Jacobian trees and their applications

Doktori értekezés tézisei

Sigray István

Matematika Doktori Iskola

vezetője: Laczkovich Miklós akadémikus

Elméleti Matematika Doktori Program

vezetője: Szenthe János a matematika tudomány doktora

Témavezető:

Némethi András

Tudományos tanácsadó, a matematika tudomány doktora

Eötvös Loránd Tudományegyetem

2008

Hurwitz, 1896-ban publikált cikkében ld. [Hu] egy kombinatorikus struktúra segítségével leírta a kompakt Riemann felületek nem-konstans meromorf függvényeit, mint $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ elágazó fedéseit. E leírás speciális esete az egy komplex változós racionális tört függvények, illetve polinomok leírása az elágazásos fedésekként.

Természetes módon vetődik fel a kérdés, lehet-e kombinatorikus módon leírni az $(f_1, \dots, f_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ leképezéseket, ahol $f_1, \dots, f_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ polinomok, melyek Jacobi determinánsa nem azonosan 0.

Ez az általános probléma természetesen sokkal nehezebb, mint az egyváltozós esete, hiszen a feltételeknek eleget tevő $(f_1, \dots, f_n)$ leképezések általános esetben nemcsak hogy nem fedései $\mathbb{C}^n$-nek, de még csak azt sem mondhatjuk róluk, hogy egy pont őspéje véges halmaz lenne, hiszen például $n = 2$ esetén az $f_1(x, y) = x$, $f_2(x, y) = xy$ leképezés esetén a Jacobi determináns nem azonosan 0, sőt generikus pont ősképe egyelemű halmaz, viszont a $(0, 0)$ ősképe az $x = 0$ komplex egyenes.

A Jacobi sejtés a fenti $(f_1, \dots, f_n)$ n-változós polinomleképezés kombinatorikus leírása helyett csupán annyit kérdez, hogy következik-e $(f_1, \dots, f_n)$ invertálhatósága a Jacobi feltételből, azaz abból, hogy a Jacobi determinánsuk seholsem tűnik el. Egyszerű meggondolás mutatja, hogy a Jacobi feltétel pontosan azt jelenti, hogy a Jacobi determináns egy nem 0 konstans.

A sejtést lényegében Keller fogalmazta meg 1939-ben megjelent cikkében, ahol azt kérdezte, hogy amennyiben az $f_1, \dots, f_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ polinomok egész együtthatósak, és a Jacobi determinánsuk azonosan 1, akkor van-e egész együtthatós inverzük.

Mivel az inverz létezéséből, már be lehet látni, hogy annak szükségképp egész együtthatósnak kell lennie, a Jacobi sejtésből következne, hogy Keller eredeti kérdésére is igenlő a válasz.

A p karakterisztikus test feletti analóg kérdésre már $n = 1$ esetén is nemleges a válasz, legyen pl. $f(x) = x^p + x$.

Az ún. „erős valós Jacobi sejtést” 1994-ben cáfolta meg Pintchuk egy olyan $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nem injektív polinomleképezést konstruálva, amely Jacobi determinánsa mindenütt pozitív (ld. [P]).

Hasonlóképpen nem teljesül az analóg analitikus függvényekre vonatkozó kérdés sem, pl. $n = 2$ esetén $f_1(x, y) := e^x$, $f_2(x, y) := e^{-x}y$. Mitöbb, olyan $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ injektív függvényt is lehet konstruálni, melyre $J(F) = c \in \mathbb{C}^*$, de $F(\mathbb{C}^2)$ nem sűrű $\mathbb{C}^2$-ben (ld. [B-M]).

Ez utóbi jelenség biztosan nem fordul elő polinom leképezések esetén, hiszen ha az $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ polinom leképezés telejesíti a Jacobi feltételt és injektív, akkor bijektív is.

