Mengyán Csaba

KONSTRUKCIÓS MÓDSZEREK A VÉGES PROJEKTÍV GEOMETRIÁBAN

Doktori disszertáció

Témavezető: Szőnyi Tamás

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Matematika doktori iskola
Vezető: Laczkovich Miklós

Elméleti Matematika Program
Vezető: Szenthe János

Számítógéptudományi Tanszék, ELTE

2008

1 Bevezetés

A véges projektív geometriában számos algebrai és geometriai módszert lehet felhasználni, hogy új eredményt érjünk el. A geometriai módszerek közül áttekintjük a következőket: beágyazás, partíció, véletlen választás, pontok hozzáadása-törlése és részhalmazok alkalmazása [15]. A problémák megoldásakor további algebrai eszközöket veszünk igénybe, úgymint a Weil becslés és változatai [23], Turán K_r-t nem tartalmazó gráfelméleti tétele kapcsán alkalmazott és a páros gráfok egy-egy segédtétele ([18] és [11]). A tézisben, amely a szerző négy cikkén alapul, ezeket a módszereket a minimális lefogó ponthalmazokkal illetve az erős reprezentáns rendszerekkel összefüggő konstrukciókhoz használjuk a $\mathrm{PG}(2,q)$ síkban.

Egy ponthalmazt *lefogó*nak nevezünk, ha a sík minden egyenese metszi. A lefogó ponthalmaz *minimális*, ha nincs valódi részhalmaza, ami lefogó. A (P,r) pont-egyenes párokból képzett $B = \{(P_1, r_1), ..., (P_k, r_k)\}$ halmazt *erős reprezentáns rendszer*nek nevezzük ha $P_i \in r_j$ akkor és csak akkor teljesül, ha $i = j$. B *maximális*, ha a tartalmazásra nézve maximális [16, 7].

Számtalan nyitott kérdés kapcsolódik a minimális lefogó ponthalmazokhoz és az erős reprezentáns rendszerekhez. A felvetett kérdésekre adott megoldásaink egyben a fent említett módszerek alkalmazási lehetőségeit is demonstrálják.

Az egyik legalapvetőbb kérdés a minimális lefogó ponthalmazokkal kapcsolatban, hogy mely méretekre léteznek (a spektrum probléma). Különösképpen érdekes az alsó és felső korlát. Már az 1940-es években Neumann és Morgenstern észrevették, hogy a $q = 2$ esetében (ami nem más, mint a Fano sík), nem léteznek minimális lefogó ponthalmazok. Éppen ezért mindig feltesszük, hogy q nagyobb mint 2. Alsó korlátra Bruen és Pelikán adott egy általános becslést, amely szerint egy nem-triviális minimális lefogó ponthalmaz legalább $q+\sqrt{q}+1$ pontot tartalmaz [8]. Egyenlőség esetén a minimális lefogó egy Baer részsík. Ezt az alsó korlátot többen megjavították (adott speciális esetekre), például Blokhuis vizsgálta a q prím esetet [6].

Általános felső korlátra vonatkozóan Bruen és Thas eredménye alapvető [9].

1.3 Tétel. (Bruen és Thas, [9]) *Ha B minimális lefogó ponthalmaz a* $\mathrm{PG}(2,q)$ *síkban, akkor $|B| \leq q\sqrt{q}+1$. Egyenlőség esetén B unitál (és q négyzet).*

A Bruen-Thas felső korlát q nem-négyzet esetben javítható, mint bizonyítjuk.

1.4 Tétel. (Szőnyi, Cossidente, Gács, Mengyán, Siciliano, Weiner, [4]) *Legyen B minimális lefogó ponthalmaz* $\mathrm{PG}(2, q)$ *síkban,* $q \neq 5$, *és jelölje* s $\sqrt{q}$ *tört részét. Ekkor* $|B| \leq q\sqrt{q} + 1 - \frac{1}{4}s(1 - s)q$.

Ez a becslés mindig a Bruen-Thas korlát egy legalább $1/8\sqrt{q}$ javítását adja. Ugyanakkor, könnyű látni, hogyha q nincs négyzetszám közelében, akkor cq mértékben javul a felső korlát. A bizonyítás a fentiekben említett Turán-féle segédtételt használja fel [18], és mivel teljes mértékben kombinatorikus, az eredmény bármely véges sík esetére igaz (kivéve talán a $q = 26$ esetet).

