

VÉLETLEN GRÁFOK VIZSGÁLATA
MARTINGÁLELMÉLETI MÓDSZEREKKEL

Doktori értekezés

Backhausz Ágnes

Témavezető:

Móri Tamás egyetemi docens, a matematikai tudományok kandidátusa

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar

Matematikai Intézet, Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

MATEMATIKA DOKTORI ISKOLA (Iskolavezető: Laczkovich Miklós)

ELMÉLETI MATEMATIKA PROGRAM (Programvezető: Szűcs András)

2012

Tartalomjegyzék

1. Véletlen gráfok és hálózatok	5
1.1. Bevezetés	5
1.1.1. Az Erdős–Rényi-modell	5
1.1.2. Véletlen rekurzív fák	6
1.1.3. Skálafüggetlen modellek	8
1.1.4. Egyéb modellek	14
1.1.5. Gráfok limeszei	17
1.2. Fő eredmények	18
2. Lokális fokszámeloszlás skálafüggetlen gráfokban	20
2.1. Bevezetés	20
2.2. Fő eredmények	23
2.2.1. Jelölések	23
2.2.2. A gráfmodellre vonatkozó feltételek	25
2.2.3. A kiválasztott csúcsokra vonatkozó feltételek	27
2.3. Martingálok	30
2.4. Lassan változó sorozatok	32
2.5. Bizonyítások	36
2.5.1. Kapcsolat a legalább d fokú csúcsok számával	36
2.5.2. A bizonyítás fő lépései legalább d fokú csúcsokra	39
2.5.3. Az 1. lemma bizonyítása	44

2.5.4.	A 2. lemma bizonyítása	45
2.5.5.	A 3. lemma bizonyítása	46
2.5.6.	A 4. lemma bizonyítása	49
2.6.	Modellek	51
2.6.1.	Lineáris súlyozású fa	52
2.6.2.	Egy lineáris súlyozású modell	54
2.6.3.	Véletlen multifák	62
2.6.4.	Független élek modellje	69
2.6.5.	Ellenpéldák	72
3.	Fokszámok határeloszlása lineáris súlyozású véletlen fákbán	78
3.1.	Bevezetés	78
3.2.	Véletlen fák	79
3.2.1.	Jelölések	79
3.2.2.	Lineáris súlyozású véletlen fák	80
3.3.	Fő eredmények	80
3.4.	Példák	85
3.4.1.	Az Albert–Barabási-fa	85
3.4.2.	Az általánosított PORT-modell	86
3.4.3.	m -elágazó fák	87
3.4.4.	Multifák	87
3.5.	Funkcionális centrális határeloszlás-tétel	90
4.	A háromszöges modell	93
4.1.	A háromszöges modell	94
4.2.	A modell skálafüggetlensége	97
4.2.1.	A súly és a fokszám együttes eloszlása	98
4.2.2.	Skálafüggetlenség súlyokra	109
4.2.3.	Skálafüggetlenség fokszámokra	110

4.3. Súlyok és fokszámok aszimptotikája	114
4.3.1. Rögzített csúcs súlya	115
4.3.2. Maximális súly	119
4.3.3. Rögzített csúcs fokszáma	124
4.3.4. Maximális fokszám	125
Irodalomjegyzék	126
Összefoglalás	132

Köszönetnyilvánítás

Móri Tamásnak a kérdésekért, a válaszokért, a türelemért és a könyvekért.

Csiszár Villőnek a 2.6.2. szakaszt megalapozó kérdéséért és a sok segítségért.

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar Matematikai Intézetének és Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszékének az időért és a helyért.

Másoknak is, ugyanezekért.

1. fejezet

Véletlen gráfok és hálózatok

1.1. Bevezetés

Különbéle véletlen módon fejlődő gráfokat és azok általánosításaként kapható véletlen struktúrákat fogunk vizsgálni valószínűségi számítási, leggyakrabban martingálelméleti módszerekkel. Ezért először röviden ismertetünk néhány elemet a véletlen gráfok és hálózatok kutatásának történetéből. Röviden bemutatunk néhány, sokat vizsgált modellcsaládot is. A felsorolás természetesen nem teljes.

A témakörben részletes monográfiák születtek az utóbbi időben, említhetjük például Bollobás Béla [14, 2001], Mark Newman, Barabási Albert-László és Duncan J. Watts [51, 2006], Rick Durrett [26, 2007], Bollobás Béla, Kozma Róbert és Miklós Dezső [16, 2009], Michael Drmota [25, 2009], Mark Newman [52, 2010] illetve Remco van der Hofstad [67] könyveit.

1.1.1. Az Erdős–Rényi-modell

A véletlen módszer gráfelméleti problémákban való első nevezetes alkalmazásai, illetve a véletlen gráfokkal kapcsolatos jelenségek vizsgálatának kezdetei Erdős Pál és Rényi Alfréd [27, 1959], [28, 1960], illetve Edgar Gilbert [32, 1959] nevéhez fűződnek, noha véletlen gráfmodellek korábbi cikkekben is felbukkannak például Yule [68, 1925] és Simon [62, 1955] cikkeiben, melyeket

később ismertetünk.

Az Erdős–Rényi– és a Gilbert-modell esetében is a gráf csúcsainak száma adott, az élek behúzása véletlenszerűen történik. Az összefüggőséget, az összefüggőségi komponensek méretének aszimptotikus viselkedését vizsgálták, amint a csúcsok száma végtelenhez tart. Erdős és Rényi modelljében a csúcsok száma rögzített, majd adott számú különböző élt húzunk be úgy, hogy minden lehetséges elrendezés egyformán valószínű. Gilbert modelljében bármely két csúcsot a többi pártól függetlenül adott p valószínűséggel kötünk össze. A modellek bevezetésének célja többek között kombinatorikai állítások bizonyítása volt, például ezek segítségével alsó becslést adhatunk bizonyos Ramsey-számokra. Ezek a modellek a sűrű gráfok közé tartoznak: például a Gilbert-modell esetén n csúcs esetén a lehetséges $\frac{n(n-1)}{2}$ élből várhatóan ennek p -szerese van behúzva, azaz a várható élsűrűség limesze pozitív, amint a csúcsok száma végtelenhez tart.

1.1.2. Véletlen rekurzív fák

Időben véletlenül fejlődő gráfokat, például rekurzív módon felépülő fákat is sokan vizsgáltak. Fák sorozatában az átlagos fokszám kettőhöz tart, ha a csúcsok száma végtelenhez tart, így ez ritka gráfnak mondható. Ugyanakkor nem feltétlenül korlátos fokú, egy-egy csúcs szomszédainak száma tetszőlegesen nagy lehet.

A rekurzívan felépülő fákban minden lépésben egy új csúcs jön létre, amely egy véletlenszerűen kiválasztott régihez csatlakozik. Ha a régi csúcsok közül egyenletes eloszlás szerint választjuk ki a szomszédot a korábbi lépésektől függetlenül, egyenletes rekurzív fát kapunk. Ennek a modellnek az egyik első említése Tapia és Meyers nevéhez fűződik [66, 1967]. Véletlen fa esetében érdekes a fa magasságának, azaz az első csúcstól mért legnagyobb távolságnak a növekedése. Ez lényegében a fa méretének logaritmusával növekszik; ezzel kapcsolatos Pittel [56, 1994] eredménye. A fa k . szintjét az első csúcstól k távolságra lévő csúcsok alkotják. A fa profilja a szintek méretéből alkotott sorozat, szélessége pedig a legnagyobb szint mérete. Ezekkel kapcsolatos például Devroye és Hwang [24, 2006], Fuchs, Hwang és Neininger [30, 2006]

munkája. Az egyenletes rekurzív fával kapcsolatos összefoglalók olvashatók Smythe és Mahmoud [63, 1994], illetve Drmota [25, 2009] műveiben.

Ha rekurzívan építünk egy időben véletlenül fejlődő fát, az új csúcs szomszédjának kiválasztásakor nem csak egyenletes eloszlás szerint választhatunk a régiak közül. A legegyszerűbb esetben a valószínűségek a fokszámokkal arányosak, azaz annak valószínűsége, hogy egy, az adott lépésben d fokú régi csúcshoz kötjük hozzá az új csúcsot, d -vel arányos, az egyes lépések pedig egymástól függetlenek.

Ilyen típusú modellt javasolt Yule 1925-ben [68] elágazó folyamattal is leírható biológiai kérdésben, különböző fajok szaporodásának modellezésére. Később hasonló modellt készített Simon [62, 1955] városok növekedésére, Price [57, 1976] pedig bibliográfiai problémák modellezésére. Ezekben a modellekben nem csak fát lehet építeni, Simon modelljében például régi csúcsok között is jöhetnek létre új élek, azonban a végpont kiválasztása továbbra is a fokszámokkal arányos valószínűségekkel történik. Ezek tehát mind „preferential attachment” tulajdonságú modellek: nagyobb fokú csúcsok nagyobb valószínűséggel kapnak új éleket.

Az imént leírt famodellhez hasonlót kapunk, ha az épülő fát a síkba lerajzoljuk, az éleket a régebbi csúcstól az újabb felé irányítjuk, majd a létrejövő térrészek közül választunk egyenletes eloszlás szerint, és az adott térrészbe eső csúcshoz kötjük az új csúcsot. Ennélfogva annak valószínűsége, hogy egy adott d ki-fokú csúcsot választunk, d -vel arányos. Nagyobb fokú csúcsok nagyobb valószínűséggel kapnak új éleket, ezért ez is „preferential attachment” tulajdonsággal bíró modell. Ez az úgynevezett „plane oriented recursive tree” (PORT) modell. Lényegében ebben a formában megtalálható Prodinger és Urbanek 1983-as cikkében [58], majd Szymański [65, 1987] cikkében is. A PORT-modell a fent leírt famodelltől annyival tér el, hogy a valószínűségek kiszámításánál a legelső csúcs, a gyökér kivételével itt minden csúcs összes fokszámánál eggyel kevesebb, a ki-fok számít.

1.1.3. Skálafüggetlen modellek

1999-ben Barabási Albert-László és Albert Réka valós hálózatokat vizsgáltak, például az interneten található oldalak közötti hivatkozásokat [8]. Azt találták, hogy nagy d -re a d fokú csúcsok aránya megközelítőleg $C \cdot d^{-\gamma}$, ahol a γ karakterisztikus kitevő értéke általában 2 és 3 közötti. Ez azt mutatta, hogy az Erdős–Rényi-típusú modellek ebből a szempontból nem jók a valós hálózatok modellezésére, hiszen ott polinomiális lecsengés helyett exponenciális lép fel ebben az úgynevezett aszimptotikus fokszámeloszlásban. Ezért időben fejlődő modellek egy családját javasolták adott m egész szám mellett. Minden lépésben egy új csúcs csatlakozik a hálózathoz, majd ennek véletlenszerűen választunk m szomszédot a régiek közül, úgy, hogy minden d fokú régi csúcs d -vel arányos valószínűséggel kapjon új élt. Azt sejtették, hogy ezek a modellek rendelkeznek a fenti, *skálafüggetlenségnek* elnevezett tulajdonsággal, vagyis nagy d -re a d fokú csúcsok aszimptotikus aránya d -ben polinomiálisan cseng le [8].

$m = 1$ esetén éppen az előző szakaszban leírt véletlen fáról van szó, ez jól meghatározott modell, és rendelkezik a skálafüggetlen tulajdonsággal, bizonyítás található például Móri [44, 2002] cikkében lineáris súlyozásra általánosított esetben. Bollobás, Riordan, Spencer és Tusnády [17, 2001] megmutatták, hogy az Albert–Barabási-modellben egynél nagyobb m -re nem elegendő csupán azt megadni, hogy egy adott régi csúcs egy-egy lépésben mekkora valószínűséggel kap új élt. Azaz a peremeloszlások nem határozzák meg egyértelműen a véletlen gráfot leíró együttes eloszlást. Megfelelő javítással be tudták bizonyítani a skálafüggetlen tulajdonságot. A javított modellben a gráf nem feltétlenül egyszerű, lehetnek többszörös- és hurokélek.

Barabási és Albert cikke után számos valós hálózatot és véletlengráf-modellt vizsgáltak skálafüggetlenség szempontjából [8, 1999]. A valós hálózatok közül méréseket végeztek például az interneten, ahol a csúcsok a számítógépek vagy routerek, az élek pedig a köztük futó vezetékek lehetnek. A world wide web, az internetes oldalak összessége is vizsgálható, ilyenkor a csúcsok az oldalak, és ha az egyik hivatkozik a másikra, kettőjük között (irányított) élt húzunk be. Kutatók publikációs tevékenységéből is készíthetünk hálózatot:

két kutató között akkor fusson él, ha van közös cikkük. Szociális hálózatokban a csúcsok szintén emberek, a köztük futó élek pedig ismeretséget vagy más típusú kapcsolatot jelölnek. A γ karakterisztikus kitevőre az internet esetében 2,2, a world wide web-en be-fokra 2,1, ki-fokra 2,5, közös filmben szereplő színészek szociális hálózatában 2,3 körüli értékek adódtak [67, van der Hofstad].

Ezen valós hálózatok modellezésére többféle – nagy részben skálafüggetlen – véletlengráf-modell született. Ezekről és tulajdonságaikról (összefüggőség, átmérő, járványterjedés) összefoglalás található például Durrett [26, 2007], illetve Newman, Barabási és Watts [51, 2007] könyvében. Az alábbiakban röviden ismertetünk néhány modellt, melyek közül többet a későbbiekben is használunk majd. Skálafüggetlenségnek a fentiek alapján a következő tulajdonságot fogjuk hívni.

1.1. definíció. *Gráfok véletlen sorozata skálafüggetlen, ha a d fokú csúcsok aránya minden d -re 1 valószínűséggel konvergál valamely konstans c_d -hez, amint a csúcsok száma tart végtelenhez, továbbá $\sum_{d=0}^{\infty} c_d = 1$, és $c_d d^\gamma$ pozitív határértékkel rendelkezik valamilyen γ -ra, amint $d \rightarrow \infty$. Vagyis a (c_d) sorozat, az aszimptotikus fokszámeloszlás polinomiálisan cseng le.*

Egyszerű lineáris modellek

A kiindulópont előző szakaszban ismertetett Albert–Barabási-fa, amikor az új csúcs egyetlen adott régihez csatlakozik, és ennek kiválasztása fokszámokkal arányos valószínűségekkel történik a korábbi lépésektől függetlenül. Erre a következőképpen is gondolhatunk. Az új csúcs létrejöttkor kiválasztunk egy élt egyenletes eloszlás szerint, majd ennek egyik végpontját szintén egyenletes eloszlás szerint, és ehhez kötjük az új csúcsot. Az egyes véletlen választások itt is függetlenek.

Móri Tamás [44, 2002] véletlen fákról szóló cikkében a csatlakozási valószínűség a régi csúcs fokszámának lineáris függvényeként adható meg, így a modelleknek egy egyetlen paraméterrel rendelkező családjára sikerült skálafüggetlenséget bizonyítani. Ezzel a modellel a 2.6.1. szakaszban és a 3.

fejezetben is foglalkozunk majd.

Egy másik kétparaméteres családban is skálafüggetlenség lép fel. Itt az új csúcsot minden régivel a többi döntéstől függetlenül kötjük össze, és az összekötési valószínűség lényegében a régi csúcs fokszámának lineáris függvénye [39, 48, Katona, Móri, 2006, 2007]. Részletesebben a 2.6.4. szakaszban szerepel ez a modell.

Cooper és Frieze [20, 2003] modellje meglehetősen általános. Lényeges különbség az eddigiekhez képest, hogy a régi csúcsok között is keletkezhetnek új élek. Pontosabban, minden lépésben α valószínűséggel régi csúcsok között jön létre él, $1 - \alpha$ valószínűséggel új csúcs keletkezik. Ha új csúcs keletkezett, akkor a hozzá csatlakozó élek száma is véletlen, de ennek eloszlása a modell rögzített paramétere, és a keletkező élek száma korlátos. Az új csúcs élei β valószínűséggel egyenletes eloszlás szerint, $1 - \beta$ valószínűséggel a régi csúcsok fokszámával arányos valószínűséggel csatlakoznak a régi csúcsokhoz. Ez azt eredményezi, hogy annak valószínűsége, hogy egy régi csúcs új élt kap, a fokszámának rögzített lineáris függvényével arányos, csakúgy, mint az eddig említett modellekben. Ha nem jön létre új csúcs, akkor véletlen számú új él jön létre régi csúcsok között. Az élek száma korlátos, és eloszlása minden lépésben ugyanaz. Egy-egy új él kezdőpontját δ valószínűséggel egyenletesen, $1 - \delta$ valószínűséggel fokszámokkal arányosan, végpontját γ valószínűséggel egyenletesen, különben fokszámok szerint választjuk. Tehát itt is a fokszámok lineáris függvényei játszanak szerepet. A sorsolások mindenhol a korábbi lépésektől függetlenek. Ebben a modellben Cooper és Frieze megfelelő feltételek mellett bizonyít skálafüggetlenséget [20, 1. tétel, 2. tétel].

Deifen, van der Esker, van der Hofstad és Hooghiemstra [22, 2009] olyan gráfmodellekben kerestek skálafüggetlen viselkedést, melyben az új csúcs fokát szintén lépésről lépésre véletlenszerűen sorsoljuk ki adott eloszlás szerint, azonban ez az eloszlás nem exponenciálisan, hanem polinomiálisan csökkenő. Azaz ha p_d valószínűséggel lesz az új csúcs foka d , akkor $p_d d^\tau$ konvergens $d \rightarrow \infty$ esetén valamely τ -val. Megfelelő feltételek mellett ilyenkor is skálafüggetlen viselkedés lép fel. A karakterisztikus kitevő a (p_d) -hez tartozó kitevő és egy, az eredeti gráfmodellből számítható kitevő minimuma lesz.

Csoportokban fejlődő lineáris modellek

Az eddig felsorolt modellekben a régi csúcsok közül éleket szerzőket lényegében külön-külön, fokszámuktól függő valószínűséggel választjuk ki, nem pedig csúcsoknak bizonyos, esetleg megadott tulajdonsággal rendelkező csoportját. Azonban valós hálózatoknál, különösen a szociális vagy a már említett szerzői hálózatok esetében elképzelhető, hogy egyszerre több ember működik együtt (például több szerző közösen készít egy cikket), és ezzel növekszik annak valószínűsége is, hogy a későbbiekben is újra együttműködnek. Vagyis annak valószínűsége, hogy egy csoport tagjai egyszerre kapnak új élt, a csoport tulajdonságaitól függ, és sokszor közösen szereplő csoportok esetleg nagyobb valószínűséggel működnek együtt.

Egy ilyen skálafüggetlen modell a véletlen multifa [49, Móri, 2010]. Itt adott $m \geq 2$ egész. Egy teljes m csúcsú gráfból indulunk ki. Minden lépésben egyenletes eloszlás szerint kiválasztunk egy m nagyságú, már teljes gráfot alkotó csoportot, és az újonnan születő csúccsal összekötjük minden tagját. Részletesebben a 2.6.3. szakaszban lesz erről szó.

Sridharan, Yong Gao, Kui Wu és Nastos lényegében ezt a modellt javasolták az interneten szerveződő, emberek közötti ismeretséget rögzítő hálózatok modellezésére [64, 2011]. Cikkükben az olyan élek számát vizsgálják, melyek két végpontjának éppen k közös szomszédja van. Azt igazolják, hogy ennek várható értéke polinomiálisan cseng le, amint k végtelenhez tart.

Egy további lehetőség a 2.6.2. szakaszban szereplő modell, mely speciális esete a publikációs modellről szóló cikkben található [5]. Ezeknek lényeges eleme, hogy a régi csúcsok közül úgy választunk adott nagyságú csoportot, hogy egy adott csoport kiválasztásának valószínűsége a csoport tagjainak összes fokszámával, illetve összsúlyával arányos. Itt bármely csoport kiválasztható. Ezekben a modellekben is skálafüggetlen viselkedést keresünk.

A publikációs modellben [5] fokszámok helyett minden pont nemnegatív súllyal rendelkezik, és az ezt leíró valószínűségi változók nem csak diszkrét, hanem folytonosak is lehetnek. A modellt kutatók publikációs tevékenységének segítségével fogalmazzuk meg az érthetőség kedvéért.

Minden kutató pozitív súllyal rendelkezik. A súly kezdetben is véletlen, és később véletlenszerűen növekedhet. Azt tükrözi, hogy az adott kutató mennyire sokat szereplő tagja a közösségnek. Gondolhatunk egy kutató addigi pályafutása során összegyűjtött impaktfaktorára. Az, hogy a kutató fontossága sosem csökken, és hogy a kutatók örök életűek, nem életszerű feltevés.

