont kifoka adott paritású.

Legyen $H = (V, E)$ hipergráf (aminek az üreshalmaz nem éle). Az irányítási feladatoknál hiperél alatt mindig multihalmazt értünk, tehát a v pont $e(v)$ multiplicitással szerepel az $e \in E$ hiperélben. A H egy $\vec{H}$ *irányításán* azt értjük, hogy minden $h \in E$ hiperélre kijelölünk egy $v \in h$ *fej*et, a $h - \chi_v$ pontjai pedig a *tö*vek lesznek. A h hiperél *belép* X-be, ha X-ben van a feje, s legalább egy töve nem, míg *kilép* X-ből, ha $V - X$-be belép. Az X-be belépő ill. X-ből kilépő élek halmazát $\delta^{in}_{\vec{H}}(X)$ ill. $\delta^{out}_{\vec{H}}(X)$ jelöli.

Az összefüggőségi igényt a $p : 2^V \to \mathbb{Z}_+$, $p(\emptyset) = p(V) = 0$ függvény adja meg. A $\vec{H}$ irányítás *fedi* p-t, ha $\delta^{in}_{\vec{H}}(X) \geq p(X)$ minden $X \subseteq V$-re. A $p : 2^V \to \mathbb{Z}_+$ függvényt *metsző szupermodulárisnak* nevezzük, ha

$$p(X) + p(Y) \geq p(X \cap Y) + p(X \cup Y) \tag{11}$$

teljesül amennyiben $X, Y \subseteq V$, $X \cap Y \neq \emptyset$. Hasonlóan, $p : 2^V \to \mathbb{Z}_+$ *ko-metsző szupermoduláris*, ha (11) teljesül amennyiben $X, Y \subseteq V$, $X \cup Y \neq V$, ill. *keresztező* *szupermoduláris*, ha (11) teljesül minden $X, Y \subseteq V$, $X \cap Y \neq \emptyset$, $X \cup Y \neq V$ halmazpárra.

Legyen $g : 2^V \to \mathbb{Z}$, $g(X) = \sum_{e \in E} e(X) - |E[X]| - p(X)$. Világos, hogy ha $x \in \mathbb{Z}^V$ egy p-t fedő irányítás kifokvektora, akkor

$$x \geq 0, \tag{12}$$

$$x(X) \leq g(X), \quad \text{minden } \emptyset \neq X \subseteq V \text{ halmazra}, \tag{13}$$

$$x(V) = g(V), \tag{14}$$

sőt, ha az x egész vektor kielégíti (12-14)-et, akkor H-nak van p-t fedő irányítása melyben a v pont foka $x(v)$. Ha $g \geq 0$, és p keresztező szupermoduláris, akkor az (12-14) feltételrendszer üres poliédert vagy bázispoliédert határoz meg. így a „szubmoduláris függvények elméletéből” levezethető:

5.1. Theorem (Frank, Király, és Király [5]). *Legyen $H = (V, E)$ hipergráf, $p : 2^V \to \mathbb{Z}_+$, $p(\emptyset) = p(V) = 0$. Ha p metsző szupermoduláris, akkor H-nak pontosan akkor van p-t fedő irányítása, ha*

$$g(V) \leq \sum_{j=1}^{t} g(X_j) \tag{15}$$

fennáll a V minden $X_1, X_2, \ldots, X_t$ partíciójára. Ha p ko-metsző szupermoduláris, akkor H-nak pontosan akkor van p-t fedő irányítása, ha

$$(t-1)g(V) \leq \sum_{j=1}^{t} g(V - X_j) \tag{16}$$

fennáll a V minden $X_1, X_2, \ldots, X_t$ partíciójára. Ha p keresztező szupermoduláris, akkor H-nak pontosan akkor van p-t fedő irányítása, ha (15) és (16) teljesülnek a V minden partíciójára.

