Tézisek

a

CLOSED FORMS AND TROTTER'S PRODUCT FORMULA

(Zárt formák és a Trotter formula)

című PhD értekezéshez

Matolcsi Máté

Témavezetők: Sebestyén Zoltán, Fialowski Alice

ELTE Matematika doktori iskola

Vezető: Laczkovich Miklós

Elméleti matematika program

Vezető: Szenthe János

2002

5.1.1 Tétel *Legyen A az e^{tA} C_0-félcsoport generátora a H Hilbert téren. A következők ekvivalensek:*

(i) A korlátos.

(ii) Az e^{tA} félcsoport quázi-kontraktív minden H-beli ekvivalens $(\ ,\ )_0$ skalárszozat esetén.

(iii) Minden H-beli ekvivalens $(\ ,\ )_0$ skalárszorzat esetén létezik olyan $K_0 \in \mathbb{R}$, amelyre teljesül, hogy minden $x \in D(A)$-ra $(x,x)_0 = 1$ esetén fennáll, hogy $\mathrm{Re}\ (Ax,x)_0 \leq K_0$.

6 A Trotter formula konvergenciája

Ebben a fejezetben a generátor bizonyos tulajdonságaival jellemezzük a projekciós Trotter formula konvergenciáját. A következő tétel második része felfogható Kato eredményének megfordításaként.

6.0.1Tétel *Legyen A az e^{tA} C_0-félcsoport generátora a H Hilbert téren. Tekintsük a következő állításokat:*

(i) A korlátos.

(ii) $-A$ egy sűrűn definiált zárt szektoriális a formához asszociált operátor.

(iii) Az $(e^{\frac{t}{n}A}P)^n x$ formula konvergál minden $P \in \mathcal{B}(H)$ projekcióra, és minden $x \in H$-ra, és $t > 0$-ra.

(iv) Az $(e^{\frac{t}{n}A}P)^n x$ konvergál minden ortogonális $P \in \mathcal{B}(H)$ projekcióra és minden $x \in H$-ra és $t > 0$-ra.

A következő implikációk teljesülnek: (i) $\Leftrightarrow$ (iii), (ii) $\Leftrightarrow$ (iv).

Az ötödik és hatodik fejezet eredményeit a [4] publikáció tartalmazza.

Irodalom

[1] B. Farkas, M. Matolcsi: Commutation properties of the form sum of positive, symmetric operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, (2001).

[2] B. Farkas, M. Matolcsi: Positive forms on Banach spaces, *Acta Math. Hung.*, (megjelenés alatt).

[3] M. Matolcsi, R. Shvidkoy: Trotter's product formula for projections, *Arch. Math.*, (megjelenés alatt).

[4] M. Matolcsi: On the relation of closed forms and Trotter's product formula, *(közlésre benyújtva)*.

legyen $Pf := 1_\Omega f$. *Ekkor minden* $f \in E$*-re és* $t > 0$*-ra*

$$S(t)f := \lim_{n\to\infty} (e^{\frac{t}{n}A}P)^n f$$

létezik, és $S(t)_{t>0}$ *pozitív operátoroknak egy folytonos degenerált félcsoportja. Továbbá, az* $S(0) := \lim_{t\to 0} S(t)$ *projekció a következő alakú:* $S(0)f = 1_Y f$, *ahol* $Y \subset \Omega$ *egy mérhető halmaz.*

Ez a tétel W. Arendt-től és C. Batty-től származik.

A fenti eredmények alapján W. Arendt a következő sejtéseket fogalmazta meg 1997-ben:

(a) Legen e^{tA} kontraktív C_0-félcsoport egy H Hilbert téren, és legyen P ortogonális projekció. Ekkor $\lim_{n\to\infty}(e^{\frac{t}{n}A}P)^n x$ konvergens minden $x \in H$-ra és $t > 0$-ra.

(b) Legyen e^{tA} egy pozitív, kontraktív C_0-félcsoport $L^p(X, \Sigma, \mu)$-n (ahol (X, Σ, μ) egy σ-véges mértéktér, és $1 < p < \infty$), és legyen P pozitív kontraktív projekció. Ekkor $\lim_{n\to\infty}(e^{\frac{t}{n}A}P)^n x$ konvergens minden $x \in H$-ra és $t > 0$-ra.