Az idő előrehaladtával minden lépésben kutatók véletlenszerűen választott csoportja közösen cikket ír. Először kisorsoljuk a szerzők számát. Majd kiválasztjuk őket: annak valószínűsége, hogy egy adott csoportot választunk, a csoport tagjainak összsúlyával arányos. Vagyis a modell „preferential attachment” tulajdonságú: nagyobb súlyú kutatók nagyobb valószínűséggel kerülnek be az új cikk szerzői közé. Az új cikk szerzőinek súlya véletlen súllyal növekszik. Végül új kutató csatlakozik, véletlen kezdősúllyal.

A folytonosság a súlyokban jelenhet meg: mind a kezdősúlyok, mind a jutalmak eloszlása lehet folytonos valószínűségi változó, a súlyok és arányaik is tetszőleges pozitív értékeket felvehetnek.

Ha a súlyokat leíró valószínűségi változók diszkrét, tekinthetjük a d súlyú kutatók arányát. Ez 1 valószínűséggel konvergens, és a limeszek sorozata polinomiálisan csökkenő. Vagyis ez is skálafüggetlen modell. Ahhoz, hogy az aszimptotikus eloszlások polinomiális csökkenését igazoljuk akár a diszkrét, akár a folytonos esetben, a felújítási egyenlethez hasonló, de annál bizonyos értelemben általánosabb rekurzív megoldásának aszimptotikus viselkedését kell vizsgálni [4].

Feltéve, hogy a súlyokat leíró valószínűségi változók eloszlása folytonos, tekintsük minden időpontban a legalább t súlyú szerzők arányát. Megfelelő feltételek mellett a legalább t súlyú szerzők aránya 1 valószínűséggel konvergál valamely $G(t)$ véletlentől nem függő számhoz, amint az idő és vele együtt a szerzők száma végtelenhez tart. $G(t)$ -re egy Volterra-típusú integrálegyenlet írható fel. A megoldásról belátható, hogy alulról és felülről korlátozható azonos kitevőjű polinomiálisan csökkenő függvényekkel, majd Laplace-transzformáltakra vonatkozó Tauber-típusú állítások felhasználásával igazolható, hogy további monotonitási feltételek mellett valóban poli-

nomiálisan csökken, amint t tart a végtelenhez [4]. A kitevő a súlyokat és jutalmakat meghatározó véletlen mennyiségek várható értékétől függ.

Valójában a multifában és a fenti modellben is teljesül, hogy annak valószínűsége, hogy egy csúcs új élt kap egy adott lépésben, csupán éppen érvényes fokszámától, esetleg súlyától függ, és nem tartjuk számon, hogy mely csoportok hányszor működtek együtt közösen. A 4. fejezetben olyan modellt mutatunk [7, 2012], melyben minden lépésben három csúcs lép kölcsönhatásba. A modell könnyen általánosítható lenne más nagyságú csoportokra is. Az eddigiektől való lényeges eltérés az, hogy itt nem csak a csúcsok fokszámát tartjuk nyilván, hanem minden háromszög nemnegatív súllyal rendelkezik, mely az idő előrehaladtával véletlenszerűen növekszik, és azt mutatja, hogy az adott három csúcs eddig hányszor lépett kölcsönhatásba. Többször együttműködő csúcsok nagyobb valószínűséggel lépnek ismét kölcsönhatásba. Itt is skálafüggetlen viselkedés tapasztalható, ezt a 4. fejezetben fogjuk bizonyítani.

Nemlineáris súlyozású modellek

Rudas Anna, Tóth Bálint és Valkó Benedek [61, 2007] véletlen fákat vizsgáltak, azonban a csatlakozási valószínűségek a régi csúcs fokszámának nem feltétlenül lineáris függvényével voltak megadva. Ha ez a függvény bizonyos feltételeket teljesít, a modellre skálafüggetlenséget lehetett igazolni az elágazó folyamatok elméletének segítségével. Sőt ezzel a módszerrel nem csak az adott fokú csúcsok arányát lehet vizsgálni, hanem rögzített, véges fák előfordulási arányát is. Ezekre az előfordulási arányokra is 1 valószínűségű konvergenciát bizonyítottak az említett cikkben. A véletlen fák és elágazó folyamatok kapcsolatáról szóló eredmények összefoglalása található Rudas Anna és Tóth Bálint cikkében [60, 2007].

Szintén nemlinearitás lép fel Dereich és Mörters modelljében is [23, 2009], itt azonban az új csúcsot minden régivel a többi döntéstől függetlenül kötjük össze, és az összekötési valószínűség függ a régi csúcs éppen érvényes fokszámától. Így az új csúcs foka nem rögzített, lépésről lépésre véletlenszerűen változik, és nem is előre adott korlátos eloszlású, mint Cooper és Frieze

előző szakaszban említett modelljében [20]. Igazolható, hogy az új csúcs fokszámának eloszlása Poisson-eloszláshoz konvergál, és megfelelő feltélek mellett a skálafüggetlenség is belátható.

Másoláson alapuló modellek

A skálafüggetlenség szempontjából is érdekesek a másolást használó modellek [1, Aiello, Chung, Lu, 2000], [54, Pastor-Satorras, Smith, Sole, 2003]. Ilyenkor is minden lépésben egy új csúcs jön létre, és egyenletes eloszlás szerint választunk egyet a régi csúcsok közül is. Ezután a legegyszerűbb esetben az új csúcsot a kiválasztott régi csúcs szomszédjaihoz kötjük hozzá, magához a kiválasztotthoz nem. Az újonnan behúzott éleket egymástól függetlenül p valószínűséggel megtartjuk, különben elhagyjuk. Majd az új csúcs további éleket is kaphat, a modell pontos leírásától függően. Ez fehérjék hálózatainak és a világhálónak is használható modellje lehet, mert ezekben a hálózatokban gyakoriak a sok közös szomszédal rendelkező csúcsok. Ugyanakkor kiegészítő feltételek mellett sem sikerült a skálafüggetlenséget matematikai értelemben (1.1. definíció) bizonyítani. Bebek, Berenbrink, Cooper, Friedetzky, Nadeau és Sahinalp a skálafüggetlenséget feltételezve meghatározták a karakterisztikus kitevőt, miután megfelelő módosítással elérték, hogy az éllel nem rendelkező csúcsok aránya ne tartson egyhez [9, 2006].

Egy másik hasonló modellben [36, Jordan, 2011] minden lépésben minden csúcsnak egy gyermeke születik. Az újonnan született csúcsok mindegyike α valószínűséggel csatlakozik a szülőjéhez, a szülőjének minden szomszédjához β valószínűséggel, végül a szülője szomszédjainak gyermekeihez γ valószínűséggel. Minden egyes ilyen típusú csúcspárra egymástól függetlenül döntünk a csatlakozásról. Itt a paraméterek egy megadott tartományára sikerült a modell skálafüggetlenségét bizonyítani.

1.1.4. Egyéb modellek

Az eddig leírt modellekben tipikusan minden lépésben egy új csúcs jött létre, néhány véletlenszerűen kiválasztott régi csúcshoz csatlakozott, és az

aszimptotikus fokszámeloszlás csökkenését, a skálafüggetlenséget vizsgáltuk. A későbbiekben ehhez hasonló modellekkel foglalkozunk majd. Az összehasonlítás kedvéért azonban néhány, teljesen más módszerrel felépített véletlen gráfot is ismertetünk az alábbiakban. Azt látjuk majd, hogy ezekben a modellekben a felvetődő kérdések is más természetűek.

Rátermettségi modellek

Véletlen modellek egy másik családjában adott a csúcsok száma, és minden csúcs előre rögzített rátermettséggel (fitness) rendelkezik, például a t csúcs rátermettsége α_t . Ezután bármely két csúcsot, t -t és u -t a többi választástól függetlenül $p_{t,u}$ valószínűséggel kötünk össze, ahol ez a valószínűség a két csúcs rátermettségének, α_t -nek és α_u -nak függvénye.

Ide sorolhatjuk a már említett Gilbert-modellt is [32, 1959], ahol $p_{t,u}$ rögzített, nem függ t, u -tól.

Csiszár Villő, Hussami Péter, Komlós János, Móri Tamás, Rejtő Lídia és Tusnády Gábor cikkében [21, 2012] ez $p_{t,u} = \frac{\alpha_t \alpha_u}{1 + \alpha_t \alpha_u}$, majd ebben vizsgálnak statisztikából származó kérdéseket, például maximumlikelihood-becslést a paraméterekre. Ez statikus modell: a gráf a korábban említett Erdős–Rényi-modellhez hasonlóan nem változik az időben, hanem a csúcsok száma rögzített, és egyetlen sorsolás után az élek is változatlanok.

Britton, Deijfen és Martin-Löf cikkében [18, 2006] az α_t számokat is véletlenszerűen, független azonos eloszlás szerint sorsolják, majd

$$p_{t,u} = \frac{\alpha_t \alpha_u}{\left(\sum_v \alpha_v\right) + \alpha_t \alpha_u}.$$

Az α_t eloszlásának megfelelő választásával skálafüggetlenség is elérhető.

Ilyen típusú modellekről olvashatunk még van der Hofstad [22], valamint Bollobás, Janson és Riordan [15, 2007] munkáiban.

Konfigurációs modell

Kérdés, hogy ha adott a csúcsok száma és a fokszámok sorozata, hogyan építhető véletlen gráf, mely erre illeszkedik. Bollobás Béla konfigurációs mo-

dellje [13, 1980] lényegében a következő. Minden csúcshoz annyi élvéget teszünk, amennyi a számára előírt fokszám. Ezután két véletlenszerűen, egyenletesen, a múlttól függetlenül kiválasztott élvéget összekötünk. A megmaradó fokokon ezt ismételjük: két véletlenszerűen kiválasztottat összekötünk. Ezt folytatjuk, amíg minden él meg nem születik. Nehézséget okozhat, hogy a véletlenszerű összekötések során többszörös élek és hurokélek is keletkezhetnek. Ha egyszerű gráfot szeretnénk, ezeket az eseteket el kell hagyni.

Ezt a modellt is többen vizsgálták, például összefüggőség és a komponensek mérete szempontjából [42, 1995], [43, 1998], [53, 2000].

Élátkötős modellek

Az alábbi esetben a gráfnak többszörös élei és hurokélei is lehetnek. Induljunk ki egy adott gráfból. Minden lépésben egyenletes eloszlás szerint kiválasztunk egy élt, annak egyenletes eloszlás szerint az egyik végpontját. Az élnek ezt a végét átkötjük egy véletlenül választott másik csúcshoz. Ezt a fokszámok lineáris függvényével arányos valószínűséggel választjuk: annak valószínűsége, hogy az él új végpontja egy adott d fokú csúcs lesz, $d + \kappa$ -val arányos, ahol κ a modell rögzített paramétere. Az él másik végpontja változatlan.

Ezt a lépést ismételve egy Markov-láncot kapunk a megadott csúcs- és élszámmal rendelkező gráfokon. Kérdés, hogy létezik-e stacionárius eloszlás, és ha igen, hogyan írható le, illetve milyen gyors a stacionárius eloszláshoz való konvergencia. Ezeket a kérdéseket vizsgálja Ráth Balázs és Szakács László [59].

Egyszerű asszortatív modell

Callaway, Hopcroft, Kleinberg, Newman és Strogatz [19, 2001] modellje a következő. Minden lépésben egy új csúcs keletkezik. Majd δ valószínűséggel kiválasztunk két csúcst, melyek között az új is szerepelhet, de két régit is lehet választani, és őket összekötjük. Mivel nem minden lépésben születik él, a gráf nem feltétlenül összefüggő, δ -tól függ, hogy milyen valószínűséggel jön

létre nagy komponens. Itt fázisátmenet lép fel: kritikus értéknél kisebb δ -ra a valószínűség nullához, annál nagyobbra pozitív értékhez tart, ha a csúcsok számával végtelenhez tartunk [19].

További érdekes tulajdonsága a modellnek, hogy asszortatív, azaz egy véletlenszerűen választott él két végpontjának fokszáma közötti korreláció pozitív. Másképpen fogalmazva: nagy fokú csúcsok tipikusan nagy fokúakkal vannak összekötve [19]. Ez a jelenség nemigen lép fel olyan modellekben, melyekben minden lépésben csak az új csúcs kap új éleket.

1.1.5. Gráfok limeszei

Véletlen gráfok viselkedését fogjuk vizsgálni, amint a csúcsok száma végtelenhez tart. Ezekben a modellekben az élek száma a csúcsok számának lényegében konstansszorososa. Ugyanakkor minden rögzített csúcs fokszáma egy valószínűséggel végtelenhez tart. Ettől eltérő gráfmodellekben többféle limeszfogalom is használható, ezek közül kettőt röviden ismertetünk, bár ezeket nem fogjuk használni.

Benjamini és Schramm [10, 2001] korlátos fokú gráfok konvergenciáját definiálta. Legyen (G_n) korlátos fokú gráfsorozat, azaz minden n -re G_n -ben minden fokszám legfeljebb d . A gráfsorozat konvergens, ha minden H véges gyökeres gráfra és r pozitív egészre annak valószínűsége, hogy egy G_n -ben egyetlen eloszlás szerint választott véletlen csúcs r sugarú környezete H -val izomorf, konvergens, amint $n \rightarrow \infty$. A csúcs r sugarú környezete a gráfbeli, éleken mért távolságra vonatkozik.

Lovász László és Szegedy Balázs az alábbi fogalmat javasolták [40, 2006]. (G_n) véges egyszerű gráfok sorozata, a csúcsok száma végtelenhez tart. Adott F, G egyszerű gráfokra $\text{hom}(F, G)$ jelöli az F -ből G -be menő homomorfizmusok számát. Ezek olyan leképezések, melyek csúcsokhoz csúcsokat rendelnek, és bármely két szomszédos csúcs képe is szomszédos. Ezután

$$t(F, G) = \frac{\text{hom}(F, G)}{|V(G)|^{|V(F)|}}$$

a homomorfizmussűrűség, azaz annak valószínűsége, hogy F csúcsait véletlenszerűen egyetlen eloszlás szerint G -nek nem feltétlenül különböző csúcsaiba képezve

homomorfizmust kapunk. A gráfsorozat konvergens, ha $t(F, G_n)$ minden véges egyszerű F -re konvergens.

A később vizsgált gráfsorozatokban nincs egyetlen korlát a fokszámmokra. Ugyanakkor az élek száma n csúcs esetén lényegében n -nek konstansszorososa, míg a csúcspárok száma n^2 -tel arányos. Vagyis az élsűrűség és minden más homomorfizmussűrűség nullához konvergál, a fenti fogalom az itt vizsgált esetekben nem ad érdekes eredményt.

1.2. Fő eredmények

Olyan véletlen gráfmodellekkel vagy ezek módosításaival fogunk foglalkozni, melyekben lépésenként egy új csúcs születik, majd ezt néhány véletlenszerűen kiválasztott régivel kötjük össze. Sok esetben érvényes lesz, hogy nagyobb fokú csúcsok nagyobb valószínűséggel kapnak új éleket, ezt nevezik "preferential attachment" tulajdonságnak.

A modellekben közös az aszimptotikus fokszámeloszlás létezése: a d fokú csúcsok aránya 1 valószínűséggel konvergens, amint a lépések száma végtelenhez tart. Sok esetben a limeszek sorozata polinomiálisan csökkenő, azaz skálafüggetlenséget találunk vagy épp feltételezünk (1.1. definíció). Lesz olyan modell is, ahol foksámok helyett súlyokat használunk.

A 2. fejezetben skálafüggetlen, vagy legalábbis aszimptotikus fokszámeloszlással rendelkező véletlen gráfokban keresünk lokális fokszámeloszlást. Pontosabban, ha a gráf egésze helyett csak bizonyos módon kiválasztott csúcsokat tekintünk, és itt számítjuk ki a teljes gráfban d fokú csúcsok arányát, ez az arány más határértékkel rendelkezik, mint az egész gráfban a d fokú csúcsok aránya. A konvergencia itt is 1 valószínűségű.

A kiválasztott csúcsok halmaza állhat például egy rögzített csúcs szomszédaiból, vagy egy adott csúcstól adott távolságra lévő csúcsokból, néhány csúcs közös szomszédaiból. A 2. fejezetben elégséges feltételeket adunk az így kapható lokális aszimptotikus fokszámeloszlás létezésére, és azt is megmutatjuk, hogyan lehet ezt meghatározni a gráfmodellt és a kiválasztott csúcsok halmazát jellemző mennyiségekből. Ez modelfüggetlen eredmény, a modellt és

a kiválasztási eljárást sem kell pontosan ismerni, elégséges feltételeket adunk meg. Ezután megmutatjuk, hogy a tétel hogyan alkalmazható konkrét modellekben. A fő eredmények a [3, 2011] és [6, 2011] cikkekben találhatók.

A 3. fejezetben a már említett lineáris súlyozású fában rögzítünk egy helyet, és az ide érkező csúcsot vizsgáljuk. Tekinthetjük például a gyökérhez, az első csúcshoz harmadikként csatlakozó csúcsot, noha nem tudjuk, hogy ez hányadik lépésben jön létre. Kérdés a rögzített helyen lévő csúcs fokszámának megfelelő skálázás utáni határeloszlása. Az ezzel kapcsolatos eredmények a [2, 2011] cikkben olvashatók.

A 4. fejezetben egy hármas csoportok által meghatározott módon fejlődő véletlen modellt vezetünk be és vizsgálunk. Itt a csúcsok, az élek és a csúcsok által alkotott háromszögek is pozitív súllyal rendelkeznek, mellyel azt tartjuk számon, az adott csúcs, csúcspár vagy háromszög hányszor szerepelt kölcsönhatásban. Minden lépésben három csúcs lép kölcsönhatásba. Ez lehet egy újonnan születő és két korábbi, vagy három régi csúcs. Választhatjuk őket egyenletes eloszlás szerint, vagy az élek, illetve háromszögek súlyával arányosan.

A súlyokon kívül egy rögzített csúcs fokszáma is vizsgálható, mely azt méri, hogy az adott csúcs hány különböző másikkal működött együtt. A súly és a fokszám együttes aszimptotikus eloszlását, azaz az adott súlyú és fokszámú csúcsok arányának 1 valószínűségű limeszét fogjuk vizsgálni. Ezután a súlyokra és a fokszámokra is skálafüggetlenséget bizonyítunk. Megvizsgáljuk adott csúcs súlyának, fokszámának és a maximális súlynak és fokszámának az aszimptotikus viselkedését is. Az eredmények egy része a [7, 2012] cikkben található.

A bizonyítások módszerei mindhárom fejezetben a martingálelmélet területéről származnak. Ehhez használható például Neveu könyve [50, 1975]. A második és negyedik fejezetben közvetlenül alkalmazunk szubmartingálok aszimptotikájára vonatkozó eredményeket. A harmadik fejezetben urnamodellekkel kapcsolatos állításokat használunk, ezek szokásos bizonyítása azonban szintén martingálok segítségével történik, mint például Gouet cikkében [33, 1993].

2. fejezet

Lokális fokszámeloszlás skálafüggetlen gráfokban

2.1. Bevezetés

Ha egy valós hálózatról feltételezzük a skálafüggetlen viselkedést, értelmes kérdés lehet az úgynevezett karakterisztikus kitevő becslése. Ha a d fokú csúcsok aránya a nagyméretű gráfban c_d ($d \geq 0$), és $c_d d^\gamma$ értéke nagy d esetén megközelítőleg pozitív állandó, akkor γ -t nevezhetjük karakterisztikus kitevőnek. Egy időben fejlődő véletlen modellben pedig a következőképpen fogalmazhatunk (1.1. definíció). Ha a d fokú csúcsok aránya 1 valószínűséggel konvergál valamely véletlentől nem függő c_d számhoz minden $d \geq 0$ -ra, és a (c_d) sorozat összege 1, akkor azt mondjuk, hogy (c_d) az *aszimptotikus fokszámeloszlás* ebben a modellben. Ha továbbá $c_d d^\gamma \rightarrow C > 0$ teljesül $d \rightarrow \infty$ esetén, akkor a modell *skálafüggetlen*, és γ a *karakterisztikus kitevő*.

Ezek alapján várható, hogy a γ karakterisztikus kitevő a legtöbb modellben megegyezik a tapasztalati úton kapott becslésével. Ez a következő lenne. Egyenletes eloszlás szerint választunk csúcsokat, az ezek között szereplő d fokú csúcsok arányával megbecsüljük c_d -t minden elérhető d -re, majd ebből becsljük γ -t.

