

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar
Fizika Doktori Iskola
Részecskefizika és csillagászat program

The von Neumann entropy asymptotics of pure quasifree states

Doktori értekezés tézisei

Zimborás Zoltán

2008.

Témavezető: Vecsernyés Péter
Programvezető: Csikor Ferenc
Doktori Iskola vezetője: Horváth Zalán

Bevezetés

A végtelen rácson értelmezett fermion-modellek olyan végtelen szabadsági fokú rendszerek, amelyek a kontinuum fermion-rendszerekkel szemben lokálisan csak véges szabadsági fokkal rendelkeznek. Ebben az értelemben vett egyszerűségük ellenére ezek a modellek számos fizikai jelenség leírására is képesek, sőt jól közelíthetünk velük bizonyos kontinuum-modelleket is. Ha egy Hamilton-operátorral - illetve azok egy családjával - definiálunk egy fermion-modellt rácson, akkor többek között tanulmányozhatjuk a modell alapállapotát, a magasabban gerjesztett sajátállapotait, és a véges hőmérsékletű egyensúlyi állapototait. Ezen állapotok megtalálását megnehezíti, hogy eltolásinvariáns állapotokat általában nagyon nehéz konstruktívan megadni. Ezért a konstruktívan megadott, úgynevezett *kváziszabad állapotok* a fermion-algebra legjobban ismert és tanulmányozott állapotai közé tartoznak. A nevük onnan ered, hogy a szabad fermion-rendszerek nulla és véges hőmérsékletű állapotaihoz hasonlóan, a keltő és eltüntető operátorok szorzatainak várható értéke ezen állapotokban kifejthető a Wick-párosítással, azaz a megfelelő kétpont szorzatok várható értékeinek előjeles összegével. Sok ilyen állapot előáll Hamilton-operátorok által definiált rác fermion-modellek egzakt alap- vagy véges hőmérsékletű egyensúlyi állapotokaként, de használják a kváziszabad állapotokat közelítésekben is, pl. a Hartree-Fock közelítésben. Számos modell Gibbs-állapotainak leírása mellett, a kváziszabad állapotokat tanulmányozhatjuk önmagukban, modelltől (Hamilton-operátoroktól) függetlenül is. Ilyen vizsgálódásokkal mélyebben megérthetjük például az általános eltolásinvariáns állapotok szerkezetét, rájuk vonatkozóan új sejtéseket fogalmazhatunk meg, sejtéseket élesíthetünk, illetve ezekre kereshetünk ellenpéldákat. A doktori dolgozatomban ebben az absztrakt értelemben vizsgálók általános tiszta, eltolásinvariáns kváziszabad állapotokat. Kutatásom konkrét tárgya ezen állapotok Neumann-entrópiájának aszimptotikája, azaz az, hogy egy adott kváziszabad állapotban az L lineáris méretű hiperkocákhoz tartozó sűrűségmátrixok Neumann-entrópiája, S_L , hogyan növekszik L -l.

A Neumann-entrópia aszimptotikájának vizsgálata több szempontból is fontos feladat. Egy d -dimenziós rácson definiált fermion-modell véges hőmér-

sékletű egyensúlyi állapotainak megtalálásához egy variációs eljárást adhatunk az állapotok entrópiasűrűségének, azaz az S_L/L^d mennyiség végtelenbeli határértéknek segítségével. Ezen variációs eljárás leszűkítése bizonyos állapotosztályokra jól használható közelítést ad az egzakt alapállapotra (a kváziszabad állapotokra történő leszűkítése éppen a Hartree-Fock közelítés). Véges rácson értelmezett fermion-rendszerek állapotainak Neumann-entrópiája pontosan akkor nulla, ha az állapot tiszta. Végtelen rácson kevert állapotok entrópiasűrűsége is lehet nulla, és számos eredmény arra enged következtetni, hogy ez a mennyiség a teljes állapot egyfajta "erős kevertségét" méri. Ezzel a feltevéssel kapcsolatos a kvantum statisztikus fizika egy régóta fennálló és természetes sejtése az ún. *nulla entrópiasűrűség sejtés*, mely szerint a tiszta eltolásinvariáns állapotok entrópiasűrűsége mindig nulla. A közelmúltban végzett numerikus és konform térelméleti eredmények alapján egy másik sejtést is megfogalmaztak: a végtelen fermionláncon értelmezett olyan eltolásinvariáns tiszta állapotoknál, melyek lokális kölcsönhatásokkal definiált modellek alapállapotai, a Neumann-entrópia vagy logaritmikusan nő vagy egy konstanshoz szaturálódik. A logaritmikus entrópia-aszimptotika a kritikus alapállapotoknál jelentkezik, és az együtthatója a modellhez tartozó centrális töltés egyharmada, míg a szaturálódás a nemkritikus alapállapotokra jellemző.