2 Konstrukciók térben

Gráfokkal összefüggésben Gyárfás András a $\mathrm{PG}(2, q)$ síknak megfelelő páros gráfok kromatikus számára volt kíváncsi [10]. Emlékeztetésül, a G gráf egy *erős színosztály*a a független élek egy olyan halmaza, amelyre teljesül, hogy ezen élek G indukált részgráfját alkotják. Ha most tekintjük a $\mathrm{PG}(2, q)$ sík pont-egyenes illeszkedési gráfját, azt látjuk, hogy az erős színosztály egy erős reprezentáns rendszernek felel meg. G erős *kromatikus index*e alatt a legkevesebb színt értjük, ami élszínezéssel előáll, úgy hogy az azonos színű élek erős színosztályt alkotnak. Ez utóbbi pedig nem más, mint azon erős reprezentáns rendszerek minimális száma, amelyek particionálják a $\mathrm{PG}(2, q)$ sík pont-egyenes párjait. Illés, Szőnyi és Wettl mutattak rá erre a tényre közös cikkükben [16], ahol utaltak rá, hogy az általános esetben az erős kromatikus index legfeljebb $q^2 + 2q$. Ezt mi tételesen is belátjuk, és triviális becslésnek nevezzük.

Ugyanebben a cikkben belátták, hogy egy erős reprezentáns rendszer mérete legfeljebb $q\sqrt{q} + 1$ a $\mathrm{PG}(2, q)$ síkban. Ebből következik, hogy körülbelül $q\sqrt{q}$ erős reprezentáns rendszer szükséges a pont-egyenes párok particiójához, mivel a pont-egyenes párok száma megközelítőleg q^3. Az említett cikkben ezt be is bizonyították [16].

2.21 Tétel. (Illés, Szőnyi, Wettl, [16]) *Ha q páratlan négyzetszám, akkor a* $\mathrm{PG}(2, q)$ *sík pont-egyenes párjait* $(q - 1)\sqrt{q} + 3q$ *erős reprezentáns rendszerrel* *lehet particionálni.*

Illés, Szőnyi és Wettl a bizonyításhoz Szőnyi parabola konstrukciójából előálló unitálokat (azaz maximális méretű minimális lefogó ponthalmazokat) használtak fel [22]. Ezekkel az unitálokkal particionálták az affin síkot, és egy leképezéssel elérték, hogy a pontokon átmenő érintőket megfelelően permutálják. Végezetül, az így nem lefogott pont-egyenes párokat a triviális becslésben használt egyszerű erős reprezentáns rendszerekkel intézték el. Nem nehéz megmutatni, hogy ha Hermite görbékre cseréljük bizonyításukban a parabola konstrukciós unitált, akkor bármely q négyzetre megkapjuk az eredményüket.

2.22 Tétel. (Mengyán, [3]) *Ha q négyzetszám, akkor a* $\mathrm{PG}(2,q)$ *sík pont-egyenes párjait* $(q-1)\sqrt{q}+3q$ *erős reprezentáns rendszerrel lehet particionálni.*

Mi elsősorban a q^h nem-prím esetet vizsgáljuk. Ehhez az általánosított Buekenhout konstrukciót használjuk [4], ami $q^{h+1}+1$ méretű minimális lefogót ad a $\mathrm{PG}(2,q)$ síkban.

2.16 Tétel. (Szőnyi, Cossidente, Gács, Mengyán, Siciliano, Weiner, [4])
Ha a $h \geq 3$*, akkor a* $\mathrm{PG}(2,q^h)$ *síkban létezik* $q^{h+1}+1$ *méretű minimális lefogó ponthalmaz.*

Remélve, hogy Illés, Szőnyi és Wettl módszeréből az affin sík partícióját a térben is meg tudjuk ismételni, természetesen adódik, hogy a kromatikus index $q^{2h-1}+E(q)$, ahol $E(q) \ll q^{2h-1}$. Ennek bebizonyítására az általánosított Buekenhout konstrukciót használjuk, ami a beágyazás módszerének bemutatására egy kitűnő példa.