Ugyanakkor olyan valós hálózatokban, melyek több millió vagy több mil-

liárd csúccsal rendelkeznek, nem feltétlenül lehet az egész gráfból egyenletes eloszlás szerint mintát venni és ebből tapasztalati becslést készíteni. Így merülhet fel, hogy mi történik, ha csak a gráfnak egy kisebb részét tudjuk felderíteni fokszámeloszlás szempontjából. Például a legegyszerűbb esetben a hálózat egy csúcsában ülünk, és csak a szomszédaink fokszámát ismerjük – a fokszám azonban a teljes gráfra vonatkozik, nem csupán a szomszédok által feszített részgráfra. Ha ez alapján kell becslést adni c_d -re, a szomszédaink között kiszámíthatjuk a d fokú csúcsok arányát. Kérdés lehet, hogy ez jó becslés lesz-e. Ha ezt egy időben fejlődő modellben vizsgáljuk, ahol egy rögzített csúcsban ülünk, az idő előrehaladtával egyre több csúcs van, így várhatóan egyre ritkábban kapunk új szomszédokat. Ez azt jelenti, hogy a szomszédaink nagy része régebbinek mondható, mint a gráf egy taláalomra kiválasztott csúcsa. A régebbi csúcsoknak pedig nagyobb a foka, különösen akkor, ha a modellben nagyobb fokú csúcsok nagyobb valószínűséggel kapnak új éleket. Ezt azt jelenti, hogy a d fokú csúcsok aránya nagy d -re nagyobb lehet c_d -nél, és ha polinomiális is a lecsengés, a kitevő γ -nál kisebb.

Móri Tamás [46, 2006], [47, 2007], [49, 2010] cikkei szerint több modellben is fennáll ehhez hasonló jelenség. Kicsit pontosabban: ha a fokszámeloszlást a csúcsok bizonyos részhalmazaira korlátozva tekintjük, mégpedig olyan részhalmazokra, amelyek valamilyen értelemben közel vannak a kezdeti konfigurációhoz, akkor más aszimptotikus viselkedést kapunk. A kijelölt csúcsok halmaza lehetett egy rögzített csúcs szomszédainak halmaza, vagy általánosabban, egy adott csúcstól adott távolságra lévő csúcsok halmaza. A karakterisztikus kitevő is különbözött a teljes gráfra jellemző értéktől: minden fenti esetben 2-nek adódott, holott az eredeti hálózatok karakterisztikus kitevői eltérőek voltak. Tehát a hálózat lokálisan más tulajdonságokat mutat, mint globálisan. A 2.12. megjegyzés arra ad rövid magyarázatot, hogy miért a kettő fordul elő gyakran a lokális aszimptotikus fokszámeloszlás polinomiális lecsengését leíró kitevőként.

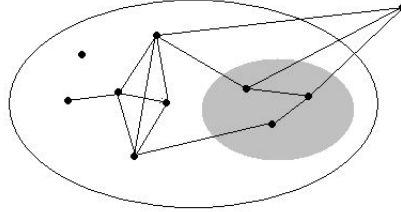
A fenti cikkekben vizsgált modellek mindegyikében a gráf lépésenként egy új csúccsal bővült, melyet a régiak közül néhányval (esetleg eggyel sem) lehetett véletlenszerűen összekötni. Az új csúcs kezdeti fokszáma is lehetett

véletlenszerű. A kijelölt csúcsok halmaza minden esetben monoton növekedett. Az új csúcs éleinek behúzása után el kellett dönteni, hogy bekerül-e a kijelölt csúcsok halmazába vagy sem. A kijelölt részhalmaz mérete 1 valószínűséggel aszimptotikusan $\zeta_n n^\alpha$ volt, ahol (ζ_n) valószínűségi változók sorozata, mely 1 valószínűséggel lassan változó $n \rightarrow \infty$ esetén, $0 < \alpha \leq 1$ pedig rögzített pozitív szám. Ezeket a feltételeket tehát minden korábban vizsgált modell és kijelölési módszer teljesítette. A kijelölt halmazra vonatkozó karakterisztikus kitevő mindhárom esetben 2-nek adódott.

Ezek alapján merült fel a kérdés, hogy az említetteket kiegészítve adhatók-e elégséges feltételek arra, hogy a kijelölt csúcsokra korlátozva is létezzen karakterisztikus kitevő, és felírható legyen γ , azaz az egész gráfra vonatkozó karakterisztikus kitevő, és α , azaz a kijelölt halmaz méretét leíró kitevő segítségével. Mindezt anélkül, hogy a modell fejlődésének és a csúcsok kijelölésének pontos módját ismernénk.

Látni fogjuk, hogy megfelelő feltételek mellett valóban létezik aszimptotikus fokszámoszlás a kijelölt halmazban, karakterisztikus kitevőjére pedig $\alpha(\gamma - 1) + 1$ adódik, összhangban a korábban vizsgált modellekre kapott eredményekkel. Vagyis a már ismert modellekben fellépő jelenség általánosításával modellfüggetlen eredményhez jutunk.

Azt láttuk, hogy a kijelölt csúcsok tipikusan régebbiek lehetnek, mint a gráf egy tetszőlegesen, egyenletesen választott csúcsa. Például egy fában a gyökér egyre ritkábban kap új éleket, így szomszédai között több a régóta létező, és emiatt nagyobb fokszámmal rendelkező csúcs. Ezért változhat meg az adott fokú csúcsok aránya és ezért csökkenhet a karakterisztikus kitevő. A Barabási–Albert-fa példájában, ahol az új csúcs szomszédját fokszámokkal arányos valószínűséggel választjuk a régiek közül, a kijelölt csúcsok halmaza állhat a gyökértől adott távolságra lévő csúcsokból, azaz a fa egy rögzített szintje lehet. Ugyanakkor Katona Zsolt eredményeiből [37, 2005] azt láthatjuk, hogy a fa legnagyobb méretű szintje tipikusan $\log n$ konstansszorosánál található, ha n a csúcsok száma (a fa magassága is logaritmikus), mérete pedig $n/\sqrt{\log n}$ konstansszorosával írható le. Amint szintén Katona Zsolt [38, 2006] munkájából kiderül, ha a legnagyobb szinten vizsgáljuk az



2.1. ábra. A gráf és a kijelölt csúcsok halmaza

adott fokú csúcsok arányát, akkor az eredeti fokszámeloszlást kapjuk vissza. Vagyis a legnagyobb szint a fokszámeloszlás szempontjából is tipikus, az alsó, rögzített sorszámú szintek a fenti eredmények szerint nem.

2.2. Fő eredmények

2.2.1. Jelölések

Legyen $(G_n = (V_n, E_n))_{n \in \mathbb{N}}$ véges, bővülő gráfok véletlen sorozata. V_n a csúcsok, E_n az élek halmaza. Bizonyos csúcsok kitüntetettek; jelölje $S_n \subseteq V_n$ a kijelölt csúcsok halmazát. A 2.1. ábrán a szürke részen található csúcsok a kijelöltek.

Tetszőleges véges egyszerű gráfból indulunk ki, azaz olyanból, melyben nincsenek többszörös élek és hurokélek. $G_0 = (V_0, E_0)$ a kezdeti konfiguráció, ahol $V_0 = \{u_1, u_2, \dots, u_l\}$. A kezdetben kijelölt csúcsok $S_0 \subseteq V_0$ halmaza is tetszőlegesen választható.

$n \geq 1$ -re az n . lépésben a következők történnek:

- létrejön egy új csúcs, v_n : $V_n = V_0 \cup \{v_1, \dots, v_n\}$;
- az új csúcs néhány véletlenszerűen választott éllel csatlakozik régi csúcsokhoz, vagyis $E_{n-1} \subseteq E_n$, és $E_n \setminus E_{n-1}$ minden éle illeszkedik v_n -re;
- eldöntjük, hogy az új csúcsot kiválasztjuk-e, azaz $v_n \in S_n$ további

véletlen választás.

Az első n lépés által generált σ -algebrát jelölje \mathcal{F}_n . Az első n lépés és v_{n+1} éleinek kiválasztása által generált σ -algebrát jelölje \mathcal{F}_n^+ .

Ha az itt megadott generáló eseményeket a teljes folyamattól független véletlen eseményekkel egészítjük ki, ugyanolyan eredményekre juthatunk, ez könnyen látható a bizonyításokból.

$v \in V_n$ esetén jelölje a v csúcs G_n -beli fokszámát (éleinek számát) $\deg_n(v)$.

Továbbá minden $n \geq 1$ és $d \geq 0$ egészre bevezetjük az alábbi jelöléseket.

$$X[n, d] = |\{v \in V_n : \deg_n(v) = d\}|$$

a G_n -beli d fokú csúcsok száma.

$$Y[n, d] = |\{v \in V_n : \deg_n(v) = d, (v, v_{n+1}) \in E_{n+1}\}|$$

azt mutatja, hogy az új csúcs, v_{n+1} hány G_n -beli d fokúhoz csatlakozik.

$$I[n, d] = \begin{cases} 1, & \text{ha } \deg_n(v_n) = d, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

annak indikátora, hogy az új csúcs kezdeti fokszáma éppen d .

Hasonló mennyiségeket tartunk számon a kiválasztott csúcsok halmazában is:

$$X^*[n, d] = |\{v \in S_n : \deg_n(v) = d\}|;$$

$$Y^*[n, d] = |\{v \in S_n : \deg_n(v) = d, (v, v_{n+1}) \in E_{n+1}\}|;$$

$$I^*[n, d] = \begin{cases} 1, & \text{ha } v_n \in S_n \text{ és } \deg_n(v_n) = d, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

m -mel jelöljük az új csúcs lehetséges legkisebb fokszámát. Bizonyos gráfmodellekben előfordulhat, hogy az új csúcs nem kap élt, ilyenkor $m = 0$. Más modellekben az új csúcs foka mindig ugyanannyi, ilyenkor ez adja meg m -t is. Például véletlen fákban $m = 1$. Mivel éleket nem törölünk és a fokszám nem csökkenhet, m -nél alacsonyabb fokú csúcsok csak a kezdeti

elrendezésben fordulhatnak elő, számuk véges és egyre fogy. Így a d fokú csúcsok számát csak $m \geq d$ esetén érdemes vizsgálni, ha az aszimptotikus viselkedésre vagyunk kíváncsiak.

Annak indikátora, hogy az n . lépésben létrejövő csúcsot kiválasztjuk:

$$I^*(n) = \sum_{d=m}^n I^*[n, d] = \begin{cases} 1, & \text{ha } v_n \in S_n, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Például a 2.1. ábrán a 10. csúcs csatlakozik a gráfhoz. Ha egyetlen csúcsból indultunk ki, akkor ez lesz G_9 , a szürkével jelölt három csúcs alkotja S_9 -et. v_9 az újonnan csatlakozó csúcs, melyről éleinek behúzása után el kell dönteni, hogy kijelölt-e. Most ez nem tartozik a kijelöltek közé.

$X[9, 0] = 1$, $X[9, 1] = 1$ stb. írja le a fokszámeloszlást, egy izolált és egy elsőfokú csúcs van. $Y[8, 2] = 2$ és $Y[8, 4] = 1$, mert két másodfokú és egy negyedfokú csúcs kapott új élt G_8 -ban. A többi Y nulla $n = 8$ -ra. $I[9, 3] = 1$, hiszen az új csúcs, v_9 kezdeti foka 3.

Hasonlóképpen a kijelölt csúcsok halmazában $X^*[9, 2] = 1$, $X^*[9, 3] = 2$, itt egy másodfokú és két harmadfokú csúcs található. $Y^*[8, 2] = 2$, mert két kijelölt másodfokú csúcs kapott új élt, a többi Y^* pedig 0. $I^*(9) = 0$, hiszen az új csúcs nincs kijelölve. Ennek megfelelően $I^*[9, d] = 0$ minden d -re.

Azt mondjuk, hogy egy (a_n) valószínűségeloszlás *exponenciálisan csökkenő*, ha $a_n \leq C \cdot q^n$ teljesül minden $n \geq 1$ -re valamely $C > 0$ és $0 < q < 1$ választással. Egy (a_n) számsorozat *lassan változó*, ha $a_{[sn]}/a_n \rightarrow 1$ teljesül $n \rightarrow \infty$ esetén minden $s > 0$ -ra.

Két nemnegatív számokból álló $(a_n), (b_n)$ sorozatra $a_n \sim b_n$ azt fogja jelenteni, hogy $b_n > 0$ véges sok kivétellel, és $a_n/b_n \rightarrow 1$ teljesül $n \rightarrow \infty$ esetén.

2.2.2. A gráfmodellre vonatkozó feltételek

A fenti jelölések segítségével meg tudjuk fogalmazni a gráfmodellre vonatkozó feltételeket.

Szükséges, hogy létezzen aszimptotikus fokszámeloszlás, pozitív tagokkal.

1. feltétel. $X[n, d] \sim c_d \cdot n$ 1 valószínűséggel teljesül $n \rightarrow \infty$ esetén minden $d \geq m$ -re, ahol $c_d > 0$, és $(c_d)_{d \geq m}$ valószínűségeloszlás.

A következő az úgynevezett skálafüggetlenségi feltétel [8, Albert, Barabási, 1999]. Azaz a (c_d) aszimptotikus fokszámeloszlás polinomiálisan csökkenő valamely $\gamma > 0$ kitevővel. γ a *karakterisztikus kitevő*.

2. feltétel. $c_d \sim K \cdot d^{-\gamma}$ teljesül $d \rightarrow \infty$ esetén valamely K és γ pozitív számokra.

Ebből következik, hogy c_d pozitív minden elég nagy d -re. Az 1. feltételben minden d -re előírtuk a pozitivitást. A d szerinti indukcióval történő bizonyítás teszi ezt szükségessé.

Ugyanakkor, mint később látni fogjuk (2.2. megjegyzés), ez a feltétel nem szükséges az aszimptotikus lokális fokszámeloszlás létezéséhez és leírásához, csupán annak polinomiális csökkenését biztosítja. Ebben az értelemben viszont nem lehet elhagyni: az eredeti és lokális fokszámeloszlások megegyeznek, ha minden csúcsot a kijelölt halmazba teszünk.

Azért, hogy számon tudjuk tartani a különböző fokú csúcsok számát, felteesszük, hogy az új csúcs létrejöttékor egyenlő fokú régi csúcsokhoz egyenlő valószínűséggel csatlakozik.

3. feltétel. Minden $n \geq 0$ egészre, $w_1, w_2 \in V_n$ csúcsokra teljesül, hogy ha $\deg_n(w_1) = \deg_n(w_2)$, akkor

$$P((w_1, v_{n+1}) \in E_{n+1} | \mathcal{F}_n) = P((w_2, v_{n+1}) \in E_{n+1} | \mathcal{F}_n).$$

Ez a feltétel tehát csak a feltételes valószínűségekre vonatkozik. Tekintetjünk azokat az indikátorokat, amelyek azt jelzik, hogy egy-egy csúcs kap-e új élt. Nincs szükség sem ezek felcserélhetőségére, sem az együttes eloszlásról további követelményekre, csupán a feltételes valószínűségek egyenlőségét írjuk elő egyenlő fokú csúcsokra. Ebben az értelemben ez gyenge feltételnek mondható.

A következő két feltétel azt biztosítja, hogy az új csúcs tipikus kezdeti fokszáma ne legyen túl nagy, ne ezek határozzák meg a fokszámeloszlást. Először azt írjuk elő, hogy a kezdeti fokszámnak legyen exponenciálisan csökkenő aszimptotikus eloszlása.

4. feltétel. Minden $d \geq m$ egészre 1 valószínűséggel teljesül, hogy $n \rightarrow \infty$ esetén $\sum_{i=d}^{n+1} I[i, d] = p_d \cdot n + o(n)$, ahol (p_d) exponenciálisan csökkenő valószínűségeloszlás.

A következő feltétel szintén felső korlátot ad az új csúcs kezdeti fokára, hiszen $Y[n, d]$ azt jelöli, hogy az $n + 1$. csúcs hány d fokú régihez csatlakozik létrejöttkor.

5. feltétel. Minden $d \geq m$ egészre létezik Z_d nemnegatív, exponenciálisan csökkenő eloszlású valószínűségi változó úgy, hogy

$$P(Y[i, d] \geq l \mid \mathcal{F}_i) \leq P(Z_d \geq l), \quad i \geq 1, l \geq 1.$$

Sok modellben az alábbi, erősebb feltétel is teljesül, mely közvetlenül az új csúcs fokának feltételes eloszlására vonatkozik. Világos, hogy ennél $Y[n, d]$ sem lehet több.

Létezik Z nemnegatív, exponenciálisan csökkenő eloszlású valószínűségi változó úgy, hogy

$$P(\deg_n(v_n) \geq l \mid \mathcal{F}_{n-1}) \leq P(Z \geq l), \quad n \geq 1, l \geq m. \quad (2.1)$$

Könnyen látható, hogy a 4–5. feltételek teljesülnek, ha az új csúcs foka minden lépésben ugyanannyi, m . Ilyenkor $p_m = 1$ és $p_d = 0$, ha $d > m$.

2.2.3. A kiválasztott csúcsokra vonatkozó feltételek

Az alábbi feltételek a kiválasztás módjára vonatkoznak. A 2.6.5. szakaszban látni fogjuk, hogy egyikük sem hagyható el teljesen. A kiválasztott csúcsok halmazát n lépés után S_n -nel jelöltük.

Ha egy csúcsot kijelölünk, az minden későbbi lépésben is kiválasztott lesz.

6. feltétel. $S_n \subseteq S_{n+1}$ minden $n \geq 0$ egészre.

Az új csúcs létrejötte után behúzzuk az éleit, ezután – sokszor ettől függően – döntünk arról, hogy az új csúcsot kiválasztjuk-e. Ilyenkor azonban semmilyen más csúcsot nem jelölhetünk ki. Vagyis az, hogy egy csúcs kiválasztott-e, rögtön az éleinek behúzása után eldől.

7. feltétel. $S_{n+1} \subseteq S_n \cup \{v_{n+1}\}$ minden $n \geq 0$ egészre.

Mivel csak az új csúcs kap éleket, és éleket soha nem törölünk, például egy rögzített csúcs szomszédainak halmazát kijelölve ezeket a feltételeket teljesíthetjük.

A következő feltétel a kiválasztott csúcsok számának növekedéséről szól. Ahogy a bevezetésben említettük, lényegében azt követeljük meg, hogy a kiválasztott csúcsok száma regulárisan növekedjen pozitív α kitevővel.

8. feltétel. Létezik $0 < \alpha \leq 1$ és pozitív valószínűségi változók (ζ_n) sorozata, amelyekre 1 valószínűséggel ζ_n lassan változó, és $|S_n| \sim \zeta_n \cdot n^\alpha$ fennáll $n \rightarrow \infty$ esetén.

Látható, hogy a 6. és a 7. feltételek szerint a kiválasztott csúcsok számára az $|S_n| = \sum_{i=1}^n I^*(i)$ előállítást lehet használni.

Az utolsó előtti feltétel az új, kiválasztott csúcsok fokszámának aszimptotikus viselkedésére vonatkozik. Itt is előírjuk az exponenciális csökkenést, ugyanakkor az aszimptotikus fokszámeloszlás eltérhet az összes új csúcra vonatkozótól.

9. feltétel. Minden $d \geq m$ -re

$$\sum_{i=1}^n E(I^*[i, d] | \mathcal{F}_{i-1}) = (q_d + o(1)) \sum_{i=1}^n E(I^*(i) | \mathcal{F}_{i-1})$$

1 valószínűséggel teljesül $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol $(q_d)_{d \geq m}$ exponenciálisan csökkenő valószínűségeloszlás.

Ez a feltétel nyilvánvalóan teljesül, ha az új csúcs foka rögzített, vagy ha a kiválasztás módja független az új csúcs fokszámától. Ilyenkor $q_d = p_d$ ($d \geq m$) jó választás.

Mivel egy rögzített csúcs foka nem csökkenhet, azt várjuk, hogy a legalább d fokszám gyakorisága aszimptotikusan is legalább akkora az egész gráfban, mint az új csúcsok kezdeti fokszámai között. Ez azt jelentené, hogy

$$k_d = \sum_{j=m}^d (p_j - c_j) \geq 0.$$

Később látni fogjuk, hogy ez valóban következik az eddigi feltételekből (2.4. megjegyzés).

Bizonyos esetekben k_d pozitivitása is kell, pontosabban az alábbi feltételre van szükség.