A negyedik fejezet fő eredmńye ezeknek a sejtéseknek a megcáfolása egy-egy ellenpélda konstruálásával.

Az első példában $H = L^2[0,1]$. Tekintjük az (unitér) e^{ith} szorzás félcsoportot H-n, ahol $h = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{(1/2^k, 1/2^{k-1}]} 2^k \pi$. A P projekciót pedig a $Pf = 1 \cdot \int_0^1 f(x)dx$ formulával definiáljuk.

A második példában $H = L^2[0, 2\pi]$. Tekintjük az $e^{tA}f(x) = f(x + 2\pi t)$ eltolás félcsoportot, ahol f-et 2π-periódusú függvénynek tekintjük. Tekintjük továbbá a $g(x) = \frac{1}{\sqrt{34\pi}}\left[4 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^k}} \cos 2^k x\right]$ pozitív, 1 normájú függvényt, és az általa kifeszített 1-dimenziós altérre való ortogonális projekciót jelöljük P-vel.

Mindkét esetben nem-triviális számítások igazolják, hogy az $(e^{\frac{t}{n}A}P)^n f$ sorozat (normája) nem konvergens az $f = 1$ és $f = g$ választás mellett.

A negyedik fejezet a [3] publikációra épül.

5 Egy hasonlósági eredmény

Ennek a fejezetnek az eredményére a hatodik fejezetben lesz szükség a projekciós Trotter formula konvergenciájának karakterizációjánál. Az eredmény azonban önmagában is érdekes. Megjegyezzük, hogy az eredmény megfelelője Banach terekben nem ismert.

Az önadjungált operátorok központi szerepet játszanak a Hilbert terek operátorainak elméletében. Korlátos esetben az önadjungált operátorok és a szimmetrikus szeszkvilineáris formák között természetes bijekció van. Ennek az állításnak a megfelelője a félig korlátos esetben a reprezentációs tétel, amelynek segítségével félig korlátos önadjungált operátorokat gyakran definiálunk félig korlátos zárt formák által. Két egyszerű példa erre a pozitív szimmetrikus operátorok Friedrichs kiterjesztése illetve két pozitív önadjungált operátor formaösszegének konstrukciója. A pozitív önadjungált kiterjesztések elméletét később Krein fejlesztette tovább, míg a formaösszeg és a Trotter formula közötti kapcsolatra Kato egyik híres eredménye mutatott rá.

Ez a disszertáció a szerző ilyen irányú eredményeit mutatja be az [1], [2], [3] és [4] publikációkra építve. A továbbiakban a fejezeteket és tételeket a disszertációnak megfelelően számozom.

1 Pozitív operátorok faktorizációja

Ez a bevezető jellegű fejezet vázolja Z. Sebestyén faktorizációs eljárását, amely kulcsfontosságú lesz a 2. és 3. fejezetben.

Legyen adott egy $D \subset H$ altéren értelmzett $a : D \to H$ pozitív lineáris operátor. Az a operátor $\operatorname{ran} a$ képterén bevezetjük az $[ax, ay] := (ax, y)$ új skalár szorzatot, amely jól definiált, mert a szimmetrikus. Ha még feltesszük, hogy $\mathrm{D}_*(a) := \{y \in H : \sup\{|(ax, y)|^2 : x \in D, (ax, x) \leq 1\} < \infty\}$ sűrű, akkor az új skalár szorzat pozitív definit is. A $(\operatorname{ran} a, [\ ,\ ])$ tér teljessé tételét H_a-val jelöljük. Definiáljuk a $J : H_a \to H$ operátort a $\operatorname{dom} J := \operatorname{ran} a$ és $Jx = x$ összefüggésekkel. Könnyű látni, hogy a pozitív önadjungált $a_K := J^{**}J^*$ operátor kiterjesztése a-nak. Speciálisan, ha a maga is önadjungált, akkor $a = J^{**}J^*$ teljesül.