Az értekezés a kétváltozós Jacobi sejtéssel foglalkozik. A kétváltozós Jacobi sejtés történetében talán a legfontosabb észrevételt Abhyankar tette, 1977-ben megjelent könyvében, ahol a Jacobi feltételnek eleget tevő (f, g) polinom pár, ún. Jacobi pár Newton poligonját vizsgálta, és bebizonyította a sejtést mindazokban az esetekben, amikor az $f = 0$ fibrum, mint $\mathbb{P}^2$ részhalmaza csak egy végtelenbeli ponttal rendelkezik ld. [A]. Ugyancsak sikerült Abhyankarnak, és tőle függetlenül Makar-Limanovnal bizonyítania, hogy tetszőleges (f, g) Jacobi pár esetén az $f = 0$ fibrum legfeljebb két végtelenbeli ponttal rendelkezik (ld. [M-L]).

Abhyankar azt is bizonyította, hogy a sejtés teljesül, ha az (f, g)-hez tartozó testbővítés normális (ld. [A]). Kaliman nevezetes eredménye szerint tetszőleges Jacobi pár komponálható olyan polinom automorfizmussal, hogy a kapott Jacobi pár minden fibruma irreducibilis legyen (ld. [K]).

Abhyankar módszerét felhsználva, Moh számítógépes kutatással bebizonyította a sejtést a 100-nál kisebb fokszámú polinomok esetére ld. [M]. Moh cikke két részből áll. Előbb azt bizonyította, hogy a sejtés bármely olyan (f, g) ellenpéldájŕa melyre $\deg(f) \le \deg(g) \le 100$, található olyan $c \in \mathbb{C}$ melyre $\deg(f - cg) < \deg(g) \le 100$, és a $(\deg(f - cg), \deg(g))$ lehetséges értékei a következők: $(48, 64)$, $(50, 75)$, $(56, 84)$, and $(99, 66)$. Ezek után azt is sikerült bizonyítania, hogy a fenti négy esethez sem tartozik ellenpélda.

Többen, egymástól függetlenül különböző módszerekkel bizonyították, hogy amennyiben egy (f, g) Jacobi pár olyan, hogy f minden fibruma irreducibilis, és a generikus fibrum racionális görbe, akkor a Jacobi pár invertálható ld. [He], [L-W], [N-N], [R]. Ezt az eredményt egy Némethi Andrással közös cikkben általánosítottuk n dimenzió esetére ld. (N-S). A kétdimenziós esetben pedig Lê Dũng Tráng 2007-ben megjelent cikkében bebizonyította, hogy csupán abból, hogy egy Jacobi pár fibruma racionális, következik a pár invertálhatósága.

A Jacobi sejtéssel kapcsolatban már Abhyankarnál előjött a $kp'q - lpq' = cp^m$ alakú, polinomokra vonatkozó differenciálegyenlet, ahol $k, l, m \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}^*$ és p és q komplex együtthatós polinomok. E differenciálegyenlet megoldásait Hurwitz eredményeit alkalmazva, kombinatorikus módon sikerült leírnom ld. [S].

A doktori értekezés azt a kérdést vizsgálja, hogy mekkora lehet a topológiai foka egy Jacobi párnak. Egyszerű gondolatmenet mutatja, hogy amennyiben egy Jacobi pár topológiai foka 1, akkor a pár automorfizmus.

Orevkov és Domrina bizonyította, hogy a topológiai fok nem lehet 3 és 4 (az, hogy 2 nem lehet, könnyen bizonyítható). Az értekezés fő eredménye szerint a topológiai fok 5 sem lehet.

Az értekezés alapötlete Abhyankar Newton poligonokra vonatkozó vizsgálatainak kiterjesztése. Egy generikus polinom $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ fibrumának végtelenbeli szingularitását ugyan a Newton poligon teljes mértékben leírja, azonban a Jacobi feltétel teljesülése egyáltalán nem egy generikus tulajdonság, ezért itt érdemes az f-hez tartozó Eggers – Wall fát vizsgálni.