10. feltétel. Minden $d \geq m$ -re teljesül

$$k_d = \sum_{j=m}^d (p_j - c_j) > 0 \text{ vagy } \sum_{j=d+1}^{\infty} q_j > 0.$$

Világos, hogy ez a feltétel is teljesül, ha az új csúcs foka rögzített. Ilyenkor ugyanis $p_m = 1$, a többi p_d értéke 0, (c_d) pedig az 1. feltétel szerint pozitív tagokból áll, és 1 az összege.

A lokális fokszámeloszlás leírása

Az alábbi tételt fogjuk bizonyítani: a kijelölt csúcsok között a d fokszámúak aránya 1 valószínűséggel konvergens, ahol a fokszámot az egész gráfban számoljuk. A határértékek pozitív számok, melyeknek sorozatára rekurziót adunk és polinomiális csökkenést igazolunk.

2.1. tétel. Tegyük fel, hogy az 1 – 10. feltételek teljesülnek a (G_n, S_n) sorozatra. Ekkor a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X^*[n, d]}{|S_n|} = x_d$$

határértékek minden $d \geq m$ -re 1 valószínűséggel léteznek.

Az (x_d) sorozat teljesíti a következő rekurziót:

$$x_m = \frac{\alpha q_m}{\alpha + \frac{p_m - c_m}{c_m}}, \quad x_d = \frac{x_{d-1} \cdot \frac{k_{d-1}}{c_{d-1}} + \alpha \cdot q_d}{\alpha + \frac{k_d}{c_d}} \quad (d \geq m + 1). \quad (2.2)$$

Az (x_d) sorozat valószínűségeloszlás, vagyis tagjait összegezve 1-et kapunk. Továbbá $x_d \sim L \cdot d^{-\gamma^*}$ teljesül $d \rightarrow \infty$ esetén valamely $L > 0$ -ra az alábbi kitévővel:

$$\gamma^* = \alpha(\gamma - 1) + 1.$$

2.1. megjegyzés. A bizonyításból látni fogjuk, hogy a 2. feltételt elhagyva a lokális fokszámeloszlás létezése továbbra is következik, és a rekurzió is érvényes marad. Az aszimptotikus fokszámeloszlás polinomiális csökkenése tehát a lokális fokszámeloszlás polinomiális csökkenését biztosítja.

2.3. Martingálok

Ebben a szakaszban a későbbiekben többször használt martingálelméleti állításokat gyűjtjük össze.

2.2. állítás. Legyen (M_n, \mathcal{G}_n) négyzetesen integrálható martingál, $M_1 = 0$, $\mathcal{G}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, továbbá legyen

$$A_n = \sum_{i=2}^n E((M_i - M_{i-1})^2 | \mathcal{G}_{i-1})$$

a jósolható folyamat M_n^2 Doob-felbontásában. Ekkor $M_n = o\left(A_n^{1/2} \log A_n\right)$ teljesül az $\{A_\infty = \infty\}$ eseményen majdnem mindenütt, és M_n konvergens $n \rightarrow \infty$ esetén az $\{A_\infty < \infty\}$ eseményen majdnem mindenütt.

Bizonyítás. Az állítás első része Neveu [50, 1975] VII-2-4 állítása az M_n^2 szubmartingálra és az $f(t) = \sqrt{t} \log t$ függvényre. Erre $\int_0^\infty \frac{1}{1+f(t)^2} dt < \infty$.

Az állítás második része Neveu [50] VII-2-3 c) pontja az M_n^2 szubmartingálra alkalmazva. \square

2.3. állítás. Az (M_n, \mathcal{G}_n) négyzetesen integrálható, nemnegatív szubmartingálhoz legyen

$$A_n = EM_1 + \sum_{i=2}^n (E(M_i | \mathcal{G}_{i-1}) - M_{i-1}), \quad B_n = \sum_{i=2}^n D^2(M_i | \mathcal{G}_{i-1}).$$

Ha $B_n^{1/2} \log B_n = O(A_n)$, akkor $M_n \sim A_n$ teljesül az $\{A_n \rightarrow \infty\}$ eseményen majdnem mindenütt $n \rightarrow \infty$ esetén.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 2.2. állítást M_n Doob-felbontásának martingál részére. Ennek jóslható folyamata az itteni (B_n) , a feltétel szerint pedig így a martingál rész A_n -nel osztva nullához tart 1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén. \square

2.4. állítás. Legyen (Y_n) ($n = 1, 2, \dots$) nemnegatív, egyenletesen korlátos valószínűségi változók sorozata, amely adaptált a (\mathcal{G}_n) filtrációhoz. Ekkor az $\{\sum_{n=1}^{\infty} Y_n < \infty\}$ és az $\{\sum_{n=1}^{\infty} E(Y_n | \mathcal{G}_{n-1}) < \infty\}$ események szimmetrikus differenciája 0 valószínűségű. Továbbá

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} Y_n}{\sum_{n=1}^{\infty} E(Y_n | \mathcal{G}_{n-1})} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

teljesül az $\{\sum_{n=1}^{\infty} Y_n = \infty\}$ eseményen majdnem mindenütt.

Bizonyítás. Ez az állítás a Borel–Cantelli-lemma Lévy-féle általánosításának [50, Neveu, VII-2-6] egyszerű következménye. A lemma arra az esetre vonatkozik, amikor a korlátos valószínűségi változók események indikátorai. Ebből korlátos valószínűségi változókra is azonnal adódik az állítás. \square

2.5. állítás. Legyen (X_n, \mathcal{F}_n) martingál, $A_n = \sum_{i=1}^n E((X_i - X_{i-1})^2 | \mathcal{F}_i)$ a kanonikus növekvő folyamata, és $A_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$. Ekkor az $\{A_{\infty} < \infty\}$ eseményen majdnem mindenütt X_n konvergens. Ha $E(\sup_n (X_n - X_{n-1})^2) < \infty$, akkor az $A_{\infty} = \infty$ eseményen majdnem mindenütt $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty$ és $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty$.

Bizonyítás. Ez Neveu [50] VII-3-9 állítása. \square

2.4. Lassan változó sorozatok

A bizonyításban használni fogunk lassan változó sorozatokra vonatkozó állításokat is. A lassan változó sorozatok elméletéről olvashatunk például Bingham [11, 1987], Bojanić és Seneta [12, 1971], illetve Galambos és Seneta [31, 1973] műveiben.

2.1. definíció. Azt mondjuk, hogy a (β_n) pozitív számokból álló sorozat regulárisan változó μ kitevővel, ha teljesül, hogy

$$\beta_n \sim \gamma_n n^\mu \quad (n \rightarrow \infty),$$

ahol (γ_n) lassan változó, azaz $\gamma_{[sn]}/\gamma_n \rightarrow 1$ teljesül $n \rightarrow \infty$ esetén minden pozitív s -re.

Ismert [11, Bingham], hogy (β_n) akkor és csak akkor regulárisan változó μ kitevővel, ha $\beta_{[sn]}/\beta_n \rightarrow s^\mu$ teljesül $n \rightarrow \infty$ esetén minden pozitív s -re.

2.6. állítás. Legyenek (α_n) és (β_n) nemnegatív számsorozatok úgy, hogy (α_n) lassan változó $n \rightarrow \infty$ esetén, valamint $n^{-\lambda}\beta_n \rightarrow 1$ teljesül $n \rightarrow \infty$ esetén valamely $\lambda > -1$ -re. Ekkor

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \sim \alpha_n \sum_{i=1}^n \beta_i \quad (n \rightarrow \infty).$$

Ez Bojanić és Seneta eredményeiből [11, 12] adódik.

2.7. állítás. Legyenek (α_n) , (β_n) nemnegatív sorozatok úgy, hogy (α_n) regulárisan változó δ kitevővel.

a) Tegyük fel, hogy $\sum_{i=1}^n \beta_i = B_n$ regulárisan változó $\mu > 0$ kitevővel, továbbá $\mu + \delta > 0$. Ekkor

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \sim \frac{\mu}{\delta + \mu} \alpha_n B_n \quad (n \rightarrow \infty).$$

b) Tegyük fel, hogy $\sum_{i=1}^n \beta_i = o(B_n)$, ahol (B_n) regulárisan változó $\mu > 0$ kitevővel, és $\mu + \delta > 0$. Ekkor

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = o(\alpha_n B_n) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Bizonyítás. a) Tegyük fel először, hogy $\delta = 0$, azaz (α_n) lassan változó. Bojanić és Seneta eredményei [12] szerint (lásd még: [11, 1.9.8.tétel] egy nemnegatív lassan változó (α_n) sorozathoz található egy (α'_n) sorozat, melyre $\alpha_n \sim \alpha'_n$, ha $n \rightarrow \infty$, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{\alpha'_{n-1}}{\alpha'_n} \right) = 0. \quad (2.3)$$

Ebből következik, hogy $\alpha_{n+1}/\alpha_n \rightarrow 1$, ha $n \rightarrow \infty$.

Itt minden sorozat nemnegatív, ezért

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha'_i \beta_i &= \alpha'_n \sum_{j=1}^n \beta_j + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'_i - \alpha'_{i+1}) \sum_{j=1}^i \beta_j = \\ &= \alpha'_n \sum_{j=1}^n \beta_j - \sum_{i=1}^{n-1} i \left(1 - \frac{\alpha'_i}{\alpha'_{i+1}} \right) \left(\frac{\alpha'_{i+1}}{i} \sum_{j=1}^i \beta_j \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

teljesül $n \rightarrow \infty$ esetén.

Az (α'_n) sorozat lassan változó. Feltételezésünk szerint $\sum_{j=1}^n \beta_j \sim \gamma_n n^\mu$ teljesül $n \rightarrow \infty$ esetén valamely lassan változó (γ_n) sorozattal. Ebből következik, hogy $i^{-1} \sum_{j=1}^i \beta_j \sim \gamma_i i^{\mu-1}$, ha $i \rightarrow \infty$. Mivel $\lambda = \mu - 1 > 0$, a 2.6. állítást alkalmazva kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha'_{i+1}}{i} \sum_{j=1}^i \beta_j \sim \sum_{i=1}^n \alpha'_{i+1} \gamma_i i^{\mu-1} \sim \alpha'_{n+1} \gamma_n \sum_{i=1}^n i^{\mu-1} \sim \frac{1}{\mu} \alpha_n \gamma_n n^\mu.$$

Ezt a (2.3) egyenlettel összevetve adódik, hogy a (2.4) egyenlet jobb oldalának második tagja $o(\alpha_n \gamma_n n^\mu)$, ha $n \rightarrow \infty$.

Az első tag aszimptotikusan egyenlő az $\alpha_n \gamma_n n^\mu$ kifejezéssel $n \rightarrow \infty$ esetén. Vagyis azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \sim \sum_{i=1}^n \alpha'_i \beta_i \sim \alpha_n \gamma_n n^\mu \quad (n \rightarrow \infty).$$

Legyen most δ nullától különböző. Lehet negatív is a $\mu + \delta > 0$ feltétel mellett. Legyen $\alpha_n = \kappa_n n^\delta$ és $B_n = \gamma_n n^\mu$ lassan változó (κ_n), illetve (γ_n) sorozatokra. Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i^\delta \beta_i &= \sum_{i=1}^n i^\delta (B_i - B_{i-1}) = n^\delta B_n + \sum_{i=1}^{n-1} (i^\delta - (i+1)^\delta) B_i = \\ &= n^\delta B_n - \delta \sum_{i=1}^{n-1} i^{\delta-1} (1 + o(1)) B_i = \\ &= \gamma_n n^{\delta+\mu} - (1 + o(1)) \delta \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i i^{\delta+\mu-1} \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

(γ_n) lassan változó, és $\lambda = \delta + \mu - 1 > -1$, vagyis a 2.6. állítás alkalmazható:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i^\delta \beta_i &\sim \gamma_n n^{\delta+\mu} - \delta \gamma_n \sum_{i=1}^{n-1} i^{\delta+\mu-1} \sim \\ &\sim \gamma_n n^{\delta+\mu} - \delta \gamma_n \frac{n^{\delta+\mu}}{\delta + \mu} = \frac{\mu}{\delta + \mu} \gamma_n n^{\delta+\mu} \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

A (κ_n) és ($n^\delta \beta_n$) sorozatokra alkalmazzuk, amit már beláttunk. Így kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = \sum_{i=1}^n \kappa_i i^\delta \beta_i \sim \kappa_n \sum_{i=1}^n i^\delta \beta_i \sim \frac{\mu}{\delta + \mu} \kappa_n \gamma_n n^{\delta+\mu} = \frac{\mu}{\delta + \mu} \alpha_n B_n.$$

b) Feltehető, hogy (B_n) monoton növekvő, hiszen minden pozitív kitevős regulárisan változó sorozathoz található egy vele aszimptotikusan egyenlő monoton növekvő sorozat. Legyen ugyanis $\beta'_n = \beta_n + B_n - B_{n-1}$, ahol $B_0 = 0$. Ekkor $\beta'_n \geq 0$, és

$$\sum_{i=1}^n \beta'_i = \sum_{i=1}^n \beta_i + B_n \sim B_n,$$

vagyis ez regulárisan változó μ kitevővel. Az a) részt felhasználva:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta'_i \sim \frac{\mu}{\delta + \mu} \alpha_n B_n,$$

továbbá

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (B_i - B_{i-1}) \sim \frac{\mu}{\delta + \mu} \alpha_n B_n.$$

Kivonás után kapjuk, hogy $\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = o(\alpha_n B_n)$. □

2.8. állítás. Legyenek a_1, a_2, \dots és b_1, b_2, \dots nemnegatív számok, melyekre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = K < \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n b_n = 1$$

teljesül. Ekkor

- a) $\exp(\sum_{i=1}^n a_i b_i)$ regulárisan változó K kitevővel, amint $n \rightarrow \infty$;
 b) $\exp(\sum_{i=1}^n a_i^2 b_i^2 s_i)$ lassan változó $n \rightarrow \infty$ esetén bármely valós számokból álló, korlátos (s_n) sorozatra.

Bizonyítás. a) Legyen $m = [tn]$, $t > 1$, és $r_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i - K$ ($n \geq 1$). Tudjuk, hogy az (r_n) sorozat nullához tart.

Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{i=n+1}^m a_i b_i &= \sum_{i=n+1}^m \frac{a_i q_i}{i} + \sum_{i=n+1}^m \frac{1}{i} [i(K + r_i) - (i-1)(K + r_{i-1})] = \\ &= \sum_{i=n+1}^m \frac{a_i q_i}{i} + K \sum_{i=n+1}^m \frac{1}{i} + \sum_{i=n+1}^m (r_i - r_{i-1}) + \sum_{i=n+1}^m \frac{r_{i-1}}{i}. \end{aligned}$$

A jobb oldalon az első összeg nullához tart, mivel

$$\left| \sum_{i=n+1}^m \frac{a_i q_i}{i} \right| \leq \sum_{i=n+1}^m \frac{a_i |q_i|}{i} \leq \frac{t}{m} \sum_{i=n+1}^m a_i |q_i| = o(1). \quad (2.5)$$

A második összeg $K \log t + o(1)$, a harmadik pedig $r_m - r_{n-1} = o(1)$. Az utolsó összeg szintén nullához tart.

b) Legyen $m = [tn]$, $t > 1$. Most

$$\sum_{i=n+1}^m a_i^2 b_i^2 s_i = \sum_{i=n+1}^m \frac{a_i}{i} \cdot \frac{(1 + q_i)^2 a_i s_i}{i}.$$

A feltételezés szerint

$$\frac{a_i}{i} = \frac{K + i r_i - (i-1) r_{i-1}}{i} = \frac{K}{i} + r_i - r_{i-1} + \frac{r_{i-1}}{i} \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty),$$

így

$$q'_i = \frac{(1 + q_i)^2 a_i s_i}{i} \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty).$$

A (2.5) becsléshez hasonlóan fejezhetjük be a bizonyítást:

$$\left| \sum_{i=n+1}^m a_i^2 b_i^2 s_i \right| = \left| \sum_{i=n+1}^m \frac{a_i q'_i}{i} \right| \leq \frac{t}{m} \sum_{i=n+1}^m a_i |q'_i| = o(1). \quad \square$$

2.5. Bizonyítások

2.5.1. Kapcsolat a legalább d fokú csúcsok számával

Az egyszerűség kedvéért a pontosan d fokú csúcsok $X^*[n, d]$ száma helyett a legalább d fokú csúcsok számát vizsgáljuk a kiválasztott halmazban, és ezt $Z^*[n, d]$ -vel jelöljük. Azaz $n \geq 1$ és $d \geq m$ egészekre legyen

$$Z^*[n, d] = |\{v \in S_n : \deg_n(v) \geq d\}| = \sum_{j=d}^n X^*[n, j]. \quad (2.6)$$

Szükség lesz az alábbi jelölésekre is.

$$J^*[n, d] = \sum_{j=d}^n I^*[n, j], \quad J[n, d] = \sum_{j=d}^n I[n, j].$$

Először megmutatjuk, hogy a 2.1. tétel következik az alábbi állításból.

Minden $d \geq m$ -re $Z^*[n, d] \sim z_d |S_n|$ 1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén valamely z_d pozitív számokra. Továbbá

$$z_m = 1, \quad z_d = \frac{z_{d-1} \frac{k_{d-1}}{c_{d-1}} + \alpha \sum_{j=d}^{\infty} q_j}{\alpha + \frac{k_{d-1}}{c_{d-1}}} \quad (d \geq m+1). \quad (2.7)$$

Világos, hogy

$$X^*[n, d] = Z^*[n, d] - Z^*[n, d+1] \quad (n \geq 1, d \geq m),$$

így

$$X^*[n, d] = (z_d - z_{d+1}) |S_n| + o(|S_n|)$$

1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén. Vagyis a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X^*[n, d]}{|S_n|} = x_d$$

határértékek minden $d \geq m$ -re 1 valószínűséggel léteznek, és $x_d = z_d - z_{d+1}$ minden $d \geq m$ -re.

Könnyen látható a (2.7) egyenlőségek felhasználásával, hogy

$$x_m = z_m - z_{m+1} = 1 - \frac{1 \cdot \frac{k_m}{c_m} + \alpha \sum_{j=m+1}^{\infty} q_j}{\alpha + \frac{k_m}{c_m}} = \frac{\alpha q_m}{\alpha + \frac{k_m}{c_m}},$$

hiszen (q_d) valószínűségeloszlás a 9. feltétel szerint.

Ugyanígy a rekurzió felhasználásával:

$$x_d = z_d - z_{d+1} = z_d - \frac{z_d \frac{k_d}{c_d} + \alpha \sum_{j=d+1}^{\infty} q_j}{\alpha + \frac{k_d}{c_d}} = \frac{\alpha}{\alpha + \frac{k_d}{c_d}} \left(z_d - \sum_{j=d+1}^{\infty} q_j \right).$$

Írjuk fel ezt eggyel kisebb d -vel, és rendezzük át, majd alkalmazzuk a korábbi egyenlőségeket:

$$\begin{aligned} x_{d-1} \left(\alpha + \frac{k_{d-1}}{c_{d-1}} \right) &= \alpha \left(z_{d-1} - \sum_{j=d}^{\infty} q_j \right); \\ x_{d-1} \frac{k_{d-1}}{c_{d-1}} &= \alpha \left(z_{d-1} - \sum_{j=d}^{\infty} q_j - x_{d-1} \right); \\ x_{d-1} \frac{k_{d-1}}{c_{d-1}} + \alpha q_d &= \alpha \left(z_{d-1} - \sum_{j=d+1}^{\infty} q_j - x_{d-1} \right); \\ x_{d-1} \frac{k_{d-1}}{c_{d-1}} + \alpha q_d &= \alpha \left(z_d - \sum_{j=d+1}^{\infty} q_j \right) = x_d \left(\alpha + \frac{k_d}{c_d} \right); \\ x_d &= \frac{x_{d-1} \frac{k_{d-1}}{c_{d-1}} + \alpha q_d}{\alpha + \frac{k_d}{c_d}}. \end{aligned}$$

Ez éppen a (2.2) rekurzió, a 2.1. tétel egyik állítása. Itt a nevezők pozitívak, mert az 1. és 8. feltételek biztosítják, hogy c_d és α pozitívak, k_d nemnegativitása pedig következik a többi feltételből (lásd a 2.1. lemmát és a 2.3. megjegyzést).

Szintén könnyű ellenőrizni, hogy (x_d) valószínűségeloszlás, vagyis összegezve 1-t kapunk. A (2.2) rekurziós egyenletek átrendezésével adódik, hogy

$$x_m \alpha + x_m \frac{k_m}{c_m} = \alpha q_m,$$

és

$$x_d \alpha + x_d \frac{k_d}{c_d} = x_{d-1} \frac{k_{d-1}}{c_{d-1}} + \alpha q_d \quad (d \geq m+1).$$

Ezeket az egyenlőségeket összegezve:

$$\sum_{d=m}^{\infty} x_d = \sum_{d=m}^{\infty} q_d = 1,$$

Felhasználtuk, hogy a 8. és 9. feltételek szerint $\alpha > 0$, és a (q_d) sorozat valószínűségeloszlás.