A faktorizációból következik, hogy

$$\operatorname{dom} a_K{}^{\frac{1}{2}} = \operatorname{dom} J^* = \mathrm{D}_*(a),$$

$$\|a_K{}^{\frac{1}{2}}y\|^2 = \|J^*y\|^2 = \sup\{|(ax, y)|^2 : x \in \operatorname{dom} a, (ax, x) \leq 1\}.$$

Tehát az a_K-hoz tartozó zárt formát megadhatjuk a J^* operátor segítségével.

Az a_K operátort az a operátor Krein-von Neumann kiterjesztésének nevezzük. A fenti faktorizációs eljárás kis változtatásával előállíthatjuk az a operátor a_F Friedrichs

kiterjesztését is, illetve általában az összes úgynevezett extremális kiterjesztést.

A fejezet végén egy konkrét példán mutatjuk be a bevezetett fogalmakat.

2 A formaösszeg

Az első fejezet faktorizációs eljárása kapcsolatot teremt a 'forma módszer' és az 'operátor módszer' között, ezért természetes gondolat, hogy két pozitív operátor formaösszegét is hasonló faktorizációval próbáljuk előállítani. Erről szól a második fejezet.

Legyen a és b két pozitív szimmetrikus operátor, és tegyük fel, hogy $\mathrm{D}_*(a) \cap \mathrm{D}_*(b)$ sűrű H-ban. Ekkor $\mathrm{D}_*(a)$ és $\mathrm{D}_*(b)$ szintén sűrűek, így a H_a és H_b terek, valamint az a_K és b_K operátorok léteznek. Tekintsük a $H_a \oplus H_b$ teret, és a

$$J : H_a \oplus H_b \to H, \operatorname{dom} J = \operatorname{ran} a \oplus \operatorname{ran} b, \quad J(ax \oplus by) = ax + by$$

operátort.

Könnyű megmutatni, hogy $J^{**}J^*$ pozitív önadjungált kiterjesztése $a + b$-nek. A következő tétel azt mutatja, hogy $J^{**}J^*$ a formaösszeg általánosításának tekinthető.

2.1.2 Tétel *Legyen a és b két pozitív szimmetrikus operátor, amelyekre $\mathrm{D}_*(a) \cap \mathrm{D}_*(b)$ sűrű H-ban, és legyen J a fent definiált operátor. Ekkor*

$$a_K \dotplus b_K = J^{**}J^*.$$

A második fejezet fő eredménye a formaösszeg egy kommutációs tulajdonságát bizonyítja.

2.2.4 Tétel *Legyen a és b két pozitív szimmetrikus operátor, amelyekre $\mathrm{D}_*(a) \cap \mathrm{D}_*(b)$ sűrű H-ban, és tegyük fel, hogy $E, F \in \mathcal{B}(H)$, olyan operátorok, hogy E és F $\operatorname{dom} a$-t és $\operatorname{dom} b$-t invariánsan hagyják, és minden $x \in \operatorname{dom} a$-re és $y \in \operatorname{dom} b$-re fennáll, hogy*

$$E^*ax = aFx, \quad F^*ax = aEx, \quad E^*by = bFy, \quad F^*by = bEy.$$

Ekkor

$$E^*(a \dotplus b) \subseteq (a \dotplus b)F \quad \text{és} \quad F^*(a \dotplus b) \subseteq (a \dotplus b)E.$$

4.1.1 Tétel *Legyen $x \in H$. Ekkor*

$$e^{-t(a+b)}x = \lim_{n\to\infty} (e^{-\frac{t}{n}a}e^{-\frac{t}{n}b})^n x$$

minden $t > 0$-ra.

Most ezt a formulát egy speciális esetben alkalmazzuk. Legyen P tetszőleges ortogonális projekció. Definiáljuk a b formát a következőképpen: $D(b) = PH$ és $b(u, v) = 0$ minden $u, v \in PH$-ra. Ekkor $e^{-tb} = P$ teljesül minden $t \geq 0$-ra. Tehát a 4.1.1 Tétel következményeként kapjuk:

4.1.2 Tétel *Legyen P ortogonális projekció, és legyen a zárt forma. Ekkor*

$$S(t)x = \lim_{n\to\infty} (e^{-\frac{t}{n}a}P)^n x$$

létezik minden $x \in H$-ra, és $t > 0$-ra, és $S(t)_{t>0}$ az $a|_{PH}$ forma által generált folytonos félcsoport.