Az Eggers Wall fa bármely $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ fibrumának szingularitásait leírja. A Jacobi feltétel miatt, f-nek csak végtelenben van szingularitása. A Jacobian feltételt úgy alakalmazzuk, hogy f szingularitásainak környezetében g tulajdonságait is megvizsgáljuk. E célra igen jól lehet használni Abhyankar Newton poligonokra vonatkozó eredményeinek természetes kiterjesztését, amely segítségével az Eggers – Wall fának egy olyan díszítését, azaz a fa csúcsain értelmezett függvényt definiálunk, amely g tulajdonságait is elég jól leírja.

Az első, bevezető fejezet után a másodikban Abhyankar Newton poligonokra vonatkozó eredményeit foglalom össze. A harmadik fejezet a Puiseux sorok strukturájának a leírásánál gyakran alkalmazot Eggers-Wall fa bevezetése, illetve az e struktúrára épülő fogalmak és egyszerű állítások, jelölések összefoglalása.

A negyedik fejezetben kimondjuk Abhyankar Newton poligonokra vonatkozó alaptételének általánosítását (Proposition 4.2 és Proposition 4.3). Fontos eredmény, amely az Abhyankar eredményei kapcsán természetes módon definiálható részben rendezésről lényegében azt mondja ki, hogy bármely két, az Eggers-Wall élén elég közel levő pont összehasonlítható e parciális rendezés szerint (Proposition 4.4 és Proposition 4.5).

Az ötödik fejezet azt számolja ki, hogy az Eggers-Wall fa adataiból hogyan számolható ki a topológiai fok illetve egy végtelenbeli pontban az f fibrumain a g pólusának rendje (Proposition 5.5 és Proposition 5.8).

A hatodik fejezet az Eggers-Wall fa negyedik fejezetben definiált nem standard parciális rendezését írja le. Bevezetünk egy jelet az Eggers-Wall fa pontjain, amely vagy lefelé vagy felfelé mutat. E nyilak és a nemstandars parciális rendezés között szoros összefüggés van, lefelé mutató nyíl esetén az Eggers-Wall fán előre haladva, a parciális rendezésben kisebb-egyenlő elemeket kapunk, míg felfelé mutató nyíl esetén nagyobb-egyenlőket (Proposition 6.3). A fejezet végén pedig nyilak struktúráját írom le (Proposition 6.6 és Proposition 6.7).

A hetedik fejezet azt vizsgálja, hogyan tudjuk az Eggers-Wall fáról leolvasni, hogy a fibrum egy adott végtelenbeli pontjában g véges értéket vesz fel, vagy nem, továbbá mekkora multiplicitással veszi fel az értéket. A fejezetben felső korlátot adunk a végtelenben levő kritikus pontok számára rögzített topológiai fokszám esetén (Corollary 7.1).

A nyolcadik fejezetben a Jacobi párok számelméletét vizsgáljuk. Bevezetünk az Eggers-Wall fán egy olyan díszítést, amely nem csupán a fibrum szingularitásától függ, hanem a Jacobi pár másik polinomjától is. A bevezetett díszítés struktúráját a lefele menő csúcsok esetén leírtam (Proposition 8.1), amely leírás a topológiai fok vizsgálatakor igen hasznos eszköznek bizonyult.

Az utolsó, kilencedik fejezetben definiáljuk azt a díszítést az Eggers-Wall fa csúcsain, amellyel való számolás elvezet az értekezés fő eredményéhez. Az a tény, hogy Jacobi pár topológiai foka 5 nem lehet, már a fejezet elején levő táblázatból (Proposition 9.1) és az előző fejezet eredményeiből (Proposition 8.4) is következik, így, hogy láthassuk, hogyan is működik a felépített struktúra, új bizonyítást adunk Orevkov és Domrina korábbi eredményeire.