A következő lépésben megoldjuk a (2.2) rekurziót az (x_d) sorozatra, és megvizsgáljuk a kapott eloszlást. Mivel (c_d) polinomiálisan, (p_d) pedig exponenciálisan csökken, $k_d = \sum_{j=m}^d (p_j - c_j)$ elég nagy d -re pozitív. Az alábbiakat ennek megfelelően csak olyan d -re írjuk fel, ahol ez már teljesül, amennyiben $k_d = 0$ esetén nem értelmezhető mennyiséget kapnánk. Mivel $d \rightarrow \infty$ esetén fennálló aszimptotikára vagyunk kíváncsiak, ez a végeredményben nem jelenik meg.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$t_d = \frac{k_d}{c_d}, \quad a_d = \prod_{i=m}^{d-1} \frac{t_i + \alpha}{t_i} \quad (d \geq m).$$

Az alábbi módon kapott sorozat teljesíti a rekurziót:

$$x_d = \frac{1}{t_d + \alpha} \sum_{i=0}^d q_i \alpha \prod_{j=i}^{d-1} \frac{t_j}{t_j + \alpha} \quad (d \geq m),$$

ugyanis

$$\begin{aligned} x_{d-1} \frac{k_{d-1}}{c_{d-1}} + \alpha q_d &= \frac{t_{d-1}}{t_{d-1} + \alpha} + \sum_{i=0}^{d-1} q_i \alpha \prod_{j=i}^{d-2} \frac{t_j}{t_j + \alpha} + \alpha q_d = \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} q_i \alpha \prod_{j=i}^{d-1} \frac{t_j}{t_j + \alpha} + \alpha q_d = x_d (t_d + \alpha). \end{aligned}$$

A 2. feltétel szerint $c_d \sim K \cdot d^{-\gamma}$ teljesül $d \rightarrow \infty$ esetén, továbbá a 4.

feltétel szerint a (p_j) sorozat exponenciálisan csökkenő. Vagyis $d \rightarrow \infty$ esetén

$$k_d = - \sum_{j=m}^d (c_j - p_j) \sim -K \cdot \frac{d^{-\gamma+1}}{-\gamma+1};$$

$$t_d = \frac{k_d}{c_d} \sim \frac{-K \cdot \frac{d^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}}{K \cdot d^{-\gamma}} = \frac{d}{\gamma-1};$$

$$a_d = \prod_{i=0}^{d-1} \left(1 + \frac{\alpha}{t_i}\right) \sim \prod_{i=0}^{d-1} \left(1 + \frac{\alpha(\gamma-1)}{i}\right) \sim K' \cdot d^{\alpha(\gamma-1)}$$

valamely $K' > 0$ -val.

A 9. feltétel szerint a (q_d) sorozat is exponenciálisan csökkenő, így az alábbi kifejezésben szereplő összeg konvergens $d \rightarrow \infty$ esetén:

$$x_d = \frac{1}{a_d(t_d + \alpha)} \sum_{i=m}^d a_i q_i \alpha.$$

Felhasználva az (a_d) -re és (t_d) -re kapott aszimptotikát, következik, hogy

$$x_d = \frac{1}{a_d(t_d + \alpha)} \sum_{i=m}^d a_i q_i \alpha \sim L \cdot d^{-\alpha(\gamma-1)-1}$$

teljesül valamely $L > 0$ -val.

Tehát a kiválasztott csúcsok halmazára vonatkozó aszimptotikus fokszámeloszlás is polinomiálisan csökken, és ennek karakterisztikus kitevőjét α és γ meghatározzák: $\gamma^* = \alpha(\gamma-1) + 1$.

Vagyis a 2.1. tétel valóban következik a $Z^*[n, d]$ -re vonatkozó állításból és a (2.7) rekurzióból.

2.5.2. A bizonyítás fő lépései legalább d fokú csúcsokra

Ebben a szakaszban a legalább d fokú csúcsokra vonatkozó állítás bizonyításának menete szerepel d szerinti teljes indukcióval. A közben kimondott lemmákat ennek a szakasznak a második felében igazoljuk.

2.2. megjegyzés. A bizonyítás további részében a 2. feltételt nem használjuk fel. Ez mutatja, hogy ez a feltétel a lokális fokszámeloszlás létezéséhez valóban nem szükséges, csak annak polinomiális csökkenéséhez.

Az indukció kezdő lépése, a $d = m$ eset világos, mert az új csúcs kezdeti fokszáma sosem kisebb m -nél, a fokszám nem csökken, így $S_n \setminus S_0$ minden csúcsa legalább m éllel rendelkezik. S_0 rögzített, véges halmaz, a legalább m fokú csúcsok aránya 1 valószínűséggel $z_m = 1$ -hez konvergál.

Tegyük fel, hogy valamely $d \geq m + 1$ egészre

$$Z^* [n, d - 1] \sim z_{d-1} |S_n| \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2.8)$$

teljesül $z_{d-1} > 0$ -val 1 valószínűséggel.

Először meghatározzuk az S_{n+1} -beli, legalább d fokú csúcsok számának feltételes várható értékét az \mathcal{F}_n σ -algebrára vonatkozóan ($n \geq 1$). Természetesen továbbra is a teljes gráfra vonatkozó fokszámokat tekintjük. Így egy S_n -beli csúcsot akkor kell ide számítanunk, ha a fokszáma legalább d már G_n -ben is, vagy ha a fokszáma éppen $d - 1$ volt G_n -ben, és az új csúcs, v_{n+1} , csatlakozik hozzá. Az új csúcs, v_{n+1} akkor számít, ha kiválasztott lesz (ez a kezdeti éleinek behúzása után rögtön eldől), azaz S_{n+1} -beli, és a kezdeti, G_{n+1} -beli fokszáma legalább d . Így az alábbi egyenletet kapjuk minden $n \geq 1$ egészre.

$$Z^* [n + 1, d] = Z^* [n, d] + Y^* [n, d - 1] + J^* [n + 1, d]. \quad (2.9)$$

Vegyük feltételes várható értéket \mathcal{F}_n -re:

$$\begin{aligned} E(Z^* [n + 1, d] | \mathcal{F}_n) &= \\ &= Z^* [n, d] + E(Y^* [n, d - 1] | \mathcal{F}_n) + E(J^* [n + 1, d] | \mathcal{F}_n). \end{aligned} \quad (2.10)$$

A 3. feltétel szerint azonos fokú régi csúcsok azonos valószínűséggel kapnak élt az új csúcstól, v_{n+1} -től. Ebből – indikátorokra bontással – következik, hogy

$$E\left(\frac{Y^* [n, d]}{X^* [n, d]} \middle| \mathcal{F}_n\right) = E\left(\frac{Y [n, d]}{X [n, d]} \middle| \mathcal{F}_n\right) \quad (n \geq 1). \quad (2.11)$$

Előfordulhat, hogy $X [n, d] = 0$, ilyenkor $Y [n, d] = 0$ is biztosan fennáll. Az ilyen típusú, $0/0$ alakú hányadosokat 1-nek definiáljuk.

Így a (2.10) egyenlet jobb oldalán a középső tag átalakítható (2.11) segítségével:

$$\begin{aligned} E(Z^*[n+1, d] | \mathcal{F}_n) &= \\ &= Z^*[n, d] + X^*[n, d-1] \frac{E(Y[n, d-1] | \mathcal{F}_n)}{X[n, d-1]} + E(J^*[n+1, d] | \mathcal{F}_n). \end{aligned} \quad (2.12)$$

(2.6) szerint $X^*[n, d-1] = Z^*[n, d-1] - Z^*[n, d]$, így a (2.12) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} E(Z^*[n+1, d] | \mathcal{F}_n) &= Z^*[n, d] \left(1 - \frac{E(Y[n, d-1] | \mathcal{F}_n)}{X[n, d-1]} \right) + \\ &+ Z^*[n, d-1] \frac{E(Y[n, d-1] | \mathcal{F}_n)}{X[n, d-1]} + E(J^*[n+1, d] | \mathcal{F}_n) \end{aligned} \quad (2.13)$$

minden $n \geq 1$ -re.

$i \geq 1$ -re vezessük be az alábbi jelöléseket.

$$b[i, d] = \begin{cases} 1, & \text{ha } X[i, d] = 0; \\ \left(1 - \frac{E(Y[i, d] | \mathcal{F}_i)}{X[i, d]} \right)^{-1}, & \text{ha } X[i, d] > 0. \end{cases}$$

Legyen $c[1, d] = 1$, $n \geq 2$ -re pedig

$$c[n, d] = \prod_{i=1}^{n-1} b[i, d]. \quad (2.14)$$

Ekkor minden elég nagy n -re

$$\frac{c[n, d]}{c[n+1, d]} = \left(1 - \frac{E(Y[n, d] | \mathcal{F}_n)}{X[n, d]} \right).$$

A legtöbb modellben az $E(Y[i, d-1] | \mathcal{F}_i)$ feltételes várható értékek egyszerűen kiszámíthatók, és így $c[n, d]$ aszimptotikája is meghatározható. A mostani, általános feltételek mellett a várható értékek nincsenek explicit módon megadva. Ahogy a következő segédállítások mutatják, a gráfmodellre vonatkozó feltételekből a részletösszegek aszimptotikáját meg lehet határozni, és ebből $c[n, d]$ aszimptotikája is adódik.

A lemmákat később bizonyítjuk, miután megmutattuk, hogy felhasználásukkal a tétel hogyan igazolható. Ugyanakkor a lemmákban végig használni fogjuk az indukciós feltevést, (2.8)-t.

Tekintsük az alábbi részletösszegeket:

$$S[n, d] = \sum_{i=1}^n E(Y[i, d] | \mathcal{F}_i) \quad (n \geq 1).$$

2.1. lemma. $d \geq m-re$

$$S[n, d] = \sum_{i=1}^n E(Y[i, d] | \mathcal{F}_i) = k_d \cdot n + o(n) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2.15)$$

1 valószínűséggel.

2.3. megjegyzés. A definícióból látható, hogy $S[n, d]$ nem lehet negatív, így ebből a lemmából $k_d \geq 0$ azonnal következik $d \geq m-re$. A 10. feltétel ennek a mennyiségnek a pozitivitásával kapcsolatos.

2.2. lemma.

$$c[n, d] \sim a[n, d] \cdot n^{k_d/c_d} \quad (n \rightarrow \infty)$$

1 valószínűséggel $d \geq m-re$, ahol $a[n, d]$ pozitív és $n \rightarrow \infty$ esetén lassan változó.

A (2.13) egyenlet szerint a

$$V[n, d] = c[n, d-1] Z^*[n, d] \quad (n \geq 1) \quad (2.16)$$

folyamat szubmartingál rögzített d mellett. Jelölje $A[n, d]$ a $V[n, d]$ Doob-felbontásában szereplő kanonikus növekvő folyamatot, amely így adható meg:

$$\begin{aligned} A[n, d] = \sum_{i=1}^n c[i+1, d-1] Z^*[i, d-1] \frac{E(Y[i, d-1] | \mathcal{F}_i)}{X[i, d-1]} + \\ + \sum_{i=1}^n c[i+1, d-1] E(J^*[i+1, d] | \mathcal{F}_i). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Először $A[n, d]$ aszimptotikáját írjuk le.

2.3. lemma. *Tegyük fel, hogy $Z^* [n, d - 1] \sim z_{d-1} |S_n|$ 1 valószínűséggel teljesül valamely $d \geq m + 1$ -re $n \rightarrow \infty$ mellett. Ekkor*

$$A [n, d] \sim \frac{z_{d-1} \frac{k_{d-1}}{c_{d-1}} + \alpha \sum_{j=d}^{\infty} q_j}{\alpha + \frac{k_{d-1}}{c_{d-1}}} a [n, d] \zeta_n n^{\alpha + k_{d-1}/c_{d-1}} \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

Vegyük észre, hogy mivel $\alpha > 0$ a 8. feltétel szerint, és $z_{d-1} > 0$ az indukciós feltevés szerint, a 10. feltételből következik, hogy a jobb oldal első tényezője pozitív.

A következő lépésben felső becslést adunk a feltételes szórásnégyzetekre. Legyen

$$B [n, d] = \sum_{i=2}^n D^2 (V [i, d] | \mathcal{F}_{i-1}) \quad (n \geq 2).$$

2.4. lemma. *Tegyük fel, hogy $Z^* [n, d - 1] \sim z_{d-1} |S_n|$ 1 valószínűséggel teljesül valamely $d \geq m + 1$ -re $n \rightarrow \infty$ mellett. Ekkor*

$$B [n, d]^{1/2} \log B [n, d] = O (A [n, d]).$$

Vagyis a 2.3. állításból következik, hogy $V [n, d] \sim A [n, d]$ 1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén. Így a 2.2. és 2.3. lemmák segítségével kapjuk az alábbi aszimptotikát:

$$Z^* [n, d] \sim \frac{z_{d-1} \frac{k_{d-1}}{c_{d-1}} + \alpha \sum_{j=d}^{\infty} q_j}{\alpha + \frac{k_{d-1}}{c_{d-1}}} \zeta_n n^\alpha \quad (n \rightarrow \infty).$$

Tehát

$$Z^* [n, d] \sim z_d \zeta_n n^\alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

teljesül, ahol

$$z_d = \frac{z_{d-1} \frac{k_{d-1}}{c_{d-1}} + \alpha \sum_{j=d}^{\infty} q_j}{\alpha + \frac{k_{d-1}}{c_{d-1}}}. \quad (2.18)$$

S_n mérete aszimptotikusan $\zeta_n n^\alpha$ a 8. feltétel szerint. Vagyis (2.7) bizonyítása kész, ha a 2.1–2.4. lemmákat belátjuk. Másrészt $z_d > 0$, hiszen $\alpha > 0$ a 8. feltétel szerint, $z_{d-1} > 0$ az indukciós feltevés szerint, a 10. feltétel miatt pedig a két tag közül legalább az egyik pozitív lesz. Így a teljes indukció folytatható, és azt is beláttuk, hogy a rekurzió pozitív tagokat ad.

□

2.5.3. Az 1. lemma bizonyítása

A (2.9) egyenlethez hasonlóan, de az összes csúcsot figyelembe véve látható, hogy

$$X[i+1, j] = X[i, j] - Y[i, j] + Y[i, j-1] + I[i+1, j]$$

teljesül $i \geq 0$ és $j \geq m$ esetén. Ezt $i = 1, \dots, n$ -re összegezve kapjuk, hogy

$$X[n+1, j] - X[1, j] = - \sum_{i=1}^n Y[i, j] + \sum_{i=1}^n Y[i, j-1] + \sum_{i=2}^{n+1} I[i, j] \quad (2.19)$$

minden $j \geq m$ és $n \geq 1$ választással. Az 1. és 4. feltételekből, illetve a (2.19) egyenletből következik, hogy

$$\sum_{i=1}^n Y[i, j-1] - \sum_{i=1}^n Y[i, j] = (c_j - p_j) \cdot n + o(n)$$

teljesül 1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol $j \geq m$ tetszőleges. Ezt $j = m, \dots, d$ -re összegezve:

$$\sum_{i=1}^n Y[i, d] = - \sum_{j=m}^d (c_j - p_j) \cdot n + o(n) = k_d \cdot n + o(n) \quad (2.20)$$

1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén. Emiatt elég belátni, hogy

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y[i, d] - E(Y[i, d] | \mathcal{F}_i)) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Legyen $d \geq m$, és $n \geq 1$ -re $M_n = \sum_{i=1}^n (Y[i, d] - E(Y[i, d] | \mathcal{F}_i))$, $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{n+1}$. Világos, hogy (M_n, \mathcal{G}_n) martingál. Az 5. feltétel felhasználásával felső becslést adunk a 2.2. állításban szereplő kanonikus növekvő folyamatra.

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{i=1}^n D^2(Y[i, d] | \mathcal{F}_i) \leq \sum_{i=1}^n E(Y[i, d]^2 | \mathcal{F}_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n C_i E(Y[i, d] | \mathcal{F}_i) + \sum_{i=1}^n E(Y[i, d]^2 I(Y[i, d] > C_i) | \mathcal{F}_i) \leq \quad (2.21) \\ &\leq \sum_{i=1}^n C_i E(Y[i, d] | \mathcal{F}_i) + \sum_{i=1}^n E(Z_d^2 I(Z_d > C_i)) \end{aligned}$$

tetszőleges $C_i > 0$ -val. Legyen $\varepsilon > 0$ olyan, hogy $\kappa = E(e^{\varepsilon Z_d})$ véges, és $i \geq 3$ -ra legyen $C_i = \frac{2}{\varepsilon} \log i$. A $z \mapsto z^2 e^{-\varepsilon z}$ függvény monoton csökkenő $z > \frac{2}{\varepsilon}$ -ra, így $z^2 e^{-\varepsilon z} \leq C_i^2 e^{-\varepsilon C_i}$ érvényes, ha $z > C_i$. Vagyis

$$E(Z_d^2 I(Z_d > C_i)) \leq C_i^2 e^{-\varepsilon C_i} E(e^{\varepsilon Z_d} I(Z_d > C_i)) \leq (2/\varepsilon)^2 (\log i)^2 i^{-2\kappa}. \quad (2.22)$$

A végtelen sor konvergencia, ezért a (2.21) egyenlet jobb oldalán álló második összeg rögzített d mellett korlátos.

Másfelől $Y[i, d] \leq |V_i| \leq i + l$ a definícióból következik, így

$$\sum_{i=3}^n C_i E(Y[i, d] | \mathcal{F}_i) \leq \sum_{i=3}^n \frac{2}{\varepsilon} \log i \cdot (i + l) = O(n^2 \log n).$$

Tehát $A_n = O(n^2 \log n)$. Ezt a korlátot tovább javítjuk. Alkalmazzuk a 2.2. állítást az (M_n) martingálra. Azt kapjuk, hogy $M_n = O(n^{1+\eta})$ minden $\eta > 0$ -ra 1 valószínűséggel. A (2.21) egyenletből következik, hogy $\sum_{i=1}^n Y[i, d] = O(n)$, ezért

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n C_i E(Y[i, d] | \mathcal{F}_i) &\leq C_n \sum_{i=1}^n E(Y[i, d] | \mathcal{F}_i) = \\ &= C_n \left(\sum_{i=1}^n Y[i, d] - M_n \right) = O(n^{1+\eta} \log n). \end{aligned}$$

Így adódik, hogy $A_n = O(n^{1+\eta} \log n)$. Vagyis a 2.2. állítás szerint $M_n = o(n^{\frac{1}{2}+\eta} \log n)$ majdnem mindenütt az $\{A_\infty = \infty\}$ eseményen, minden $\eta > 0$ -ra. Tehát $M_n = o(n)$ teljesül 1 valószínűséggel, ahogy $n \rightarrow \infty$, és ezzel a 2.1. lemma bizonyítása kész. \square

2.5.4. A 2. lemma bizonyítása

Legyen $d \geq m$ tetszőleges. A 2.1. lemmából és az indukciós feltevésből következik, hogy

$$\frac{E(Y[n, d] | \mathcal{F}_n)}{X[n, d]} = \frac{S[n, d] - S[n-1, d]}{X[n, d]} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Vagyis a (2.14) egyenletben használhatjuk az $1 - x = e^{-x+O(x^2)}$ ($x \rightarrow 0$) közelítést. Pontosabban, legyen

$$a_i = \frac{S[i, d] - S[i-1, d]}{c_d}, \quad b_i = \frac{c_d}{X[i, d]},$$

ha $X[i, d] > 0$, és $a_i = b_i = 0$ különben. Ekkor a_i és b_i nemnegatívak. Sőt

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = \frac{1}{c_d n} \sum_{i=1}^n (S[i, d] - S[i-1, d]) = \frac{S[n, d]}{c_d n} \rightarrow \frac{k_d}{c_d}$$

$n \rightarrow \infty$ esetén a 2.1. lemma szerint. Az indukciós feltevés szerint pedig $X[n, d] \sim c_d \cdot n$, amiből adódik, hogy $nb_n \rightarrow 1$, ha $n \rightarrow \infty$. Vagyis a 2.8. állítás alkalmazható az (a_n) és (b_n) sorozatokra $K = k_d/c_d$ választással. Így az a) rész szerint

$$\exp\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^n \frac{S[i, d] - S[i-1, d]}{X[i, d]}\right)$$

regulárisan változó K kitevővel. $K = 0$ azt jelenti, hogy a sorozat lassan változó.