Ennek az eredménynek egy érdekes alkalmazása a következő:

Példa (Dirichlet-féle Laplace operátor) Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz Lipschitz peremmel, és jelölje Δ a Laplace operátort $L^2(\mathbb{R}^n)$-en. Legyen $Pf := 1_\Omega f$. Ekkor minden $f \in L^2(\Omega)$-ra igaz, hogy $\lim_{n\to\infty}(e^{\frac{t}{n}\Delta}P)^n f = e^{t\Delta_\Omega} f$ ahol Δ_Ω jelöli a Dirichlet peremfeltételű Laplace operátort $L^2(\Omega)$-n, azaz $D(\Delta_\Omega) = \{f \in H_0^1(\Omega) : \Delta f \in L^2(\Omega)\}$ and $\Delta_\Omega f = \Delta f$.

Kato fenti eredménye és ez az érdekes alkalmazás adta a motivációt a projekciós Trotter formula további vizsgálatára.

A következő két tétel további olyan eseteket tárgyal, amikor konvergencia teljesül.

4.1.4 Tétel *Legyen $A \in \mathcal{B}(E)$ az $(e^{tA})_{t\geq 0}$ C_0-félcsoport generátora, és legyen $P \in \mathcal{B}(E)$ tetszőleges projekció. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} (e^{\frac{t}{n}A}P)^n x = e^{PAPt}Px$$

minden $x \in E$-re és a konvergencia egyenletes $t \in [0, T]$-re.

4.1.5 Tétel *Legyen (X, Σ, μ) egy σ-véges mértéktér, és legyen $(e^{tA})_{t\geq 0}$ egy pozitív C_0-félcsoport $E = L^p(X)$-en, ahol $1 \leq p < \infty$. Legyen $\Omega \subset X$ egy mérhető halmaz, és*

egyenletnek minden $g \in L_q(\Omega)$-ra létezik gyenge megoldása, ha $q \geq 2n/(n+2)$.

A harmadik fejezet eredményei a [2] publikációban találhatók meg.

4 A Trotter formula projekciókra

A Hibert tereken értelmezett zárt formák és a formaösszeg konstrukciója Kato egyik érdekes tétele szerint kapcsolatban állnak a Trotter formula konvergenciájával. Röviden ismertetjük a fogalmakat:

Legyen a H Hilbert téren adva egy

$$a : D(a) \times D(a) \to \mathbb{C}$$

szeszkvilineáris forma (ahol $D(a)$ a H tér egy altere). Tegyük fel, hogy a alulról korlátos, azaz létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, amelyre

$$\|u\|_a^2 := \mathrm{Re}\ a(u,u) + \lambda(u,u)_H > 0$$

minden $u \in D(a)$, $u \neq 0$ esetén. Feltesszük továbbá, hogy $a + \lambda$ szektoriális és zárt, azaz $|\mathrm{Im}\ a(u,u)| \leq M(\mathrm{Re}\ a(u,u) + \lambda(u,u)_H)$ és a $(D(a), \|\cdot\|_a)$ tér teljes. Röviden a-t *zárt formának* nevezzük. Legyen $K = \overline{D(a)}$ a $D(a)$ altér lezártja H-ban. Jelöljük A-val az a formához asszociált operátort a K téren, azaz

$$D(A) = \{u \in D(a) : \exists v \in K \text{ amelyre } a(u,\phi) = (v,\phi)_H \text{ for all } \phi \in D(a)\}$$

és $Au = v$. Ekkor $-A$ egy e^{-tA} C_0-félcsoportot generál a K téren. Jelöljük Q-val a K altérre való ortogonális projekciót. Definiáljuk most az e^{-ta} operátort a H téren az

$$e^{-ta}x = e^{-tA}Qx, \quad x \in H,\ t \geq 0$$

formulával. Az e^{-ta} folytonos degenerált félcsoportot az *a forma által generált félcsoportnak* hívjuk.

