

# **Evolúciós fogolydilemma játék különböző gráfokon**

A doktori értekezés tézisei

**Vukov Jeromos Pál**

Fizika doktori iskola

A doktori iskola vezetője: **Prof. Horváth Zalán**, akadémikus

Statisztikus fizika, biológiai fizika és kvantumrendszerek  
fizikája program

Programvezető: **Prof. Kürti Jenő**, MTA doktora

Témavezető: **Dr. Szabó György**, MTA doktora, tudományos tanácsadó  
MTA MFA

és

**Dr. Mészéna Géza**, MTA doktora, egyetemi docens  
ELTE TTK, Biológiai Fizika Tanszék



Eötvös Lóránd Tudományegyetem  
Természettudományi Kar  
Biológiai Fizika Tanszék

2008.

## Bevezetés

Az evolúciós játékelmélet egyik központi témája olyan feltételek és folyamatok keresése, amelyek önző egyedek között kialakuló együttműködésre vezetnek. A doktori értekezésben is ezzel a témával foglalkoztam az evolúciós fogolydilemma játék keretében.

A fogolydilemma játék térbeli kiterjesztésével lehetőség nyílt arra, hogy modellek megalkotásánál a közösségen belüli kapcsolatok szerkezetét is figyelembe vegyük. Ezeknél a modelleknél egy gráf segítségével írjuk le a vizsgált közösséget, ahol a gráf pontjai jelölik a közösség tagjait, míg a gráf élei mutatják a tagok (játékosok) közötti kölcsönhatásokat. A játékosok páronként játsszák egymással a fogolydilemma játékot, és az összes játékból származó nyereség alkotja a játékos összbevételét az adott körben. Bizonyos időnként a játékosok átvehetik egymás stratégiáját; a stratégiaátvétel valószínűsége az összbevételük különbségétől függ.

Az ilyen és ehhez hasonló rendszerek kiválóan alkalmasak arra, hogy a statisztikus fizikának a komplex rendszerek vizsgálatára kifejlesztett eszközeivel tanulmányozzuk őket. Ez magyarázza többek között a statisztikus fizikusok érdeklődését a játékelméleti problémák iránt.

Természetesen nem lehet minden tulajdonságot egyetlen modellbe foglalni, mert akkor a túl sok paraméter miatt a paramétertér átvizsgálása nagyon sok időbe kerülne. Emiatt a modellek elkészítésénél a fogolydilemma jelleg megőrzése mellett mindig csak egy-két fontos, további tulajdonság hozzáadására koncentráltam.

## **Önkéntes részvételű fogolydilemma játék részleges térbeli és időbeli véletlen partnerséggel**

Elsőként a nemrégiben bevezetett önkéntes részvétel és a különféle véletlen szomszédságok vizsgálatát tűztem ki célul. A játékban való részvétel megtagadását egy (az együttműködő és az áruló stratégia melletti) harmadik stratégiaként kezeltem. Ez a stratégia segít abban, hogy a térbeli fogolydilemma játékokban magasabb  $b$  (árulásra való kísértés) paraméterértékek mellett se mindig az abszorbeáló áruló állapot legyen a stacionárius stratégiaeloszlás. Emellett a szomszédsági kapcsolatokban fellépő időbeli és térbeli rendezetlenség hatásait vizsgáltam, miközben

a szomszédok számát állandóan tartottam, hogy az ebből adódó, esetlegesen zavaró hatásokat elkerüljem. A térbeli véletlenség a lokális közösségek közötti néhány távoli kapcsolat szerepét hivatott modellezni, míg az időbeli véletlen szomszédság a ritkán feltűnő, ideiglenes partnerek hatását vizsgálja. Az értekezés első részében a véletlenparaméterek változtatásának az együttműködés fenntartására, terjedésére való hatásait kerestem, miközben a teljesen rendezett rendszertől (négyzetrács) a teljes rendezetlenségig (átlagtér határeset) jutottam.