A maradéktagokból lassan változó szorzótényező keletkezik, hiszen a 2.7. állítás b) része szerint

$$\exp\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 b_i^2 s_i\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{S[i, d] - S[i-1, d]}{X[i, d]}\right)^2 s_i\right)$$

lassan változó, ha (s_i) korlátos.

Ezekből adódik $c[n, d]$ aszimptotikája. □

2.5.5. A 3. lemma bizonyítása

A (2.17) egyenlet szerint $A[n, d] = A_1 + A_2$, ahol

$$A_1 = \sum_{i=1}^n c[i+1, d-1] Z^*[i, d-1] \frac{E(Y[i, d-1] | \mathcal{F}_i)}{X[i, d-1]},$$

$$A_2 = \sum_{i=1}^n c[i+1, d-1] E(J^*[i+1, d] | \mathcal{F}_i).$$

Már ismerjük $S[n, d-1]$ és $c[n, d-1]$ aszimptotikáját a 2.1. és a 2.2. lemmákból. Továbbá $Z^*[n, d-1] \sim z_{d-1} |S_n| \sim z_{d-1} \zeta_n n^\alpha$ teljesül 1 valószínűséggel az indukciós feltevés és a 8. feltétel miatt. $Y[n, d-1]$ nemnegatív, hiszen azon d fokú csúcsok száma, amelyekhez az új csúcs csatlakozik. Így

$$\begin{aligned} A_1 &\sim \sum_{i=1}^n a[i+1, d-1] i^{k_{d-1}/c_{d-1}} z_{d-1} \zeta_i i^\alpha \frac{1}{c_{d-1} i} E(Y[i, d-1] | \mathcal{F}_i) = \\ &= \frac{z_{d-1}}{c_{d-1}} \sum_{i=1}^n a[i+1, d-1] \zeta_i i^{k_{d-1}/c_{d-1} + \alpha - 1} E(Y[i, d-1] | \mathcal{F}_i). \end{aligned}$$

Alkalmazzuk a 2.7. állítást a következő szereposztással. Legyen

$$\alpha_n = a[n+1, d-1] \zeta_n, \quad \beta_n = E(Y[n, d-1] | \mathcal{F}_n)$$

$n \geq 1$ -re, és

$$\delta = \frac{k_{d-1}}{c_{d-1}} + \alpha - 1.$$

A 8. feltétel és a 2.2. lemma biztosítják, hogy (α_n) lassan változó $n \rightarrow \infty$ esetén. Ugyanakkor $\sum_{i=1}^n \beta_i = S[n, d-1] = (1 + o(1)) k_{d-1} n$, ha $n \rightarrow \infty$, és itt $k_{d-1} \geq 0$, ezért $\alpha_n = k_{d-1}$ és $\mu = 1$ teljesítik a feltételeket, az a) vagy b) részt attól függően, hogy k_{d-1} pozitív-e. Végül $\mu + \delta = k_{d-1}/c_{d-1} + \alpha > 0$, mert c_{d-1} és α pozitívak az 1. és 8. feltételek alapján, k_{d-1} pedig nemnegatív a 2.1. lemma szerint.

A 2.7. állítást alkalmazva kapjuk, hogy

$$A_1 = (1 + o(1)) \cdot \frac{z_{d-1} k_{d-1}}{c_{d-1}} \cdot \frac{1}{\alpha + \frac{k_{d-1}}{c_{d-1}}} \cdot a[n, d-1] \zeta_n n^{k_{d-1}/c_{d-1} + \alpha}$$

1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén.

Most $A[n, d]$ második tagját vizsgáljuk. Mivel

$$J^*[i+1, d] = I^*(i+1) - \sum_{j=m}^{d-1} I^*[i+1, j],$$

látható, hogy

$$E(J^*[i+1, d] | \mathcal{F}_i) = E(I^*(i+1) | \mathcal{F}_i) - \sum_{j=m}^{d-1} E(I^*[i+1, j] | \mathcal{F}_i).$$

Így a 2.2. lemmából adódik, hogy

$$A_2 \sim \sum_{i=1}^n a [i+1, d-1] i^{k_{d-1}/c_{d-1}} \times \\ \times \left(E(I^*(i+1) | \mathcal{F}_i) - \sum_{j=m}^{d-1} E(I^*[i+1, j] | \mathcal{F}_i) \right).$$

Legyen $\alpha_n = a [n+1, d-1]$, $\delta = k_{d-1}/c_{d-1}$ és $\beta_n = E(I^*(n+1) | \mathcal{F}_n)$.

A 2.4. és a 8. feltétel szerint

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \sim \sum_{i=1}^n I^*(i+1) = |S_{n+1}| - I^*(1) \sim \zeta_n n^\alpha \quad (n \rightarrow \infty). \quad (2.23)$$

Ezért alkalmazhatjuk a 2.7. állítás a) részét $\mu = \alpha > 0$ -val. A $\delta + \mu > 0$ feltétel is teljesül. Tehát

$$\sum_{i=1}^n c [i+1, d-1] E(I^*(i+1) | \mathcal{F}_i) \sim \frac{\alpha a [n+1, d-1]}{\alpha + \frac{k_{d-1}}{c_{d-1}}} \zeta_n n^{\alpha + k_{d-1}/c_{d-1}}$$

1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén.

Ugyanakkor rögzített $j \leq d-1$ -re tudjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^n c [i+1, d-1] E(I^*[i+1, j] | \mathcal{F}_i) \sim \\ \sim \sum_{i=1}^n a [i+1, d-1] i^{k_{d-1}/c_{d-1}} E(I^*[i+1, j] | \mathcal{F}_i)$$

a 2.2. lemma miatt. Ebben az esetben α_n -t úgy választjuk, mint előbb, β_n pedig $E(I^*[n+1, j] | \mathcal{F}_n)$ legyen. A 9. feltételt és a (2.23) egyenletet felhasználva:

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = \sum_{i=1}^n E(I^*[i+1, j] | \mathcal{F}_i) = \\ = (q_j + o(1)) \sum_{i=1}^n E(I^*(i+1) | \mathcal{F}_i) = (q_j + o(1)) \zeta_n n^\alpha \quad (2.24)$$

1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén. Ezért a 2.7. állítás a) vagy b) része alkalmazható $\mu = \alpha$ -val, attól függően, hogy q_j pozitív-e. Így kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^n c[i+1, d-1] E(I^*[i+1, j] | \mathcal{F}_i) = \frac{\alpha q_j + o(1)}{\alpha + \frac{k_{d-1}}{c_{d-1}}} \cdot a[n, d-1] \zeta_n n^{\alpha+k_{d-1}/c_{d-1}}$$

1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén. Tehát arra jutottunk, hogy

$$A_2 \sim \left(1 - \sum_{j=m}^{d-1} q_j + o(1)\right) \frac{\alpha}{\alpha + \frac{k_{d-1}}{c_{d-1}}} \cdot a[n, d-1] \zeta_n n^{\alpha+k_{d-1}/c_{d-1}} \quad (2.25)$$

1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén. Mivel (q_d) valószínűségeloszlás a 9. feltétel szerint, $\left(1 - \sum_{j=m}^{d-1} q_j\right) = \sum_{j=d}^{\infty} q_j$. Ezzel az állítás adódik. \square

2.5.6. A 4. lemma bizonyítása

A (2.16) egyenlet szerint

$$B[n, d] = \sum_{i=2}^n D^2(V[i, d] | \mathcal{F}_{i-1}) = \sum_{i=2}^n c[i, d-1]^2 D^2(Z^*[i, d] | \mathcal{F}_{i-1}).$$

Ugyanakkor a (2.9) egyenletből:

$$\begin{aligned} D^2(Z^*[i, d] | \mathcal{F}_{i-1}) &\leq E((Z^*[i, d] - Z^*[i-1, d])^2 | \mathcal{F}_{i-1}) = \\ &= E((Y^*[i-1, d-1] + J^*[i, d])^2 | \mathcal{F}_{i-1}) \leq \\ &\leq 2E(Y^*[i-1, d-1]^2 | \mathcal{F}_{i-1}) + 2E(J^*[i, d]^2 | \mathcal{F}_{i-1}). \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} B[n, d] &\leq 2 \sum_{i=2}^n c[i, d-1]^2 E(Y^*[i-1, d-1]^2 | \mathcal{F}_{i-1}) + \\ &\quad + 2 \sum_{i=2}^n c[i, d-1]^2 E(J^*[i, d]^2 | \mathcal{F}_{i-1}) = 2B_1 + 2B_2. \quad (2.26) \end{aligned}$$

A B_1 és B_2 összegeket külön becsüljük.

A 2.1. lemma bizonyításához hasonlóan rögzítsük $\varepsilon > 0$ -t úgy, hogy $\kappa = E(e^{\varepsilon Z_{d-1}}) < \infty$, és legyen $C_i = \frac{2}{\varepsilon} \log i$. Az 5. feltétel és az $Y^*[i, d] \leq Y[i, d]$

egyenlőtlenség felhasználásával adódik, hogy

$$\begin{aligned} E(Y^*[i-1, d-1]^2 | \mathcal{F}_{i-1}) &\leq \\ &\leq C_i E(Y^*[i-1, d-1] | \mathcal{F}_{i-1}) + E(Z_{d-1}^2 I(Z_{d-1} > C_i)). \end{aligned}$$

A jobb oldal első tagjának becsléséhez a (2.11) egyenletet használjuk.

$$\begin{aligned} E(Y^*[i-1, d-1] | \mathcal{F}_{i-1}) &= \frac{E(Y[i-1, d-1] | \mathcal{F}_{i-1})}{X[i-1, d-1]} X^*[i-1, d-1] \leq \\ &\leq \frac{E(Y[i-1, d-1] | \mathcal{F}_{i-1})}{X[i-1, d-1]} |S_{i-1}|. \end{aligned}$$

A második tagra (2.22) alapján adódik, hogy $O((\log i)^2 i^{-2})$.

Mindezekből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} B_1 \leq \sum_{i=2}^n c[i, d-1]^2 C_i \frac{E(Y[i-1, d-1] | \mathcal{F}_{i-1})}{X[i-1, d-1]} |S_{i-1}| + \\ + O\left(\sum_{i=2}^n c[i, d-1]^2 (\log i)^2 i^{-2}\right). \end{aligned}$$

Az itteni második összeg konvergens. Az első összegben $c[i, d-1]$ aszimptotikája a 2.2. lemmából olvasható ki, $|S_{i-1}|$ -é a a 8., $X[i-1, d-1]$ -é pedig az 1. feltételből. Tehát

$$c[i, d-1]^2 C_i \frac{|S_{i-1}|}{X[i-1, d-1]}$$

regulárisan változó $\delta = 2k_{d-1}/c_{d-1} + \alpha - 1$ kitevővel. Másrészt a 2.1. lemma szerint az $E(Y[i-1, d-1] | \mathcal{F}_{i-1})$ várható értékekből álló összeg is regulárisan változó 1 kitevővel. Így a 2.7. állítás a) részéből következik, hogy

$$B_1 = O(a[n, d-1]^2 (\log n)^2 \zeta_n n^{\alpha+2k_{d-1}/c_{d-1}}).$$

B_2 becsléséhez a 2.7. állítás a) részét alkalmazzuk $\alpha_i = c[i, d-1]$ és $\beta_i = c[i, d-1] E(I^*[i, d] | \mathcal{F}_{i-1})$ választással. Azt, hogy a $\sum \beta_i$ összeg regulárisan változó, már láttuk a (2.24) egyenletben. Így

$$B_2 = O(a[n, d-1]^2 \zeta_n n^{\alpha+2k_{d-1}/c_{d-1}}).$$

Visszatérve a (2.26) becsléshez, arra jutottunk, hogy

$$B[n, d] = O\left(n^{\alpha+2k_{d-1}/c_{d-1}+\eta}\right)$$

minden $\eta > 0$ -ra. Tehát

$$B[n, d]^{1/2} \log B[n, d] = O\left(n^{\alpha/2+k_{d-1}/c_{d-1}+\eta}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

A kapott eredményt a 2.3. lemmával összevetve és felhasználva, hogy az $A[n, d]$ aszimptotikájában szereplő szorzótényező pozitív, a 2.4. lemma bizonyítása adódik. \square

2.4. megjegyzés. Mint már láttuk, $S[n, d]$ nemnegativitása miatt a 2.1. lemmából következik, hogy $k_d \geq 0$ minden $d \geq m$ -re. Ez azt jelenti, hogy

$$\sum_{j=0}^d c_j \geq \sum_{j=0}^d p_j \quad (d \geq m).$$

Szemléletesen: egy egyenletes eloszlás szerint választott csúcs aszimptotikus fokszáma nagyobb vagy egyenlő egy új csúcs fokszámánál. Ez összhangban van a tulajdonsággal, hogy egy rögzített csúcs fokszáma nem csökkenhet.

Másrészt a 2.1. lemmához hasonlóan belátható, hogy

$$\sum_{j=0}^d x_j \geq \sum_{j=0}^d q_j \quad (d \geq m),$$

amely a kiválasztott csúcsok halmazára vonatkozó analóg egyenlőtlenség.

2.6. Modellek

Megmutatjuk, hogy az előző szakaszban bizonyított tétel hogyan alkalmazható konkrét modellekre.

Az elsőként szereplő modell a legegyszerűbb, lineáris súlyozású véletlen fa. Ezután ezt általánosítjuk úgy, hogy az úgynevezett publikációs modell [5]

egy speciális esetét kapjuk, és a feltételek könnyen ellenőrizhetők legyenek. Itt csúcsok csoportjai kapnak egyszerre új éleket, és nagyobb fokú csúcsok nagyobb valószínűséggel kerülnek be ebbe a csoportba. Majd véletlen multifákat vizsgálunk. Ebben csak csúcsok bizonyos csoportjai kaphatnak egyszerre új éleket. Végül egy olyan lineáris súlyozású modellt tekintünk, ahol az új élek egymástól függetlenül születnek, és az új csúcs foka nem rögzített.

2.6.1. Lineáris súlyozású fa

Egyetlen élből kiindulva minden lépésben egy új csúcsot és egy új élt adunk hozzá a gráfhoz. Az n . lépésben az új csúcsot egy adott d fokú régi csúcshoz $\frac{d+\beta}{S_{n-1}}$ valószínűséggel kötjük hozzá, ahol $\beta > -1$ a modell paramétere, T_{n-1} pedig a csúcsok súlyainak összege $n-1$ lépés után: $T_{n-1} = (2 + \beta)n + \beta$. Az egyes lépésekben a sorsolások egymástól függetlenek.

Ezeket a lineáris súlyozással megadott rekurzív fákat széles körben vizsgálták, lásd például Pittel [56, 1994], Rudas, Tóth és Valkó [61, 2007] illetve Drmota [25, 2009] munkáját. $\beta = 0$ esetén az Albert–Barabási-fát kapjuk [8, Albert, Barabási, 1999].

Formálisan $l = 2$, $V_0 = \{u_1, u_2\}$, és $E_0 = \{(u_1, u_2)\}$, S_0 -t később definiáljuk.

A kiválasztott csúcsok halmaza a fa egy szintje lesz. Legyen $j \geq 1$ rögzített egész szám. Az n . lépésben az új csúcsot, v_n -t kiválasztjuk, ha az u_1 csúcstól mért G_n -beli távolsága j .

A fokszámeloszlás explicit alakja (lásd például Móri [44, 2002])

$$c_d = \frac{(2 + \beta) \Gamma(d + \beta) \Gamma(3 + 2\beta)}{\Gamma(1 + \beta) \Gamma(d + 3 + 2\beta)} \quad (d \geq 1),$$

amiből

$$c_d \sim \frac{(2 + \beta) \Gamma(3 + 2\beta)}{\Gamma(1 + \beta)} \cdot d^{-(3+\beta)} \quad (d \rightarrow \infty),$$

a karakterisztikus kitevő pedig

$$\gamma = 3 + \beta > 2.$$

Ezzel az 1. és a 2. feltételek teljesülnek.

Világos, hogy a 3. feltétel teljesül. Az új csúcs foka minden lépésben 1, így $m = 1$ és a 4., 5. és 9. feltételek nyilvánvaló módon fennállnak. Ugyanígy látható, hogy $p_d = 0$ minden $d \neq 1$ -re, és $p_1 = 1$. Ebből a 10. feltétel is azonnal adódik, hiszen (c_d) pozitív tagú, 1 összegű sorozat.

Legyen $j \geq 0$ -ra a j . szint azon pontok halmaza, melyek a gyökértől j távolságra vannak. Jelölje $L[n, j]$ a j . szint méretét n lépés után, ekkor [46, Móri, 2006] alapján 1 valószínűséggel teljesül, hogy

$$L[n, j] \sim n\zeta \frac{\mu(n)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\mu(n)} = O\left(n^{\frac{1}{2+\beta}} (\log n)^{j-1}\right) \quad (n \rightarrow \infty),$$

ahol ζ pozitív valószínűségi változó, és $\mu(n) = \frac{1+\beta}{2+\beta} \log n$.

Rögzítsünk egy $j \geq 1$ egészt, és a kiválasztott csúcsok halmaza legyen a G_n véletlen fa j . szintje.

v_n és u_1 távolsága nem változik, miután v_n éleit az n . lépésben behúztuk, hiszen nem törölünk éleket, és új élek sem jöhetnek létre régi csúcsok között. Emiatt a 6. és 7. feltételek teljesülnek, a kiválasztott csúcsok halmaza monoton növekvő, és egy csúcsról első élének behúzása után el tudjuk dönteni, hogy ide tartozik-e. [46] szerint a 8. feltétel teljesül $\alpha = 1/(2+\beta)$ -val. Pontosabban:

$$|S_n| \sim n\xi \frac{\mu(n)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\mu(n)} \asymp n^{\frac{1}{2+\beta}} (\log n)^{j-1} \quad (n \rightarrow \infty),$$

ahol ξ pozitív valószínűségi változó, és $\mu(n) = \frac{1+\beta}{2+\beta} \log n$ [46, 2.1. tétel].

A 9. és 10. feltételeket már ellenőriztük.

Tehát a 2.1. tétel alkalmazható. Azt kapjuk, hogy a fa egy rögzített szintjén létezik lokális aszimptotikus fokszámeloszlás, méghozzá

$$x_d = \frac{1}{d(d+1)} \quad (d \geq 1).$$

Ennek karakterisztikus kitevője pedig valóban

$$\gamma^* = \alpha(\gamma - 1) + 1 = \frac{1}{2+\beta} (3 + \beta - 1) + 1 = 2.$$

Ez egybevág [46] 3.1. tételével.

2.6.2. Egy lineáris súlyozású modell

Ez a modell az előző szakaszban szereplő lineáris súlyozású véletlen fák általánosítása. Az új csúcs foka minden lépésben ugyanakkora lesz. Ezzel az [5] cikkben szereplő és a bevezetésben röviden ismertetett publikációs modell speciális esetét kapjuk.

Rögzítsünk egy m pozitív egészt, és egy $\beta > -m$ valós számot. Egy adott lépésben egy d fokú csúcs súlya $d + \beta$ lesz.

Egy $l \geq m$ csúcsból álló véges egyszerű gráfból indulunk ki, ez G_0 . Így $n + l$ csúcs van G_n -ben minden $n \geq 0$ -ra.

Az új csúcs kezdeti foka mindig m lesz, ez egyben a minimális kezdeti foksám. Az új csúcs szomszédait minden lépésben véletlenül választjuk, méghozzá úgy, hogy annak valószínűsége, hogy egy adott m csúcsból álló csoportot választunk, a csoport összsúlyával arányos. A formális megfogalmazáshoz legyen

$$T_n = n(2m + \beta) + T_0 = an + b,$$

ahol T_0 jelöli V_0 csúcsainak összsúlyát. Így T_n lesz V_n csúcsainak összsúlya, és $a = 2m + \beta$. Ekkor bármely $n \geq 0$ egészre és $w_1, \dots, w_m \in G_n$ csúcsokra legyen

$$\begin{aligned} P((w_1, v_{n+1}) \in E_{n+1}, \dots, (w_m, v_{n+1}) \in E_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= \\ &= \frac{\deg_n(w_1) + \dots + \deg_n(w_m) + m\beta}{T_n}. \end{aligned}$$

2.9. állítás. *Az 1 – 5. és 10. feltételek teljesülnek a lineáris súlyozású modellben. Itt*

$$c_d = \frac{1}{\frac{m+\beta}{2m+\beta} + m} \cdot \prod_{j=m+1}^d \frac{j - 1 + \beta + (m - 1)(2m + \beta)}{j + \beta + m(2m + \beta)},$$

és a skálafüggetlenségi feltétel $\gamma = 2m + \beta + 1$ karakterisztikus kitevővel érvényes.