Az értekezésben bemutatott módszer, bár a topológiai fok tekintetében új eredményhez vezetett, biztosan nem elég erős ahhoz, hogy a Jacobi sejtésre pozitív vagy negatív vászt adjon.

A probléma nem igazán az, hogy nagyobb topológiai fok esetén a bemutatott számolás szerteágazóbb és bonyolultabb lesz, hanem az, hogy található olyan díszített Eggers – Wall fa, amelyre az értekezésben kimondott összes tulajdonság teljesül. E díszített Eggers – Wall fához egyébként egy 9 topológiai fokú (f, g) pár tartozna. További érdekessége az említett fának, hogy a hozzá tartozó polinomokra $(\deg(f), \deg(g) = (48, 64)$, ami Moh cikkének (ld. [M]) egyik kivételes esete a négy közül.

Ez a jelenség arra mutat, hogy az értekezésben bemutatott módszer Moh cikkének első részével vethető össze. (Mivel már magáról az Eggers – Wall fáról leolvasható egy polinom fokszáma, ezt az összevetést tényleg meg lehet tenni.) Az értekezésben leírt szűrő minden bizonnyal erősebb a Moh által alkalmazottnál, hiszen be lehet látni, hogy $(\deg(f), \deg(g) = (50, 75)$ esethez nem találunk olyan díszített Eggers – Wall fát, amely rendelkezik az összes megkívánt tulajdonsággal.

További előnye a bemutatott módszernek, hogy a topológiai fok vizsgálata segítségével a Jacob sejtésről sokkal inkább kaphatunk geometriai képet, mint az f és g fokának vizsgálatából.

Hivatkozások

[A 'C] N. A 'Campo, *Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes*, Inv. Math. **20** (1973), 147-169.

[A] S. S. Abhyankar, *Expansion techniques in algebraic geometry*, Tata Inst. Fundamental Research, Bombay, 1977.

[A-M] S. S. Abhyankar and T.-T. Moh, *Embeddings of the line in the plane*, J. Reine Angew. Math. **276** (1975), 149-166.

[A-O] H. Appelgate and H. Onishi, *The Jacobian conjecture in two variables*, J. Pure Appl. Algebra, **37**, 215–227 (1985).

[B-C-W] H. Bass, E. Connell and D. Wright, *The Jacobian Conjecture: Reduction of degree and formal Expansion of the Inverse*, Bulletin of the AMS, **7** (1982), 287-330.

[B-E] M. de Bondt and A. van den Essen, *Nilpotent symmetric Jacobian matrices and the Jacobian Conjecture*, J. Pure Appl. Algebra, **193** (2004), no. 1-3, 61-70.

[B-E 2] M. de Bondt and A. van den Essen, *Nilpotent symmetric Jacobian matrices and the Jacobian Conjecture II*, Pure Appl. Algebra, **196** (2005), 135-148.

[B + M] S. Bochner and W. T. Martin, *Several complex variables*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1948.

[C] L. A. Campbell, *A condition for a polynomial map to be invertible*, Math. Ann. **205** (1973), 243-248.

[D] A. V. Domrina, *On four-sheeted polynomial mappings of* $\mathbb{C}^2$*. The general case*, Mat. Zametki [Math. Notes], **65** (1999), no. 3, 464–467.

[D-O] A. V. Domrina and S. Yu. Orevkov, *On four-sheeted polynomial mappings of* $\mathbb{C}^2$*. I. The case of irreducible branch curve* Mat. Zametki [Math. Notes], **64** (1998), no. 6, 847–862.

[Egg] H. Eggers, *Polarinvarianten und die Topologie von Kurvesingularitäten*, Bonner Math Scrift **147** (1983)

[Ego] G. V. Egorov, *An example of a five-sheeted exotic covering over* $\mathbb{C}^2$, Mat. Zametki [Math. Notes], **71** (2002), no. 4, 532–547.