Tegyük most fel, hogy adott egy további b zárt forma is H-n, és definiáljuk az $a+b$ formát $D(a+b) := D(a) \cap D(b)$-n az $(a+b)(u,v) = a(u,v) + b(u,v)$ formulával. Könnyű belátni, hogy $a+b$ ismét csak zárt forma. Kato eredménye szerint a következő Trotter formula teljesül:

Érdekességként megemlítjük, hogy az operátor összeg Friedrichs kiterjesztése (ha létezik) szintén előállítható hasonló faktorizációs eljárással. Ehhez definiáljuk a Q operátort a

$$Q : H \to H_a \oplus H_b, \ \mathrm{dom}\, Q = \mathrm{dom}\, a \cap \mathrm{dom}\, b, \ \ Qx = ax \oplus bx$$

összefüggésekkel.

2.3.1 Tétel *Legyen a és b két pozitív szimmetrikus operátor, amelyekre* $\mathrm{dom}\, a \cap \mathrm{dom}\, b$ *sűrű H-ban. Ekkor $Q^*Q^{**} = (a+b)_F$.*

A fejezet végén megmutatjuk, hogy az $(a+b)_K$, $a \dot{+} b$, és $(a+b)_F$ kiterjesztések általában különböznek egymástól.

Ezt a fejezetet lényegében tartalmazza az [1] publikáció.

3 Pozitív formák Banach tereken

Természetes ötlet megpróbálni a második fejezet eredményeit reflexív Banach terekre álatalánosítani.

Legyen X reflexív Banach tér, és X^* a konjugált duális tere (azaz az X-en értelmezett folytonos, konjugáltan lineáris funkcionálok tere). Legyen $D \subset X$ sűrű altér, és legyen $t : D \times D \to \mathbb{C}$ szeszkvilineáris forma D-n (megállapodás szerint t az első változóban lineáris, és a másodikban konjugáltan lineáris). Tegyük fel, hogy $t(x,x) \geq \gamma\|x\|^2$ valamilyen $\gamma > 0$-ra. Tegyük fel továbbá, hogy t 'zárt' olyan értelemben, hogy $(D, t(\cdot,\cdot)) =: H$ Hilbert teret alkot. Az $i : H \to X$ beágyazás folytonos, így H-t az X tér egy alterének tekinthetjük. A rövidség kedvéért a $[\cdot,\cdot] := t(\cdot,\cdot)$ jelölést fogjuk alkalmazni. A t formához természetes módon asszociálható egy $A : X \to X^*$ operátor: legyen $x \in D$ és tekintsük az $[x,y]$, $y \in D$ funkcionált; ha ez folytonos X felett, akkor létezik egy $z \in X^*$, amelyre $[x,y] = z(y) =: (z,y)$ teljesül. Legyen $Ax := z$.

3.1.1 Tétel *A fenti $A : X \to X^*$ operátor pozitív és önadjungált.*

Természetesen most nehezebb egy operátor önadjungáltságát megmutatni, mint Hilbert terek esetében. A fenti tétel bizonyítása a következő lemmát használja:

3.1.2 Lemma *Ha $B : X^* \to X$ injektív korlátos önadjungált operátor, akkor $A := B^{-1}$ szintén önadjungált.*

A 3.1.1 Tétel segítségével könnyű bebizonyítani a Friedrichs kiterjesztés létezését a szigorúan pozitív esetben.

3.2.1 Tétel *Legyen $a : X \to X^*$ pozitív sűrűn definiált operátor, amelyre $(ax, x) \geq \gamma\|x\|^2$, $\gamma > 0$. Ekkor a-nak létezik pozitív önadjungált kiterjesztése ugyanazzal az alsó korláttal.*

Egy operátor önadjungáltságának bizonyítása történhet még úgy is, hogy megmutatjuk, hogy az operátorunk egy adott önadjungált operátor szimmetrikus kiterjesztése. Ez az érvelés érvényesül a következő lemmában.