Térjünk most rá a paritásos esetre. Ekkor olyan p-t fedő irányítást keresünk, melyben minden kifok adott paritású. Frank, Sebő, és Tardos megmutatták, hogy ha p csak szingletonokon és azok komplementerein pozitív, akkor a feladat visszavezethető gráfok párosításaira.

Frank, Jordán, és Szigeti [4] a paritásos gyökeresen k-élösszefüggővé irányíthatóságot vizsgálták. A dolgozatban megmutatjuk, hogy ezen feladat s hipergráfos változatának megoldása levezethető tömör polimatroid párosításból. Ez a megközelítés lehetővé teszi, hogy alsó és felső fokkorlátokat is írjunk a pontok kifokaira. Király és Szabó [8] egy meglepő általánosítást adtak. Bebizonyították a természetes partíciós formula elégségességét azon általános esetben, amikor p metsző szupermoduláris:

5.2. Theorem (Király és Szabó [8]). *Legyen $H = (V, E)$ hipergráf, $p : 2^V \to \mathbb{Z}_+$ metsző szupermoduláris, $p(\emptyset) = p(V) = 0$, végül $T \subseteq V$. Ekkor H-nak pontosan akkor létezik pontosan T pontjaiban páratlan kifokú p-t fedő irányítása, ha*

$$g(V) \leq \sum_{j=1}^{t} g(X_j) - |\{j : g(X_j) \not\equiv |T \cap X_j|\}| \tag{17}$$

fennáll a V minden $X_1, X_2, \ldots, X_t$ partíciójára.

A polimatroid párosítás szempontjából ez a feladat teljesen másként viselkedik mint a korábbiak, és a következő részben tárgyaljuk.

Nagyon keveset tudunk olyan paritásos irányítási feladatokról, melyben p keresztező szupermoduláris. Fontos nyitott kérdés azon gráfok karakterizációja, amiknek van csupa páros kifokú erősen összefüggő irányítása. Nem nehéz látni, hogy a feladat random polinomiális. A dolgozatban megadtunk egy kombinatorikus karakterizációt a síkgráfok speciális esetére, amikoris a jó irányítások kifoksorozatainak poliédere tömör polimatroidba ágyazható, hely hiányában a részleteket mellőzzük.

6. Polimatroidok NTCDC-k nélkül

Ezen rész eredményei [15]-ból vannak. Láttuk korábban, hogy bizonyos paritásos irányítási feladatok kezelhetők tömör polimatroidokkal. Az 5.2 tétel esetében ez valószínűtlen, hisz a p-t fedő irányítások foksorozatainak poliédere nem teljesít semmilyen algebrai tulajdonságot, mely a DCP-t biztosíthatná. Ehhez teljesen új megközelítés kell. [15]-ben megmutattuk, hogy ha p metsző szupermoduláris, g nemnegatív és nemcsökkenő a nemüres halmazokon, akkor a (12-13) által leírt polimatroid NTCDC-mentes. Másodszor pedig, hogy NTCDC-mentes polimatroidokra a partíciós formula karakterizálja $\nu(f)$-et:

6.1. Theorem (M. és Szabó [15]). *Legyen $f : 2^S \to \mathbb{Z}_+$ NTCDC-mentes polimatroid függvény. Ekkor egyenlőség áll (1)-ben minden $A \subseteq S$-re.*

Ekkor az 5.2 tétel egy egyszerű következmény. További egyszerűbb alkalmazásokat is vizsgálunk NTCDC-mentes polimatroidokkal.

Míg gráfok párosításfeladatának minden természetes polimatroid párosítási felírásában vannak NTCDC-k, mutatunk olyat amelyben nincsenek.