2.27 Tétel. (Mengyán, [3]) *Ha* $h \geq 2$*, akkor a* $\mathrm{PG}(2,q^h)$ *sík pont-egyenes párjait* $q^{2h-1}+2q^h$ *erős reprezentáns rendszerrel lehet particionálni.*

Az előző tétel a triviális becslés megközelítőleg q-szoros javítását adja. Amikor $h=2$ és q négyzet, akkor ez az eredmény az Illés, Szőnyi és Wettl eredménynél is kicsit jobb becslést ad.

3 Konstrukciók síkban

A minimális lefogók méretével kapcsolatosan érdekes kérdés, hogy feltéve, hogy adott méretre léteznek, mekkora a számuk. Turán György azt a kérdést fogalmazta meg a kérdéskörben, hogy vajon ez a szám lehet-e polinomiálisnál több nem-izomorf minimális lefogó ponthalmaz bármely méretre. Azon, hogy polinomiálisnál több, azt értjük, hogy található a számukat leíró olyan függvény, amely gyorsabban növekszik mint a függvény változója. Más szóval a függvény alakja $f(q) = q^{g(q)}$, ahol $\lim_{q\to\infty} g(q) = \infty$.

A válasz egyértelműen az, hogy nem létezik polinomiálisnál több nem-izomorf minimális lefogó a spektrum alján: $k = q + 1$ esetén csak az egyenesek vannak (számuk $q^2 + q + 1$), ráadásul ezek mind ekvivalensek, $k = q + \sqrt{q} + 1$ esetén csak a Baer részsíkokat találjuk, amelyek szintén izomorfak. A felső korlátot elérő lefogóknál a kérdés ezzel szemben nem tisztázott: izomorfia erejéig az ismert unitálok száma polinomiális, ha q páratlan (Baker és Ebert [5]), és sokan úgy gondolják, hogy az ismerteken kívül nincsenek is mások. Ugyanakkor mégis lehetséges, hogy a helyzet hasonló a maximális íveknél tapasztaltakhoz, ahol Mathon [19] olyan új eseteket konstruált, amelyekből polinomiálisnál több van [14].

A fejezet fő eredményei a következők.

3.3 Tétel. (Mengyán, [2]) *Léteznek c és C állandók, úgy hogy $q \equiv 1 \pmod 4$ esetén, a nem-izomorf minimális lefogó ponthalmazok száma a* $\mathrm{PG}(2, q)$ *síkban az $[cq \log q, Cq \log q]$ intervallumban polinomiálisnál több.*

(Bár nem bizonyítjuk, de ugyanez mondható a $q \equiv 3 \pmod 4$ esetén is).

3.10 Tétel. (Mengyán, [2]) *Ha q négyzetszám, akkor a* $\mathrm{PG}(2, q)$ *síkban polinomiálisnál több nem-izomorf minimális lefogó ponthalmaz létezik minden méretre az $\left[5q \log q, q\sqrt{q} - 2q\right]$ intervallumból.*

3.11 Tétel. (Mengyán, [2]) *Ha q páratlan vagy ha q páros és $q - 1$ nem prím, akkor a* $\mathrm{PG}(2, q)$ *síkban polinomiálisnál több nem-izomorf minimális lefogó ponthalmaz létezik minden méretre az $\left[5q \log q, q\sqrt{q} - 2q\right]$ intervallumból.*

3.22 Tétel. (Mengyán, [2]) *Legyen d egészszám, $2 \leq d \leq \sqrt{q}$, $d|q-1$. A $2q+1-d$ méretű minimális lefogó ponthalmazok száma több, mint polinomiális.*

(Itt a *log* a természetes logaritmust jelöli).

A bizonyításokat négy alfejezetben tárgyaljuk. Az ötlet mind a négy esetben azonos: vegyünk egy jól ismert minimális lefogót, és módosítsuk úgy, hogy a konstrukció egy bizonyos lépésénél nagyon sok választásunk legyen. A módszerek azonban különbözők, mert nagyban függnek az eredeti lefogótól. A 3.11 Tétel esetén a részhalmaz módszert vetjük be, a 3.22 Tételnél Megyesi konstrukcióját használjuk, vagyis részcsoportot és a mellékosztályait. A 3.10 Tétel bizonyítására a véletlen választásra, míg a 3.3 Tételnél még ezen felül a Weil becslésre is szükség van. (A véletlen választásokra Gács és Szőnyi cikke ad további példákat [13].)