[Es] A. van den Essen, *Seven Lectures on Polynomial Automorphisms*, Univ. Nijmegen, Report No. 9442 (1994).

[Es2] A. van den Essen, *Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture*, Univ. Nijmegen, Report No. 9540 (1995).

[Es 3] A. van den Essen *Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture*, Progress in Mathematics, **Vol. 190** Birkh"auser, 2000.

[G-M] R.V. Gurjar, M. Miyanishi, *On the Jacobian conjecture for* $\mathbb{Q}$-*homology planes*, J. Reine Angew. Math. **516** (1999) 115–132.

[He] R. C. Heitman, *On the Jacobian Conjecture*, J. Pure Appl. Algebra, **64** (1990) 35-72.

[Hu] A. Hurwitz, *Über Riemann'sche Flächen mit gegebene Verzweigungpunkten,* Math. Ann. **39** (1891) 1-60

[Ka] S. Kaliman, *On the Jacobian conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), 45–51.

[Ke] O.H. Keller, *Ganze Cremona-Transformationen*, Monatsh. Math. Phys. **47** (1939) 299–306.

[L] Lê Dũng Tráng, *The Jacobian Conjecture for rational polynomials* Act. Math. Vietnam. **32** (2007),295-301.

[L-W] Lê Dũng Tráng, C. Weber, *Polynomes a fibres rationnelles et conjecture jacobienne a 2 variables*, C. R. Acad. Sci. Paris **320** (1995) 581–584.

[M-L] G. Makar-Limanov, *Automorphisms of a free algebra on two generators*, Functional Anal. Appl. **4** (1970), 262-264 (Transi, from Funkcional Anal. i. Prilozen **4** (1970), 107-108.)

[M-M] M. Miyanishi, K. Masuda, *Generalized Jacobian conjecture and related topics* Proc. Internat. Conf. on Algebra, Arithmetic and Geometry, Tata Institute of Fundamental Research, 2000 427–466.

[M] T.-T. Moh, *On the global Jacobian conjecture and the configuration of roots*, J. Angew. Math., **340**, 140–212 (1983).

[N-N] W. D. Neumann and P. Norbury, *Nontrivial rational polynomials in two variables have reducible fibres* Bull. Austral. Math. Soc. **58** (1998), 501-503.

[N-S] A. Némethi and I. Sigray, *On the monodromy representation of polynomial maps in n variables*, Stud. Sci. Math Hung. **39** (2002), 361-367

[O] S. Yu. Orevkov, *Rudolph diagrams and an analytical realization of the Vitushkin covering*, Mat. Zametki [Math. Notes], **60** (1996), no. 2, 206–224.

[O 2] S. Yu. Orevkov, *On three-sheeted polynomial mappings of* $\mathbb{C}^2$ Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. [Math. USSR-Izv.], **50** (1986), no. 6, 1231–1240.

[P] S. I. Pintchuk, *A Counterexample to the Strong Real Jacobian Conjecture* Math. Z. **217** (1994) 1-4.

[R] M. Razar, *Polynomial maps with constant jacobian* Israel J. Math. **32** (1979) 97-106.

[S] I. Sigray, *Solution of the polynomial equation* $kp'q - lpq' = cp^m$, to appear in Stud. Math. Sci. Hung.

[S-W] D. W. Sumners, J. M. Woods, *The monodromy of reducible plane curves*, Inv. Math. **40** (1977), 107-141.

[V] A. G. Vitushkin, *Some examples in connection with the problem of polynomial transformations of* $\mathbb{C}^n$, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. [Math. USSR-Izv.] **35** (1971), 269–279.

[V 2] A. G. Vitushkin, *Description of the homology of a branched covering over* $\mathbb{C}^2$, Mat. Zametki [Math. Notes], **64** (1998), no. 6

[Y] J. Yu *On the Jacobian conjecture: reduction of coefficients*, J. Algebra, **171**, 515–523 (1995).