Egy másik alkalmazás Fekete [3] következő feladata. Legyen $l \in \{2{,}3\}$, $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf, és $Z \subseteq V$-re legyen K_Z az a gráf a Z ponthalmazon, melynek bármely két pontja közt van $4-l$ párhuzamos éle. Legyen továbbá $r(E) < 2|V| - l$ ahol r az $\mathcal{M}_{2,l}$ rangfüggvénye. Ekkor megkérdezhetjük, hogy mi azon legkisebb $Z \subseteq V$ melyre $G + K_Z$ rangja $2|V| - l$. Ha $l = 2$, akkor ez ekvivalens a legkisebb Z összehúzásával, melyre a kapott gráfnak van két él-diszjunkt feszítőfája. Az $l = 3$ esetben pedig körülbelül arról van szó, hogy minél kevesebb pontot akarunk generikusan leszúrni úgy, hogy a kapott gráf síkban generikusan merev legyen. Ez utóbbi Lovász leszúrási tételének [9] egy generikus változata. Fekete igazolta, hogy mindkét feladat gráfok párosításaira visszavezethető. [15]-ben megmutattuk, hogy a felmerülő polimatroidok valójában NTCDC-mentesek.

7. Nyitott kérdések

A DCP polimatroidok és az NTCDC-mentes polimatroidok osztályai valószínűleg egyik sem része a másiknak. Érdekes kérdés tehát, hogy van-e a kettőnek valami közös kerete kezelhető párosítási feladattal. Nyitott az is, hogy milyen körülmények között lehet a DCP polimatroidok párosítási feladatait algoritmikusan megoldani.

Hivatkozások

[1] Anders Björner and László Lovász. Pseudomodular lattices and continuous matroids. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 51(3-4):295–308, 1987. 4

[2] Andreas W. M. Dress and László Lovász. On some combinatorial properties of algebraic matroids. *Combinatorica*, 7(1):39–48, 1987. 2, 3, 4

[3] Zsolt Fekete. Source location with rigidity and tree packing requirements. Technical Report TR-2005-04, Egerváry Research Group, Budapest, 2005. `www.cs.elte.hu/egres`. 9

[4] András Frank, Tibor Jordán, and Zoltán Szigeti. An orientation theorem with parity conditions. *Discrete Appl. Math.*, 115(1-3):37–47, 2001. 1st Japanese-

Hungarian Symposium for Discrete Mathematics and its Applications (Kyoto, 1999). 7

[5] András Frank, Tamás Király, and Zoltán Király. On the orientation of graphs and hypergraphs. *Discrete Appl. Math.*, 131(2):385–400, 2003. Submodularity. 7

[6] Winfried Hochstättler and Walter Kern. Matroid matching in pseudomodular lattices. *Combinatorica*, 9(2):145–152, 1989. 4

[7] Per M. Jensen and Bernhard Korte. Complexity of matroid property algorithms. *SIAM J. Comput.*, 11(1):184–190, 1982. 1

[8] Tamás Király and Jácint Szabó. A note on parity constrained orientations. Technical Report TR-2003-11, Egerváry Research Group, Budapest, 2003. `www.cs.elte.hu/egres`. 8

[9] László Lovász. Matroid matching and some applications. *J. Combin. Theory Ser. B*, 28(2):208–236, 1980. 1, 2, 3, 4, 9

[10] László Lovász. Selecting independent lines from a family of lines in a space. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 42(1-2):121–131, 1980. 3

[11] László Lovász. The matroid matching problem. In *Algebraic methods in graph theory, Vol. I, II (Szeged, 1978)*, volume 25 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 495–517. North-Holland, Amsterdam, 1981. 3

[12] Wolfgang Mader. Über die Maximalzahl kreuzungsfreier H-Wege. *Arch. Math. (Basel)*, 31(4):387–402, 1978/79. 6

[13] Márton Makai. Matroid matching: a new class of matroids possessing the double circuit property. 2006. submitted. 2, 5, 6

[14] Márton Makai. Matroid matching with dilworth truncation. *Discrete Mathematics*, 308(8):1394–1404, 2008. 4

[15] Márton Makai and Jácint Szabó. The parity problem of polymatroids without double circuits. *Combinatorica*. accepted. 8, 9