Mindegyik konstrukciónál az a cél, hogy polinomiálisnál több nem-izomorf minimális lefogót találjunk adott méretre (vagy ha ez nem is sikerül, bizonyos intervallumra). Ez persze azt jelenti, hogy ha van kollineáció amely az egyik minimális lefogót a másikba viszi, akkor azt csak egyszer számolhatjuk. A helyzet mégsem ilyen bonyolult, hiszen a $\mathrm{PG}(2,q)$ sík kollineációinak száma biztosan kevesebb, mint q^9, tehát ha több mint polinomiális lefogót találunk, akkor ez automatikusan azt jelenti, hogy több, mint polinomiális példát találtunk.

Végezetül csak annyit, hogy mindegyik konstrukcióban feltételezhetjük, hogy q megfelelően nagy, mivel maga a több, mint polinomiálisra vonatkozó kérdés csak akkor nyer értelmet, ha q a végtelenhez tart.

4 A Megyesi konstrukció általánosítása

Gács adta meg q pontú halmazok olyan végtelen sorozatát, amelyek körülbelül $7q/9$ irányt határoznak meg, és így a kapott minimális lefogó mérete megközelítőleg $2q - 2q/9$ [12].

4.1 Tétel. (Gács, [12]) *Legyen* $3|q-1$, *és* $1, \alpha, \alpha^2$ *egy* G *multiplikatív részcsoport 3-indexű mellékosztályai. Továbbá legyen*

$$U_i = \{(0,0)\} \cup \{(x,0) : x \in \alpha^i G\} \cup \{(x,x) : x \in G\} \cup \{(0,x) : x \in \alpha^i G\}.$$

Jelöljük az U_i *által meghatározott irányokat* $|D_i|$*-vel. Akkor* $|D_1| + |D_2| + |D_3| = 3q + 1 - 2(q-1)/3$, *és* $|D_i| = 7q/9 + O(\sqrt{q})$.

Mind Megyesi, mind Gács konstrukciójában egy részcsoport és annak mellékosztályaiból képződött a minimális lefogó. Felmerült, hogy lehetne-e ezeket a példákat általánosítani, egyfelől a mellékosztályokat növelve, másfelől a mellékosztályokat minél több egyenesre elhelyezve. Bebizonyítjuk, hogy ezt a problémát át lehet fogalmazni bizonyos egyenletek szintjére, és a Weil becsléssel meg lehet oldani. Bizonyos értelemben a probléma megközelítésünk Korchmáros [17] és Szőnyi [21] módszeréhez hasonlatos, bár mégsem azonos velük. Itt ismét feltesszük, hogy q megfelelően nagy, mert a Weil becslés maradék tagja elronthatja az eredményeinket kis q esetén.

A fejezet második részében beszámolunk egy egyszerű beágyazásos módszerről, amellyel viszonylag könnyen nem-Rédei minimális lefogókat (olyanokat, amelyeknél nincs olyan l egyenes, hogy $|B \setminus l| = q$) kaphatunk az általánosított Megyesi konstrukcióból előállított minimális lefogókat felhasználva. Továbbá, új minimális lefogókat gyártunk ezzel a beágyazásos módszerrel.

4.2 Tétel. (Harrach és Mengyán, [1]) *Legyen* $x > 1$ *egészszám. Ha létezik* $2q - x$ *méretű minimális lefogó ponthalmaz a* $\mathrm{PG}(2,q)$ *síkban, akkor létezik* $2q^h - x$ *és* $2q^h - x + 1$ *méretű minimális lefogó ponthalmaz a* $\mathrm{PG}(2,q^h)$ *síkban.*

Végezetül, egy magasabb dimenziós beágyazást vizsgálunk a nem-Rédei minimális lefogókra tekintettel (Gács, Szőnyi, Weiner, [24]). Az eredmények erősen utalnak arra, hogy sok nem-Rédei minimális lefogó található, amelyeknek a mérete nem sokkal $2q$ alatti.