## **Fogolydilemma játék rögzített, skálafüggetlen, hierarchikus szerkezeten**

Ezután olyan modellt vizsgáltam, ahol a játékosok szomszédsági viszonyait skálafüggetlen gráf írta le. Ez a szerkezet nagyon sok helyen előfordul a természetben, többek között az emberi kapcsolatrendszerek is általában ilyen eloszlást követnek, ezért ideális alapszerkezet lehet a fogolydilemma-szerű konfliktusok vizsgálatára. Ezeknek a hálózatoknak egy másik tulajdonsága a véletlen hálózatokénál jóval magasabb klaszterezettségi együtttható, tehát a közösség tagjai sokkal inkább kisebb, jól összekapcsolt csoportokba tömörülnek, mint egy véletlen hálózat esetében. A dolgozat célja volt annak a feltárása, hogy a szerkezet méretének (a hierarchiaszintek számának) és a  $b$  paraméter nagyságának változtatásakor hogyan változik az együttműködés mértéke, és hogy egyáltalán ez a fajta szerkezet milyen mértékben támogatja az együttműködés kialakulását.

## **Hierarchikus rácsszerkezetek**

Mínt hogy a vizsgált modellkörülmények között a skálafüggetlen gráfok nem bizonyultak az együttműködést túlságosan támogató szerkezetnek, ezért másfajta hierarchikus struktúra vizsgálatába kezdtem. A négyzetrácson már egy ideje meglehetősen jól ismert a kétstratégias (együttműködő és áruló) térbeli fogolydilemma játék viselkedése, ezért ebből az egyszerű alapszerkezetből készítettem több szintből álló hálózatot és ezen vizsgáltam az alá- és fölérendeltség hatásait. A dolgozat célkitűzései a következők voltak: elemezni az együttműködés kialakulását a különböző szinteken valamint a különböző szinteken lévő együttműködő kolóniák

egymással való kapcsolatát; megvizsgálni a hierarchiaszintek számának változtatásából adódó hatásokat és megkeresni, ha esetleg létezik, az optimális szintszámú rendszert.

## **A fogolydilemma játék fázisdiagramjai**

A hierarchikus rácsokon végzett vizsgálatok után a dinamikai szabályban található zaj tanulmányozásába fogtam. Kiderült ugyanis, hogy a zaj és a szomszédsági hálózat topológiája együttesen nagy hatással lehet az együttműködők stacionárius koncentrációjára. Bizonyos esetekben a zaj növelése nagymértékben növelheti az együttműködés mértékét a rendszerben. Szisztematikus vizsgálatra volt szükség többfajta egyszerű alapszerkezeten (kétdimenziós rácsok, véletlen reguláris gráfok, kisvilág szerkezetek), hogy kideríthessem, hogy melyek azok az alapvető topológiai tulajdonságok, melyek elősegítik az együttműködést. Ennek érdekében a dolgozatban a zaj és a  $b$  paraméter fázissíkjában fel kellett térképeznem az összes olyan paraméterkombinációt, amelyek mellett az együttműködés fennmaradhat a rendszerben.

## Módszerek

A dolgozatban vizsgált modelleket alapvetően kétfajta megközelítés szerint vizsgáltam. A „kísérleti” megközelítésben Monte Carlo szimulációkat alkalmaztam. A rendszerméreteket rendszerint akkorára választottam, hogy a véges méret effektusok elhanyagolhatóak legyenek. Általában véletlen kezdőfeltételből indítottam a szimulációkat és a kezdeti termalizációs idő elmúltá után rögzítettem a különböző mennyiségek időfüggését. Ezen adatok ismeretében könnyedén lehetett a származtatott mennyiségeket (átlagok, fluktuációk, stb.) számolni. Bizonyos esetekben az adott feladat gyorsabb megoldását speciális kezdőfeltétel tette lehetővé, ilyenkor természetesen azonnal a kezdetektől figyelemmel követtem a fontos mennyiségeket.

Az „elméleti” megközelítésben különféle közelítő módszerekkel vizsgáltam a rendszer viselkedését. Először természetesen mindig az átlagtér-közelítés jóslatát tanulmányoztam, de mivel ez a módszer nem igazán alkalmas térbeli rendszerek leírására, ezért a dinamikus klaszterközelítést kellett alkalmaznom különféle méretű, az alulfekvő szerkezethez alkalmazkodó klaszterek segítségével. Ennél a közelítésnél az adott méretű klasztereken lehetséges összes konfigurációs valószínűségekre írunk fel időfejlődési differenciálegyenleteket, amikből numerikus integrálással nyerjük az egyensúlyi értékeket. Megfelelően nagy méretű klaszterek esetén a Monte Carlo szimulációk és a dinamikus klaszterközelítés majdnem minden esetben minőségileg azonos eredményt adott.