Bizonyítás. Az, hogy az 1. és 2. feltételek teljesülnek, következik a publikációs modellre vonatkozó eredményekből is [5].

Annak valószínűsége, hogy egy d fokú, G_n -beli v csúcs új élt kap, az őt tartalmazó m nagyságú csoportok összsúlya elosztva az összes m nagyságú csoport összsúlyával. $n + l$ csúcs van G_n -ben, így $n \geq 0$ -ra a következő adódik.

$$\begin{aligned} P((v, v_{n+1}) \in E_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= \\ &= \frac{\binom{n+l-1}{m-1} (d + \beta) + \binom{n+l-2}{m-2} (T_n - d - \beta)}{\binom{n+l-1}{m-1} T_n} = \\ &= \frac{n + l - m}{n + l - 1} \cdot \frac{d + \beta}{an + b} + \frac{m - 1}{n + l - 1}. \end{aligned}$$

$m = 1$ esetén, amikor véletlen fákról van szó, a középső kifejezés második tagja hiányzik, ám a végeredmény ilyenkor is érvényes.

Jelölje ismét $X[n, d]$ a d fokú csúcsok számát G_n -ben. A korábbiakhoz hasonlóan, amikor a d fokú csúcsok G_{n+1} -beli számára vagyunk kíváncsiak, figyelembe kell vennünk azokat a G_n -beli d fokú csúcsokat, melyek nem kapnak új élt; azokat a G_n -beli $d - 1$ fokú csúcsokat, melyek kapnak új élt; végül $d = m$ esetén magát az új csúcsot is. Vagyis

$$\begin{aligned} E(X[n + 1, d] | F_n) &= \\ &= X[n, d] \cdot \left(1 - \frac{n + l - m}{n + l - 1} \cdot \frac{d + \beta}{an + b} - \frac{m - 1}{n + l - 1} \right) + \\ &+ X[n, d - 1] \cdot \left(\frac{n + l - m}{n + l - 1} \cdot \frac{d - 1 + \beta}{an + b} + \frac{m - 1}{n + l - 1} \right) + \delta_{d,m}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Vezessük be az alábbi normáló konstansokat:

$$c[n, d] = \prod_{i=2}^{n-1} \left(1 - \frac{i + l - m}{i + l - 1} \cdot \frac{d + \beta}{ai + b} - \frac{m - 1}{i + l - 1} \right).$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
c[n, d] &= \prod_{i=2}^{n-1} \left[1 - \frac{1}{i+l-1} \left(m-1 + \frac{(i+l-m)(d+\beta)}{ai+b} \right) \right] = \\
&= \prod_{i=2}^{n-1} \left[1 - \frac{1}{i+l-1} \left(m-1 + \frac{d+\beta}{a} \cdot \frac{i+l-m}{i+\frac{b}{a}} \right) \right] = \\
&= \prod_{i=2}^{n-1} \left[1 - \frac{1}{i+l-1} \left[m-1 + \frac{d+\beta}{a} + \frac{d+\beta}{a} \left(\frac{i+l-m}{i+\frac{b}{a}} - 1 \right) \right] \right] = \\
&= \prod_{i=2}^{n-1} \left[1 - \frac{1}{i+l-1} \left[m-1 + \frac{d+\beta}{a} + O\left(\frac{1}{i}\right) \right] \right].
\end{aligned}$$

Logaritmust véve a maradéktagban $O\left(\frac{1}{i^2}\right)$ összege szerepel, ez az összeg konvergens $n \rightarrow \infty$ esetén. Így

$$c[n, d] \sim a_d n^{(d+\beta)/a+m-1}$$

teljesül $n \rightarrow \infty$ esetén valamely $a_d > 0$ -val.

Ezzel a (2.27) egyenletből az kapjuk, hogy a

$$Z[n, d] = c[n, d] X[n, d] \quad (n \geq 0)$$

folyamat szubmartingál minden rögzített d -re.

Használjuk a 2.3. állítást és a 2.5.2. szakaszban már látott martingál-elméleti módszert. Egy lépésben legfeljebb $m+1$ csúc fokszáma változik. Így az $|X[n+1, d] - X[n, d]| \leq m+1$ összefüggés alapján adhatunk felső becslést a szórásnégyzetre:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^n D^2(Z[i, d] | \mathcal{F}_{i-1}) &\leq \sum_{i=2}^n c[i, d]^2 E((X[i, d] - X[i-1, d])^2 | \mathcal{F}_{i-1}) \leq \\
&\leq (m+1)^2 \sum_{i=2}^n c[i, d]^2 \sim (m+1)^2 a_d^2 n^{2(d+\beta)/a+2m-1}.
\end{aligned}$$

A $d = m$ esetben $Z[n, d]$ Doob-felbontásában szereplő növekvő folyamat a következő:

$$A_n = X[1, m] + \sum_{i=2}^n c[i, m] \sim \frac{a_d}{(m+\beta)/a+m} n^{(m+\beta)/a+m} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Így a 2.3. állítás alkalmazható, és $Z[n, m] \sim A_n$ teljesül $n \rightarrow \infty$ esetén 1 valószínűséggel. Ezért

$$\frac{X[n, m]}{n} \sim \frac{A_n}{c[n, m] \cdot n} \sim \frac{1}{(m + \beta)/a + m}$$

$n \rightarrow \infty$ esetén 1 valószínűséggel.

Tehát $c_m = \frac{1}{(m+\beta)/(2m+\beta)+m}$ az 1. feltételben.

A bizonyítás ezután d szerinti teljes indukcióval történik. Tegyük fel, hogy az 1. feltétel teljesül $d-1 \geq m$ -re. Ebben az esetben a $Z[n, d]$ szubmartingál A_n kanonikus növekvő folyamata így adható meg:

$$A_1 + \sum_{i=2}^n c[i, m] \cdot \left(\frac{i+l-m}{i+l-1} \cdot \frac{d-1+\beta}{ai+b} + \frac{m-1}{i+l-1} \right) \cdot X[i, d-1].$$

Az indukciós feltevést felhasználva kapjuk, hogy

$$A_n \sim a_n \cdot c_{d-1} \cdot \frac{\frac{d-1+\beta}{a} + m - 1}{\frac{d+\beta}{a} + m} \cdot n^{(d+\beta)/a+m}$$

teljesül 1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén.

Ismét a 2.3. állítás alapján adódik, hogy $Z[n, d]$ aszimptotikusan egyenlő A_n -nel, és emiatt

$$\frac{X[n, d]}{n} \rightarrow \frac{\frac{d-1+\beta}{a} + m - 1}{\frac{d+\beta}{a} + m} \cdot c_{d-1}$$

1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén.

Tehát az 1. feltétel teljesül, és

$$\begin{aligned} c_d &= \frac{1}{\frac{m+\beta}{2m+\beta} + m} \prod_{j=m+1}^d \frac{\frac{j-1+\beta}{a} + m - 1}{\frac{j+\beta}{a} + m} = \\ &= \frac{1}{\frac{m+\beta}{2m+\beta} + m} \prod_{j=m+1}^d \frac{j-1+\beta+ma-a}{j+\beta+ma}. \end{aligned}$$

Ebből könnyen látható, hogy a 2. feltétel is teljesül, és $\gamma = a + 1 = 2m + \beta + 1$.

Szimmetriai megfontolásból következik, hogy egyenlő fokú csúcsok egyenlő valószínűséggel kapnak új élt, ez a 3. feltétel. A 4. és 5. feltételek nyilvánvalóan következnek abból, hogy az új csúcs foka rögzített. Láttuk, hogy ugyanebből a 10. feltétel is könnyen adódik. \square

$m = 1$ esetén véletlen fákat kapunk, ez megegyezik a 2.6.1. szakaszban látott lineáris súlyozású famodellel. A továbbiakban az $m \geq 2$ esetet vizsgáljuk részletesen. Először a kiválasztott csúcsok halmazát adjuk meg.

2.5. megjegyzés. Ez a modell lényegesen eltér Cooper és Frieze modelljétől [20, 2003], ahol az új csúcs m szomszédját úgy választják ki, hogy minden régi csúcs a fokszámának lineáris függvényével arányos valószínűséggel kapjon új élt. Ott az új csúcs szomszédait lényegében egymástól függetlenül választják, a megadott eloszlás szerint. Vagyis annak valószínűsége, hogy egy adott csoport kapja az új éleket, a csúcsok súlyának szorzatával hozható kapcsolatba, míg itt az összeg szerepel. Ennek eredményeként az aszimptotikus fokszámeloszlások is különbözőek a két esetben. Sőt míg a Cooper–Frieze-modellben a karakterisztikus kitevő nem függ m -től, a fenti modellben igen.

A kiválasztott csúcsok halmaza az $m \geq 2$ esetben

2.10. állítás. *Legyen $k \in \mathbb{N}$, és rögzítsük a w_1, \dots, w_k csúcsokat. A kijelölt csúcsok halmaza, S_n álljon azokból a G_n -beli csúcsokból, melyek w_1, \dots, w_k közül pontosan egyhez csatlakoznak éllel. Az így megadott S_n halmazsorozat teljesíti a 6 – 9. feltételeket.*

Bizonyítás. A 6. és 7. feltétel teljesül, mert éleket nem törölünk és régi csúcsok között nem jöhetnek létre új élek.

Most a 8. feltételt ellenőrizzük. Legyen röviden $U_n = |S_n|$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy tetszőleges $n \geq 0$ -ra

$$\begin{aligned} P(v_{n+1} \in S_n | \mathcal{F}_n) &= P(U_{n+1} = U_n + 1 | \mathcal{F}_n) = \\ &= \frac{\binom{n+l-k}{m-1} (U_n + k\beta) + k \binom{n+l-k-1}{m-2} (T_n - U_n - k\beta)}{\binom{n+l-1}{m-1} T_n} = \\ &= \frac{x_n U_n + y_n}{(2m + \beta) n}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

ahol

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(\frac{\binom{n+l-k}{m-1}}{\binom{n+l-1}{m-1}} - k \frac{\binom{n+l-k-1}{m-2}}{\binom{n+l-1}{m-1}} \right) \cdot \frac{(2m+\beta)n}{T_n} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right); \\
y_n &= k\beta \frac{\binom{n+l-k}{m-1} - k \binom{n+l-k-1}{m-2}}{\binom{n+l-1}{m-1}} \cdot \frac{(2m+\beta)n}{T_n} + k(2m+\beta)n \frac{\binom{n+l-k-1}{m-2}}{\binom{n+l-1}{m-1}} = \\
&= k\beta + (m-1)k(2m+\beta) + O\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy T_n a csúcsok összsúlya G_n -ben, azaz $T_n = (2m+\beta)n + T_0$.

Legyen $n_0 \in \mathbb{N}$ olyan nagy, hogy $x_n > 0$ érvényes minden $n \geq n_0$ -ra. Továbbá legyen $L = \max_{u \geq n_0} \frac{x_u - y_u}{x_u}$ és rögzítsük $j \geq n_0$ -t.

Az I jelölést használva egy esemény indikátorára adódik, hogy

$$Z_n = \frac{I(U_j > L)}{x_n U_n + y_n - x_n} \quad (n \geq j). \quad (2.29)$$

(U_n) monoton növekvő, így ha $U_j > L$ teljesül, akkor a nevező pozitív minden $n \geq j$ -re. A (2.28) egyenletből kapjuk a következő összefüggést minden $n \geq j$ -re:

$$\begin{aligned}
E(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= \left(1 - \frac{x_n U_n + y_n}{(2m+\beta)n}\right) \cdot \frac{I(U_j > L)}{x_n U_n + y_n - x_n} + \\
&\quad + \frac{x_n U_n + y_n}{(2m+\beta)n} \cdot \frac{I(U_j > L)}{x_n (U_n + 1) + y_n - x_n} = \\
&= Z_n + \frac{I(U_j > L)}{(2m+\beta)n} \cdot \left(-\frac{x_n U_n + y_n}{x_n U_n + y_n - x_n} + 1\right) = \\
&= Z_n \left(1 - \frac{x_n}{(2m+\beta)n}\right).
\end{aligned} \quad (2.30)$$

A (c_n) sorozatot úgy definiáljuk, hogy $\frac{c_n}{c_{n+1}} = \left(1 - \frac{x_n}{(2m+\beta)n}\right)$ teljesüljön

$n \geq 2$ esetén. Pontosabban:

$$\begin{aligned} c_n &= \prod_{i=2}^{n-1} \left(1 - \frac{x_i}{(2m + \beta) i}\right)^{-1} = \exp\left(-\sum_{i=2}^{n-1} \log\left(1 - \frac{x_i}{(2m + \beta) i}\right)\right) = \\ &= \exp\left(\sum_{i=2}^{n-1} \frac{x_i}{(2m + \beta) i} + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n-1} \frac{x_i^2 + o(1)}{(2m + \beta)^2 i^2}\right) = \\ &= \exp\left(\frac{1}{2m + \beta} \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1 + O\left(\frac{1}{i}\right)}{i} + O(1)\right) \sim C n^{\frac{1}{2m+\beta}} \end{aligned}$$

valamilyen $C > 0$ -val $n \rightarrow \infty$ esetén. Itt felhasználtuk, hogy $x_n = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$, ezt már korábban láttuk.

Így a (2.30) egyenlet szerint $(c_n Z_n)_{n \geq j}$ nemnegatív martingál, ezért a martingálkonvergencia-tétel szerint 1 valószínűséggel konvergens. Vagyis

$$Z_n \sim C' n^{-\frac{1}{2m+\beta}}$$

teljesül $n \rightarrow \infty$ esetén $C' > 0$ -val majdnem mindenütt az $\{U_j > L\}$ eseményen.

Ugyanakkor a (2.28) egyenletből azt látjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(U_{n+1} = U_n + 1 | \mathcal{F}_n) = \infty.$$

A 2.4. állítás, az általánosított Lévy-féle Borel–Cantelli-lemma szerint ebből következik, hogy $U_n \rightarrow \infty$. Ezért 1 valószínűséggel fennáll $U_j > L$, ha j elég nagy. Tehát

$$Z_n \sim C' n^{-\frac{1}{2m+\beta}}$$

teljesül 1 valószínűséggel, ahol $n \rightarrow \infty$.

A (2.29) egyenletből és abból, hogy az $(x_n), (y_n)$ sorozatok konvergensek, adódik, hogy

$$U_n \sim \frac{1}{C'} \cdot n^{\frac{1}{2m+\beta}}$$

1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén.

Tehát az $|S_n| = U_n$ sorozat 1 valószínűséggel regulárisan változó $\alpha = \frac{1}{2m+\beta}$ kitevővel. Ez a 8. feltétel.

A 9. feltétel teljesül, mert az új csúcs foka rögzített. \square

Beláttuk, hogy minden feltétel teljesül. A 2.1. tétel alkalmazható, így kapjuk, hogy a kiválasztott csúcsok halmazán létezik lokális aszimptotikus fokszámeloszlás, és ennek karakterisztikus kitevője

$$\gamma^* = \alpha(\gamma - 1) + 1 = \frac{1}{2m + \beta} (2m + \beta + 1 - 1) = 2.$$

Közös szomszédok

Most két különböző csúcs, w_1 és w_2 közös szomszédainak számát vizsgáljuk meg.

2.11. állítás. *A lineáris súlyozású modellben két különböző rögzített csúcs közös szomszédainak száma 1 valószínűséggel korlátos.*

Bizonyítás. Már tudjuk, hogy az előbbi esetben a 8. feltétel teljesül, ez a 2.10. állítás. $k = 1$ -re ez azt jelenti, hogy egy rögzített csúcs szomszédainak száma 1 valószínűséggel regulárisan növekszik $\alpha = \frac{1}{2m + \beta}$ kitevővel.

Jelöljük a w_1 és w_2 csúcsok G_n -beli közös szomszédainak számát Y_n -nel, és $\deg(w_1) + \deg(w_2) + 2\beta$ -t X_n -nel ($n \geq 0$). X_n ekkor w_1 és w_2 súlyának összege, így ez is regulárisan változó α kitevővel. A közös szomszédok száma akkor nő, ha mindkét csúcsot kiválasztjuk. Melléjük $m - 2$ csúcs kell még, azaz $\binom{n+l-2}{m-2}$ a mindkettőjüket tartalmazó csoportok száma. Egy harmadik csúcsot és ezt a kettőt pedig $\binom{n+l-3}{m-3}$ darab m nagyságú csoport tartalmazza. Ezek alapján számolhatjuk ki a w_1 -t és w_2 -t tartalmazó m nagyságú csoportok össz súlyát, és ebből a valószínűséget $n \geq 3$ és $m \geq 3$ esetén:

$$\begin{aligned} P(Y_{n+1} = Y_n + 1 | \mathcal{F}_n) &= \frac{\binom{n+l-2}{m-2} X_n + \binom{n+l-3}{m-3} (T_n - X_n)}{\binom{n+l-1}{m-1} T_n} = \\ &= \frac{(m-1)(n+l-m)}{(n+l-1)(n+l-2)} \cdot \frac{X_n}{T_n} + \frac{(m-1)(m-2)}{(n+l-1)(n+l-2)}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Mivel (X_n) 1 valószínűséggel regulárisan változó $\alpha = \frac{1}{2m + \beta} < 1$ kitevővel, és T_n lineáris függvénye n -nek, az $\sum_{i=3}^{\infty} P(Y_{i+1} = Y_i + 1 | \mathcal{F}_i)$ összeg 1 valószínűséggel konvergál. A 2.4. állítás szerint ekkor Y_n korlátos 1 valószínű-

séggel. Így a két rögzített csúcs közös szomszédainak száma 1 valószínűséggel korlátos.

Az $m = 2$ esetben

$$P(Y_{n+1} = Y_n + 1 | \mathcal{F}_n) = \frac{X_n}{(n-1)T_n}.$$

Ebből a bizonyítás az $m \geq 3$ esethez hasonlóan adódik. \square

Szomszédságok uniója

Végül azt az esetet vizsgáljuk meg, amikor S_n , a kiválasztott csúcsok halmaza k különböző, rögzített csúcs szomszédainak uniójából áll. Ez a korábbiakból könnyen adódik.

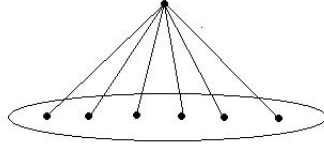
2.1. következmény. *Ha S_n néhány rögzített csúcs szomszédainak uniójából áll, a lokális aszimptotikus fokszámeloszlás létezik és kitevője 2.*

Bizonyítás. A 6., 7., 9. feltételek könnyen láthatóan teljesülnek. Már beláttuk, hogy néhány különböző csúcshoz pontosan egy éllel csatlakozó csúcsok száma 1 valószínűséggel regulárisan növekszik $\alpha = \frac{1}{2m+\beta}$ kitevővel, ez a 2.10. állítás. Azt is láttuk a 2.11. állításban, hogy különböző csúcsok közös szomszédainak száma 1 valószínűséggel korlátos. Ezekből adódik, hogy ez a kiválasztási eljárás is teljesíti a feltételeket, és ismét $\gamma^* = 2$ az új karakterisztikus kitevő. \square

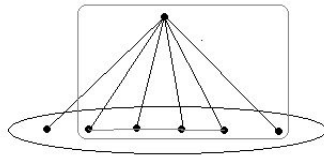
2.6. megjegyzés. Az is könnyen látható, hogy a véges sok rögzített csúcstól legfeljebb 1 távolságra elhelyezkedő csúcsokat kijelölve hasonló eredményre jutunk.

2.6.3. Véletlen multifák

[49, Móri, 2010] alapján keresünk véletlen multifákban lokális aszimptotikus fokszámeloszlást. Ezt a modellt hipergráfok helyett teljes részgráfokkal megfogalmazva Sridharan, Gao, Wu és Nastos [64, 2011] cikkében is megtalálhatjuk.



2.2. ábra. 6-multicseresznye: a centrum és a bázis



2.3. ábra. Új pont csatlakozik a kiválasztott bázishoz

A multifá olyan hipergráf, melyben csak közöséges élek és bázisoknak nevezett m -hiperélek vannak. Speciálisan az m -multicseresznye $m + 1$ csúccsal, m éllel és egy m -hiperéllel rendelkező olyan hipergráf, ahol a közöséges élek egy közös csúcsból indulnak ki, ez a közös csúcs a multicseresznye centruma, a többi m csúcs által alkotott hiperél pedig a multicseresznye bázisa (2.2. ábra).