3.2.2 Lemma *Legyen $A : X \to X^*$ pozitív önadjungált operátor (itt nem szükséges, hogy A-nak pozitív alsó korlátja legyen). Ekkor létezik egy H Hilbert tér, és egy $J : H \to X^*$ operátor, amelyre $A = JJ^*$ teljesül.*

A pozitív zárt formáknak egy általánosabb definíciója is lehetséges (annak érdekében, hogy az olyan formákra is kiterjesszük a definíciót, amelyeknek alsó korlátja 0). Egy $t : D \times D \to \mathbb{C}$ pozitív formát zártnak nevezünk, ha abból, hogy $x_n \subseteq D$ és $x_n \to x$ X-ben és $t(x_n - x_m, x_n - x_m) \to 0$ következik, hogy $x \in D$ és $t(x_n - x, x_n - x) \to 0$ (megjegyezzük, hogy a fenti definíció ekvivalens a korábbival, ha t-nek pozitív az alsó korlátja). Egy X értékű valószínűségi változó 'kovariancia formája' konkrét példát szolgáltat pozitív zárt formákra.

Legyen $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mu \rangle$ egy valószínűségi mérték tér, és legyen $\xi : \Omega \to X$ egy valószínűségi vátozó (azaz egy gyengén mérhető függvény). Tegyük fel, hogy

$$\int_\Omega f(\xi)\, \mathrm{d}\mu$$

létezik minden $f \in X^*$ esetén. Tegyük fel továbbá, hogy a

$$D = \left\{ f : f \in X^*, \int_\Omega |f(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}$$

halmaz sűrű X^*-ban. (Azt azonban nem szükséges kikötni, hogy $D = X^*$ teljesüljön.)

Lássunk egy konkrét példát: legyen $X = \ell_2$, $\Omega = \{\omega_n : n = 1, 2, \ldots\}$ és $\mu(\{\omega_n\}) = ce^{-(3/2)n}$ egy megfelelő c konstanssal. Legyen $\xi(\omega_n)_k = n^k/k!$. Könnyű belátni, hogy ekkor $D \neq X^*$ sűrű altér.

Feltesszük, hogy $\mathrm{E}\,\xi = 0$, hiszen különben tekinthetjük $(\xi - \mathrm{E}\,\xi)$-t ξ helyett.

Legyen

$$t(f, g) = \mathrm{E}\ (f(\xi)\bar{g}(\xi))$$

minden $f, g \in D$-re. A t formát a ξ valószínűségi változó kovariancia formájának nevezzük.

3.3.1 Tétel *A fenti t forma pozitív zárt forma $D \times D$-n.*

A reflexív Banach tereken definiált pozitív zárt formák a parciális differenciálegyenletekben is szerepet kapnak.

Legyen $X = L_p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, ahol Ω egy sima peremű korlátos tartomány $\mathbb{R}^n$-ben. Definiáljuk az $A : L_p(\Omega) \to L_q(\Omega)$ operátort a következőképpen: $\mathrm{dom}\, A = C_0^\infty(\Omega)$ és

$$Af = -\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ik}\frac{\partial f}{\partial x_k}) + bf$$

ahol $a_{ik} \in C^1(\Omega)$, $b \in L^1_{loc}(\Omega)$, $b \geq 0$ és

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\beta_i\overline{\beta_k} \geq \gamma \sum_{i}^{n} |\beta_i|^2, \gamma > 0$$

mindenütt Ω-n (uniform ellipticitás). Ilyenkor fennáll, hogy

$$(Af, f) = \int_\Omega \left(-\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) + bf \right) \overline{f}\, \mathrm{d}x =$$

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\overline{\partial f}}{\partial x_k} + b|f|^2 \right) \mathrm{d}x \geq \gamma \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|^2 \mathrm{d}x.$$

Továbbá $p \leq 2n/(n-2)$ esetén

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|^2 \mathrm{d}x \geq c\|f\|_p^2, \quad c > 0$$

teljesül a Sobolev-féle beágyazási tétel szerint. Tehát az A operátor alsó korlátja pozitív. Az A operátor Friedrichs kiterjesztése szürjektív, és ez azt jelenti, hogy a

$$-\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) + bf = g$$