## Tézispontok

- 1a.** A négyzetrácson vizsgált önkéntes részvételű fogolydilemma játék alapszerkezetét rögzített, térbeli rendezetlenséggel megváltoztatva megmutattam, hogy alacsony rendezetlenség-paraméterértékek esetén fennmarad az eredeti struktúrán megfigyelt önszerveződő mintázat.
- 1b.** „Közepes” paraméterértékekre a rendszer globálisan oszcilláló állapotba kerül.
- 1c.** A rendezetlenség mértékét tovább növelve a végállapot a véletlen kezdeti feltétel és a rendezetlenség-paraméter pontos értéke által meghatározott homogén, abszorbeáló állapot lesz.
- 1d.** Az ideiglenes véletlen szomszédság hatásai alapvetően hasonlóak a térbeli, rögzített rendezetlenségéhez, de a rendszer „érzékenyebb” a kapcsolatok ilyenfajta perturbációjára, az átmenetek (1b.-1c.) kisebb paraméterértékek esetén következnek be.
- 2.** A fogolydilemma játékot rögzített, skálafüggetlen, hierarchikus szerkezeten vizsgáltam és a játékosok nyereségét a szomszédok számával normáltam. Ezen körülmények között megmutattam, hogy az együttműködés meglehetősen sokáig fennmaradhat a kis, csak együttműködő játékosok által alkotott klikkekben, de a rendszerbe épített zaj következtében egy idő után mindenképpen az áruló stratégia fogja dominálni az egész közösséget.
- 3a.** Megmutattam, hogy négyzetrácson az együttműködők koncentrációja az irányított perkolációs univerzalitási osztályba tartozó, másodrendű fázisátalakulás szerint tűnik el.
- 3b.** Szimulációs eredményeim alapján a hierarchikus rácsszerkezeteken az együttműködők koncentrációja minden szinten ugyanakkora  $b$  paraméter mellett tűnik el.

- 3c.** Az együttműködők koncentrációja erősen változik a különböző hierarchiaszinteken. Négy vagy ennél kevesebb hierarchiaszint esetén a legfelső szinten a legnagyobb az együttműködő játékosok aránya és a szinteken lefelé lépdelve monoton csökken a koncentrációjuk. Négynél több hierarchiaszint esetén ez a rendeződés csak a kritikus pont közvetlen közelében figyelhető meg.
- 3d.** Az együttműködés mértéke mindig a legalsó hierarchiaszinten a legalacsonyabb.
- 3e.** A vizsgált zajparaméter mellett az össztársadalmi bevétel szempontjából a legkedvezőbb szerkezet a négyszintes rendszer.
- 4a.** Szimulációk és dinamikus klaszterközelítés segítségével kimértem a foglydilemma játék fázisdiagramját több különböző térbeli és nem-térbeli szerkezeten a zaj és a  $b$  paraméter fázissíkjában.
- 4b.** Megmutattam, hogy az alacsony zaj határesetben az együttműködést nagymértékben elősegíti, ha a struktúrán az egy ponton átlapoló háromszögek perkolálnak.
- 4c.** Magas zaj határesetben a hurkok jelenléte gátolja az együttműködés terjedését, ezért ebben az esetben a véletlen reguláris gráf biztosítja az együttműködés túléléséhez szükséges feltételeket a legszélesebb paramétertartományban.
- 4d.** A háromszögperkoláció nélküli esetekben rezonanciaszerű viselkedést találtam a zaj függvényében.

## **A disszertáció, illetve a tézispontok alapjául szolgáló közlemények**

- [1] György Szabó and Jeromos Vukov: „*Cooperation for volunteering and partially random partnerships*”, Physical Review E **69**, 036107 (2004)
  
- [2] Jeromos Vukov and György Szabó: „*Evolutionary prisoner's dilemma game on hierarchical lattices*”, Physical Review E **71**, 036133 (2005)
  
- [3] György Szabó, Jeromos Vukov and Attila Szolnoki: „*Phase diagrams for an evolutionary Prisoner's Dilemma game on two-dimensional lattices*”, Physical Review E **72**, 047107 (2005)
  
- [4] Jeromos Vukov, György Szabó and Attila Szolnoki: „*Cooperation in the noisy case: Prisoner's dilemma game on two types of regular random graphs*”, Physical Review E **73**, 067103 (2006)
  
- [5] Jeromos Vukov, György Szabó and Attila Szolnoki: „*Evolutionary prisoner's dilemma game on the Newman-Watts networks*”, arXiv, physics.soc-ph:0709.0316, 2007. (közlésre elfogadva a Physical Review E-ben)