References

Ez a doktori tézis az alábbi cikkeken alapul:

[1] N. V. Harrach, C. Mengyán, Minimal blocking sets in $\mathrm{PG}(2,q)$ arising from a generalized construction of Megyesi, *in preparation.*

[2] C. Mengyán, On the number of pairwise non-isomorphic minimal blocking sets in $\mathrm{PG}(2,q)$, *Des. Codes Cryptogr.* **45** (2007), 259-267.

[3] C. Mengyán, Partitioning the flags of $\mathrm{PG}(2,q)$ into strong representative systems, *Contr. Discr. Math. special ed. dedicated to Ferenc Kárteszi* **3** (2008), 5-12.

[4] T. Szőnyi, A. Cossidente, A. Gács, C. Mengyán, A. Siciliano, Zs. Weiner, On large minimal blocking sets in $\mathrm{PG}(2,q)$, *J. of Comb. Designs* **13** (2005), 25-41.

További cikkek:

[5] R.D. Baker, G.L. Ebert, On Buekenhout-Metz unitals of odd order, *J. Combin. Theory Ser. A.* **25** (2004), 215-421.

[6] A. Blokhuis, On the size of a blocking set in $\mathrm{PG}(2,p)$, *Combinatorica* **14** (1994), 273-276.

[7] A. Blokhuis, K. Metsch, Large minimal blocking sets, strong representative systems, and partial unitals, *Finite Geometries,(F. De Clerck et al. eds.)*, Cambridge Univ.,(1993), 37-51.

[8] A. A. Bruen, Baer subplanes and blocking sets, *Bull. Amer. Math. Soc.* **76** (1970), 342-344.

[9] A. A. Bruen, J. A. Thas, Blocking sets, *Geom. Dedicata* **6** (1977), 193-203.

[10] R. J. Faudree, R. H. Schelp, A. Gyárfás, Zs. Tuza, The strong chromatic index of graphs, *Ars Combinatoria* **29B** (1990), 205-211.

[11] Z. Füredi, Matchings and covers in hypergraphs, *Graphs and Combin* **4** (1988), 115-206.

[12] A. Gács, On the number of directions determined by a point set in $\mathrm{AG}(2,p)$, *Discrete Mathematics* **208/209** (1999), 299-309.

[13] A. Gács, T. Szőnyi, Random constructions and density results, *Des. Codes Cryptogr.*, to appear.

[14] N. Hamilton, R. Mathon On the spectrum of non-Denniston maximal arcs in $\mathrm{PG}(2,2^h)$, *European journal of Combinatorics* **25** (2004), 415-421.

[15] J. W. P. Hirschfeld, *Projective geometries over finite fields*, Clarendon Press, Oxford, 1979, 2nd edition, 1998.

[16] T. Illés, T. Szőnyi, F. Wettl, Blocking sets and maximal strong representative systems in finite projective planes, *Mitt. Math. Sem. Giessen* **201** (1991), 97-107.

[17] G. Korchmáros, New Examples of k-arcs in $\mathrm{PG}(2,q)$, *Eur. J. Comb.* **4** (1983), 329-334.

[18] L. Lovász, *Combinatorial problems and exercises*, American Math. Soc., Providence RI, 2007.

[19] R. Mathon New maximal arcs in Desarguesian planes, *J. Combin. Theory Ser. A.* **97** (2002), 353-368.

[20] T. Szőnyi, Blocking sets in Desarguesian affine and projective planes, *Finite Fields Appl.* **3** (1997), 187-202.

[21] T. Szőnyi, Combinatorial problems for Abelian groups arising from geometry, *Periodica Polytechnica* **19** (1991), 91-100.

[22] T. Szőnyi, Note on the existence of large minimal blocking sets in Galois planes, *Combinatorica* **12** (1992), 227-235.

[23] T. Szőnyi, Some applications of algebraic curves in finite geometry and combinatorics, *Surveys in Combinatorics, Proc. British Comb. Conf* 1997 (ed. R.A.Bailey), 197-236.

[24] T. Szőnyi, A. Gács, Zs. Weiner, On the spectrum of minimal blocking sets in PG$(2, q)$, *J. of Geometry* **76** (2003), 256-281.