A Neumann-entrópia jelentős szerepre tett szert a kvantuminformációelméletben is. Ezen elmélet többek között foglalkozik a kvantumrendszerek klasszikus szimulációjának bonyolultságelméletével, és azzal is, hogy magát a kvantumállapotot hogyan tudjuk felhasználni információ feldolgozására és kódolására. Egy részrendszerre megszorított sűrűségmátrix Neumann-entrópiája jól jellemzi azt, hogy mennyire tudjuk jelentős információvesztés nélkül a sűrűségmátrixot egy kisebb mátrixban tárolni. A sűrűségmátrixok ilyen sűrítetőségi tulajdonságán több numerikus módszer is alapul, ilyen például az úgy nevezett sűrűségmátrix-renormcsoport algoritmus. Másfelől, ha egy tenzorszorzat Hilbert-téren egy tiszta állapotot megszorítunk az egyik tenzorfaktorra, akkor a megszorított sűrűségmátrix Neumann-entrópiája adja meg a két alrendszer között lokális operációkkal létrehozható teljesen összefonódott qubitek számát.

A munka célkitűzése

A munkám egyik célkitűzése az volt, hogy megválaszoljak ezen a tudományterületen felmerült két általános kérdést. Korábban már megmutatták, hogy egydimenziós rendszerek eltolásinvariáns állapotai nagyon változatos entrópia-aszimptotikát mutatnak - nemcsak szaturálódót, illetve logaritmikusan növekedőt. Az a sejtés fogalmazódott meg, hogy a nulla entrópiasűrűségen kívül nincs erősebb felső korlát az entrópia-aszimptotikára, azaz bármilyen szublineáris függvénynél lehet annál gyorsabb entrópia-aszimptotikájú tiszta eltolásinvariáns állapotot találni. A másik nyitott kérdés ezen a területen az volt, hogy lehet-e nem korlátos, de logaritmikusnál lassúbb entrópia-aszimptotikájú eltolásinvariáns tiszta állapotot találni. Kváziszabad állapotok entrópia-aszimptotikáját vizsgálva próbáltam eldönteni ezt a két kérdést. Az egyik kérdést sikerült eldöntenem, a másikonál részleges választ sikerült adnom: a kváziszabad állapotok entrópia-aszimptotikájára logaritmikus alsó korlátot bizonyítottam.

Célkitűzésem volt továbbá, hogy numerikusan megvizsgáljak olyan tiszta kváziszabad állapotokat is, amelyek előállnak lokális kölcsönhatással definiált modellek alapállapotaiként, és ellenőrizzem az erre vonatkozó konform térelméleti jóslatokat.

Alkalmazott módszerek

- A végtelen szabadsági fokú fermion-algebrának több inekvivalens irreducibilis ábrázolása van szeparábilis Hilbert-tereken, így ezen rendszereket a *C^* -algebrák ábrázoláselméletének* keretében tárgyaltam.
- Mivel a kváziszabad állapotokat definiáló Toeplitz-operátorok Fourier-transzformált alakja egy mérhető függvénnyel való szorzás, így az állapotokra vonatkozó tételeket a *funkcionálanalízis* és a matematikai *mértékelmélet* eszköztárának felhasználásával bizonyítottam.
- *Numerikus módszerek* használatam konkrét egydimenziós kváziszabad állapotok entrópia-aszimptotikájának meghatározásakor.

Tézisek

- I. Bebizonyítottam, hogy egy d -dimenziós rácson definiált fermion-algebra minden nemtriviális - azaz nem Fock illetve anti-Fock - tiszta, eltolásinvariáns, kváziszabad állapotának Neumann-entrópiája gyorsabban nő mint $cL^{d-1} \log L$, ahol c az adott állapottól függő pozitív konstans [2,3].
- II. Numerikus vizsgálataimmal alátámasztottam azt a konform térelméleti jóslatot, hogy egy fermionláncon adott $2n$ Fermi-ponttal rendelkező tiszta, eltolásinvariáns, kváziszabad állapot entrópia-aszimptotikája $\frac{n}{3} \log L + konstans$ alakú [1].
- III. Bebizonyítottam, hogy a d -dimenziós rácson definiált fermion-algebrák tiszta, eltolásinvariáns állapotaira vonatkozó *nulla entrópiásűrűség sejtés* éles abban az értelemben, hogy minden f szublineáris függvényhez létezik olyan állapot, melynek entrópia-aszimptotikája gyorsabb mint $L^{d-1} f_L$ [2,3].

Következtetések

A munkám jövőbeli felhasználása és továbbfejlesztései közül a következőket tartom a legfontosabbnak, illetve a legrealisabban megvalósíthatónak:

- A numerikus eredményeim alátámasztották azt a közelmúltbeli konform térelméleti eredményt, mely szerint az egydimenziós kritikus tiszta alapállapotokban az entrópia-aszimptotika logaritmikus, és a logaritmus előfaktora a centrális töltés egyharmada. Azonban azt is megmutattam, hogy a fermionláncok egydimenziós eltolásinvariáns állapotokban jóval gyorsabb entrópia-aszimptotikák is lehetségesek. Egy fontos cél lenne annak bebizonyítása, hogy lokális kölcsönhatásokkal definiált egydimenziós modellek alapállapotainak entrópia-aszimptotikája vagy szaturálódik vagy logaritmikus. Egy könnyebben vizsgálható sejtés az, hogy csak olyan tiszta, kváziszabad állapot lehet egy lokális kölcsönhatásokkal definiált modell alapállapota, amely Fermi tenger véges sok intervallumból áll. Másfelől a tételeim bizonyításai során

az a talán egyszerűbben bizonyítható sejtés fogalmazódott meg bennem, hogy minden olyan egydimenziós, tiszta, kváziszabad állapotnál, amelynek Fermi-tengere nem véges sok intervallumból áll, az entrópia-aszimptotika logaritmikusanál gyorsabb.

- A Shannon-McMillan sejtés kvantumozott változata többek között azt mondja ki, hogy egy kvantumspinel minden nulla entrópiásűrűségű ergodikus állapota (pl. egy tiszta, kváziszabad állapot) esetén a részrendszerekre megszorított sűrűségmátrixok *lényeges alterének* dimenziója exponenciálisanál lassabban nő a részrendszer méretével. A fizikus közösségen belül kialakult sejtés, miszerint az entrópia-aszimptotikák szoros kapcsolatban vannak a sűrűségmátrixok úgynevezett *lényeges alterének* dimenziójával, azt sejteti, hogy éppen a *nulla entrópiásűrűség sejtés* élességének bizonyításakor felhasznált, konstruktívan megadott állapotokkal esetleg bizonyíthatom a kvantumozott Shannon-McMillan-tétel élességét. Azaz azt, hogy minden szubexponenciális függvényhez létezik olyan eltolásinvariáns állapot, melynek megszorított sűrűségmátrixainak lényeges alterének dimenziója annál gyorsabban nő.

Közlemények

A tézisek alapjául szolgáló közlemények listája

- [1] V. Eisler and Z. Zimborás, "Entanglement in the XX spin chain with an energy current", Phys. Rev. A **71** (2005) 042318.
- [2] S. Farkas and Z. Zimborás, "On the sharpness of the zero-entropy-density conjecture", J. Math. Phys. **46** (2005) 123301.
- [3] S. Farkas and Z. Zimborás, "The von Neumann entropy asymptotics in multidimensional fermionic systems", J. Math. Phys. **48** (2007) 102110.

A témához kapcsolódó egyéb közlemények

- [4] R. Juhász and Z. Zimborás, "Entanglement entropy in aperiodic singlet phases", J. Stat. Mech. (2007) P04004.
- [5] F. Iglói, R. Juhász, and Z. Zimborás, "Entanglement entropy of aperiodic quantum spin chains", Europhys. Lett. **79** (2007) 37001.

A témához kapcsolódó konferencia előadások és poszterek

1. 30th Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics, Olaszország, Cortona, 2005.
Entanglement Entropy asymptotics (poszter prezentáció).
2. Statisztikus Fizikai Nap, Magyarország, Budapest, 2006.
A nulla entrópiasűrűség sejtés (előadás).
3. 31st Conference of the Middle European Cooperation in Statistical Physics, Horvátország, 2006. *Faster than logarithmic entanglement entropy growth in quantum spin chains* (poszter prezentáció)
4. Universität des Saarlandes, Németország, Saarbrücken, 2006.
Entanglement entropy in disordered systems (előadás).
5. Statisztikus Fizikai Nap, Magyarország, Budapest, 2007.
c-tétel rendezetlen rendszerekre? (előadás).
6. DPG Frühjahrstagungen, Fachverband Dynamik und Statistische Physik, Németország, Berlin, 2008.
Entanglement entropy in disordered and non-equilibrium systems (előadás).
7. DPG Frühjahrstagungen, Fachverband Theoretische und Mathematische Grundlagen der Physik, Németország, Freiburg, 2008.
The zero-entropy-density conjecture (előadás).