Az m -multifát rekurzíven definiáljuk. m csúcsú teljes gráfból indulunk ki, melynek csúcsai egyben bázist is alkotnak. A hipergráfot minden lépésben egy új csúccsal és egy multicseresznyével bővítjük, amelynek centruma az új csúcs, bázisa pedig a korábbi bázisok közül kerül ki. Ezután a bázisok rendszeréhez hozzáveszünk m újat oly módon, hogy a multicseresznye bázisában rendre mindegyik csúcsot kicseréljük az újjal. A 2.3. ábrán az új csúcsot, a hozzáadott éleket és az egyik új bázist láthatjuk. Mind a hat, hasonlóképpen kapható hiperél új bázisként jelenik meg. A véletlen multifamodellben az új

multicseresznye bázisát minden lépésben a meglevő bázisok közül véletlenszerűen, egyenletes eloszlással választjuk ki a korábbi lépésektől függetlenül. [49, Móri, 2010] szerint $\theta = \frac{1}{m-1}$ jelöléssel a határeloszlás:

$$c_d = \frac{\Gamma(d - m + 1 + \theta) \Gamma(3 + 2\theta)}{2\Gamma(1 + \theta) \Gamma(d - m + 3 + 2\theta)} \quad (d \geq m),$$

és a karakterisztikus kitevő:

$$\gamma = 2 + \theta.$$

Vagyis az első két feltétel teljesül. Ha egy már létező csúcs új élt kap, akkor $m - 1$ bázisba kerül be. Kezdetben m bázisban szerepelt és m éle volt, kivéve a kezdeti elrendezés csúcsait, melyek 1 bázisban szerepelnek $m - 1$ éllel. Az első kiválasztásuk után ezek is éppen m bázisban találhatóak meg, és m éllel rendelkeznek. Mindebből következik, hogy azonos fokú csúcsokra az őket tartalmazó bázisok száma is megegyezik, ez biztosítja a 3. feltételt. A gráfmodellre vonatkozó további feltételek és a 10. feltétel is teljesülnek, hiszen az új csúcs foka minden lépésben m .

A csúcsok kiválasztására két lehetőséget is mutatunk.

A multifa gömbjei

Legyen $j \geq 1$ egész rögzített, és S_n álljon azokból a csúcsokból, melyek a kezdeti konfiguráció csúcshalmazától, V_0 -tól j távolságra vannak G_n -ben. Vagyis a V_0 körüli j sugarú gömb csúcsai lesznek kiválasztottak. A multifában a csúcsok távolsága nem változik, hiszen az új csúcs csatlakozásakor annak bármely két szomszédja között már fut él. Ezért S_n teljesíti a 6. és a 7. feltételeket. Jelölje $L[n, j]$ a j sugarú gömb csúcsainak számát n lépés után. Szintén [49] szerint 1 valószínűséggel

$$L[n, j] \sim \frac{1}{(j-1)!} (\log n)^{j-1} n^{\frac{m-1}{m}} \zeta, \quad (n \rightarrow \infty),$$

ahol ζ pozitív valószínűségi változó. Ezért a 8. feltétel is teljesül, méghozzá $\alpha = \frac{m-1}{m}$ -mel. Az utolsó feltételt az biztosítja, hogy az új csúcs foka mindig m .

Vagyis a 2.1. tétel alkalmazható, és az új karakterisztikus kitevő:

$$\gamma^* = \alpha(\gamma - 1) + 1 = \frac{M - 1}{M} \left(2 + \frac{1}{M - 1} - 1 \right) + 1 = 2.$$

Ez az eredmény [49]-ben található meg.

Közös szomszédok a multifában

Ha néhány csúcs közös szomszédait jelöljük ki, az összes korábbi értéknél kisebb, kettőnél kisebb karakterisztikus kitevő is elérhető.

2.12. tétel. *Rögzítsünk k csúcsot a véletlen multifa egyik bázisában ($1 \leq k < m$). S_n álljon a rögzített csúcsok G_n -beli közös szomszédjaiból. Ekkor létezik lokális aszimptotikus fokszámeloszlás, és karakterisztikus kitevője*

$$\gamma^* = 2 - \frac{k - 1}{m - 1}.$$

Bizonyítás. Azt már láttuk, hogy a véletlen multifa teljesíti a gráfmodellre vonatkozó feltételeket.

Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor a rögzített csúcsok a kezdeti konfigurációhoz tartoznak, azaz V_0 -beliek. A szimmetria miatt feltehető, hogy ezek u_1, \dots, u_k .

A 6., 7., és 9. feltételek teljesülnek: a kiválasztás azonnal eldől, és az új csúcs kezdeti fokszáma rögzített. A következőkben a 8. feltételt ellenőrizzük.

Megszámoljuk, hogy hány olyan bázis van, amely u_1, \dots, u_k mindegyikét tartalmazza. Kezdetben csak az első bázis. Ezután ha az adott lépésben a véletlenül választott bázis nem tartalmazza mindegyiküket, akkor az új bázisok közül sem fogja egyik sem, és S_n sem változik. Ellenkező esetben az új bázisok közül $m - k$ tartalmazza a rögzített csúcsok mindegyikét, azok, amelyekből nem valamelyikük marad ki. Ilyenkor az új csúcs mindegyikhez csatlakozik éllel, így kiválasztott lesz. Tehát n lépés után $1 + (m - k) |S_n|$ bázis tartalmazza u_1, \dots, u_k mindegyikét. Összesen pedig $mn + 1$ bázis van n lépés után.

Annak valószínűsége, hogy az új csúcs u_1, \dots, u_k közös szomszédja lesz, megegyezik az ezek mindegyikét tartalmazó bázisok számának és az összes bázis számának hányadosával. Tehát minden $n \geq 0$ -ra

$$E(|S_{n+1}| | \mathcal{F}_n) = |S_n| + \frac{(m-k)|S_n| + 1}{mn+1} = \left(1 + \frac{m-k}{mn+1}\right) |S_n| + \frac{1}{mn+1}. \quad (2.32)$$

Legyen

$$\begin{aligned} c_n &= \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{m-k}{mi+1}\right)^{-1} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{mi+1}{mi+m-k+1} = \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{i+1/m}{i+1-k/m+1/m} \sim C \cdot n^{-(1-\frac{k}{m})} \quad (C > 0, n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

A (2.32) egyenletből következik, hogy $n \geq 0$ -ra

$$E(c_{n+1} |S_{n+1}| | \mathcal{F}_n) = c_n |S_n| + \frac{c_{n+1}}{mn+1}.$$

c_n definíciójából azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} E\left(c_{n+1} \left(|S_{n+1}| + \frac{1}{m-k}\right) \middle| \mathcal{F}_n\right) &= \\ &= c_n |S_n| + c_{n+1} \left(\frac{1}{mn+1} + \frac{1}{m-k}\right) = \\ &= c_n |S_n| + c_{n+1} \frac{m-k+mn+1}{(mn+1)(m-k)} = c_n |S_n| + c_n \frac{1}{m-k}. \end{aligned}$$

Tehát $c_n \left(|S_n| + \frac{1}{m-k}\right)$ nemnegatív martingál. Ezért 1 valószínűséggel konvergens, és így

$$|S_n| \sim \zeta \cdot n^{(1-\frac{k}{m})}$$

$n \rightarrow \infty$ esetén 1 valószínűséggel, ahol ζ nemnegatív valószínűségi változó.

A 8. feltételhez azt is be kell látnunk, hogy ζ pozitív. Ehhez legyen $J(l)$ annak indikátora, hogy $|S_l| \geq 2$. Azt is tudjuk az előzőekből, hogy annak \mathcal{F}_n -re vonatkozó feltételes valószínűsége, hogy az $n+1$. lépésben a kiválasztott halmaz mérete eggyel nő:

$$\frac{(m-k)|S_n| + 1}{mn+1}.$$

Különben a kiválasztott halmaz mérete nem változik, hiszen csak az új csúccsal bővíülhet. A valószínűségek n szerinti összege végtelen, így a Borel–Cantelli-lemma Lévy-féle általánosítása, a 2.4. állítás szerint a kiválasztott halmaz mérete 1 valószínűséggel végtelenhez tart.

Rögzített l -re

$$\begin{aligned} E\left(\frac{J(l)}{|S_{n+1}|-1}\middle|\mathcal{F}_n\right) &= \\ &= \frac{(m-k)|S_n|+1}{mn+1} \cdot \frac{J(l)}{|S_n|} + \left[1 - \frac{(m-k)|S_n|+1}{mn+1}\right] \frac{J(l)}{|S_n|-1}. \end{aligned}$$

Ha az indikátor nulla, a hányadost is nullának értelmezzük, akkor is, ha a nevezőben nulla szerepel. Itt $|S_l| \geq 2$ és $n \geq l$ esetén

$$\begin{aligned} \frac{(m-k)|S_n|+1}{mn+1} \left[\frac{1}{|S_n|} - \frac{1}{|S_n|-1} \right] &= \frac{(m-k)|S_n|+1}{mn+1} \left[-\frac{1}{|S_n||S_n|-1} \right] = \\ &= -\frac{1}{|S_n|-1} \cdot \frac{1}{mn+1} \cdot \frac{(m-k)|S_n|+1}{|S_n|} \leq -\frac{m-k}{mn+1} \cdot \frac{1}{|S_n|-1}. \end{aligned}$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$E\left(\frac{J(l)}{|S_{n+1}|-1}\middle|\mathcal{F}_n\right) \leq \frac{J(l)}{|S_n|-1} \left(1 - \frac{m-k}{mn+1}\right).$$

Így most legyen

$$\begin{aligned} d_n &= \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{m-k}{mi+1}\right)^{-1} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{mi+1}{mi-m+k+1} = \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{i+1/m}{i-1+k/m+1/m} \sim C_1 \cdot n^{(1-\frac{k}{m})} \quad (C_1 > 0, n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Ezzel $\left(\frac{d_n J(l)}{|S_n|-1}, \mathcal{F}_n\right)$ szupermartingál. Mivel nemnegatív, a martingálkonvergencia-tétel szerint 1 valószínűséggel konvergens.

Azt már láttuk, hogy a kiválasztott halmaz mérete 1 valószínűséggel végtelenhez tart, így 1 valószínűséggel az indikátor pozitív elég nagy l -re. Ez pedig azt jelenti, hogy $\frac{d_n}{|S_n|-1}$ is 1 valószínűséggel konvergens. d_n aszimptotikáját már kiszámítottuk, így ebből adódik, hogy a fent előállított ζ valószínűségi változó pozitív.

Ezzel megkaptuk a 8. feltételt $\alpha = 1 - \frac{k}{m}$ -val.

Az összes feltételt ellenőriztük. Ezek alapján a 2.1. tétel szerint a lokális aszimptotikus fokszámoszlás létezik, és karakterisztikus kitevője a következő.

$$\begin{aligned}\gamma^* &= \alpha(\gamma - 1) + 1 = \left(1 - \frac{k}{m}\right) \left(1 + \frac{1}{m-1}\right) + 1 = \\ &= \frac{m-k}{m} \cdot \frac{m}{m-1} + 1 = \frac{m-k}{m-1} + 1 = 2 - \frac{k-1}{m-1} > 1.\end{aligned}$$

Rögzítsük $n \in \mathbb{N}$ -t és $v_1, \dots, v_k \in G_n$ -t úgy, hogy G_n -ben legyen e csúcsok mindegyikét tartalmazó bázis. Jelöljük ki v_1, \dots, v_k közös szomszédait. Az előző bizonyítást a megfelelő helyeken módosítva hasonló eredményre jutunk, és a karakterisztikus kitevőre is ugyanaz adódik. \square

2.7. megjegyzés. A $k = 1$ esetben egy rögzített csúcs szomszédairól van szó, ezzel az 1 sugarú gömbökhöz hasonló eset áll elő, és a karakterisztikus kitevőre 2 adódik, a korábbi eredménynek megfelelően.

2.8. megjegyzés. Ha az egy bázisban lévő összes, m darab csúcs közös szomszédait tekintjük kijelölt halmaznak, ennek mérete logaritmikusan növekszik, $\alpha = 0$ lenne, nem alkalmazható az eddigi gondolatmenet.

2.9. megjegyzés. Azt láttuk, hogy néhány rögzített csúcs közös szomszédainak száma 1 valószínűséggel korlátos marad a lineáris súlyozású modellben (2.6.2. szakasz), míg a véletlen multifa esetén ugyanez a mennyiség regulárisan növekszik. Ez azzal magyarázható, hogy az utóbbi modellben a sok közös szomszédal rendelkező csoportokat sok közös bázis tartalmazza, így nagyobb eséllyel kapnak új közös szomszédot, míg az előbbi modellben csupán a foksámok összege számít, az közvetlenül nem, hogy az egyes csoportok hány közös szomszédal rendelkeznek.

2.10. megjegyzés. Mind a véletlen fák, mind a véletlen multifák modelljében teljesült, hogy két csúcs távolsága nem változik időben. Így a kezdeti

konfigurációtól j távolságra lévő csúcsok alkotják a kijelölt csúcsok halmazát. Ha egy gráfmodellben a csúcsok távolsága csökkenhet, sem a pontosan j , sem a legfeljebb j távolságra lévő csúcsok nem jelölhetők ki úgy, hogy a 7. feltétel teljesüljön.

2.11. megjegyzés. Sridharan, Gao, Wu és Nastos [64, 2011] cikkükben lényegében a véletlen multifával megegyező modellt vezetnek be közösségi hálózatok modellezésére. Az ő megfogalmazásukban a teljes részgráfokat tartjuk nyilván, és ezek közül választunk egyenletesen, melyhez az új csúcs csatlakozik. Fokszám helyett egy-egy él végpontjainak közös szomszédainak számát tekintik, és ennek aszimptotikus eloszlásáról állítanak skálafüggetlenséget. Pontos bizonyítást csak a várható értékekre adnak. Ebből a bevezetésben ismertetett 1 valószínűségű értelemben vett skálafüggetlenséget könnyen igazolhatunk a fenti módszerekkel.

2.6.4. Független élek modellje

Most a Móri és Katona cikkeiben szereplő modelleket vizsgáljuk [39, 2006], [47, 2007], [48, 2007]. Ehhez hasonló modellekkel találkozhatunk Dereich és Mörters [23, 2009] cikkében is.

Ismét egyetlen élből indulunk ki, és minden lépésben egy új pontot és néhány (esetleg 0) új élt veszünk hozzá a gráfhoz.

Az n . lépésben az újonnan hozzávett csúcsot minden d fokú régi csúcshoz a többi választástól függetlenül $(\lambda_1 d + \lambda_0) / T_{n-1}$ valószínűséggel kötjük hozzá, ahol $0 < \lambda_1$, $0 < \lambda_0$ rögzített paraméterek, $\lambda_0 + \lambda_1 < 2$, és T_{n-1} a G_{n-1} -beli fokszámok összegét jelöli. A feltevések biztosítják, hogy a megadott valószínűség a $[0, 1]$ intervallumba esik. Ebben a modellben tehát az új csúcs foka nem rögzített, és bármikor lehet nulla is, tehát $m = 0$.

Először a gráfmodellre vonatkozó feltevéseket ellenőrizzük ismert eredmények alapján.

[48, 3.1. tétel] szerint létezik aszimptotikus fokszámeloszlás, és ha $\lambda_0 > 0$,

akkor polinomiálisan csökkenő $1 + 1/\phi$ kitevővel, ahol

$$s = \frac{1}{2} \left\{ \lambda_1 + \sqrt{\lambda_1^2 + 2\lambda_0} \right\}; \quad \phi = \frac{\lambda_1}{2s}.$$

Tehát az első két feltétel teljesül. A 3. feltétel is teljesül, hiszen annak valószínűsége, hogy egy csúcs új élt kap, csupán az éppen aktuális fokszámától függ.

[48, (3.1)] szerint

$$\sum_{d=0}^{\infty} |E(I[n+1, d] | \mathcal{F}_n) - p_d| \rightarrow 0$$

1 valószínűséggel teljesül $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol $p_d = \frac{s^d}{d!} e^{-s}$. Mivel (p_d) az s paraméterű Poisson-eloszlás, exponenciálisan csökkenő, ebből a 4. feltétel következik.

$Y[n, d]$ jelölte, hogy az n . lépésben a d fokú csúcsok közül hány kap új élt. Ebben a modellben minden d fokú csúcs egymástól függetlenül azonos valószínűséggel csatlakozik az új csúcshoz, ezért az $Y[n, d]$ valószínűségi változó \mathcal{F}_n -re vonatkozó feltételes eloszlása binomiális $X[n, d]$ renddel és $(\lambda_1 d + \lambda_0)/T_n$ paraméterrel. Itt $X[n, d]$ nem lehet n -nél nagyobb, ugyanakkor [48] 2.1. tétele szerint T_n aszimptotikusan $2sn$ -nel egyenlő 1 valószínűséggel. Vagyis olyan binomiális eloszlásokról van szó, ahol a paraméterek szorzatára n -től független korlát adható. Jól ismert állítás szerint a binomiális eloszlás k . tagja a megfelelő Poisson-eloszlás k . tagjához konvergál, ha a paraméter és a rend szorzata konvergens. Ez biztosítja a megfelelő, d -től függő Z_d eloszlás és a felső becslés létezését.

A kijelölt csúcsok halmaza – a [47]-ben szereplő állításoknak megfelelően – egy rögzített csúcs szomszédaiból áll. Azt, hogy egy adott csúcs ide tartozik-e, első éleinek behúzása után el tudjuk dönteni, és ez a későbbiekben nem is változik. Tehát a 6. és 7. feltételek teljesülnek. A 8. feltétel [47] 2.1. tételének következménye, és $\alpha = \phi$.

Az utolsó feltételben az $E(I^*[n, d] | \mathcal{F}_{n-1}) \sim q_d \cdot E(I_n^* | \mathcal{F}_{n-1})$ ($n \rightarrow \infty$) feltételnek megfelelő (q_n) sorozatot keresünk. Mivel az élek behúzásáról egymástól függetlenül döntünk, feltéve, hogy az új csúcs szomszédja a j -nek, az

új csúcs szomszédainak kiválasztása hasonló az eredeti feladathoz. [48]-beli 2.1. és 2.2 tételek leírják a fokszámok összegének és a maximális fokszámnak az aszimptotikáját. Ez utóbbi lényegében n^ϕ -nel arányos, míg az összes fokszámról már láttuk, hogy n -ben lineáris. Vagyis a maximális fokszám a fokszámok összegével osztva nullához tart 1 valószínűséggel. Ezért a cikkbeli gondolatmenet módosításával azt kapjuk, hogy az új, kiválasztott csúcsok fokszámai is aszimptotikusan függetlenek, és eloszlásuk exponenciálisan kicsi. Vagyis létezik megfelelő exponenciálisan kicsi (q_d) sorozat.

Az így kapható (q_d) sorozatról szintén az eredeti feladathoz való hasonlóság miatt világos, hogy minden tagja pozitív, így a 10. feltétel teljesül k_d értékétől függetlenül.

Tehát teljesülnek a feltételek, így a 2.1. tétel szerint egy rögzített csúcs szomszédai között az aszimptotikus fokszámeloszlás karakterisztikus kitevője:

$$\gamma_k = \alpha(\gamma - 1) + 1 = \frac{\lambda_1}{2s} \left(1 + \frac{2s}{\lambda_1} - 1 \right) + 1 = 2.$$

Ez összhangban van a [47] cikkben található eredményekkel.

2.12. megjegyzés. Azt láttuk, hogy majdnem minden esetben a kiválasztott csúcsok halmazán érvényes karakterisztikus kitevő kettőnek adódott. Ez a következővel magyarázható. Egyrészt a maximális fokszám a fenti esetek mindegyikében $n^{\frac{1}{\gamma-1}}$ -gyel arányosan nő, ahol γ a skálafüggetlenséget jellemző karakterisztikus kitevő a 2. feltételben. Egy rögzített csúcs fokszámának növekedése aszimptotikusan ugyanolyan, mint a maximális fokszámé. Végül a kiválasztott csúcsok száma lényegében egy csúcs szomszédainak számával egyezik meg, vagyis $\alpha = \frac{1}{\gamma-1}$. Ebből $\gamma^* = \alpha(\gamma - 1) + 1 = 2$ adódik.

2.13. megjegyzés. A fenti modellekben annak valószínűsége, hogy egy régi csúcs új élt kap, valamely lineáris függvénnyel volt leírható. Skálafüggetlenséget azonban nemlineáris súlyfüggvényekkel leírható modellekben is vizsgáltak.

Rudas, Tóth és Valkó [61, 2007] véletlen fákat, Dereich és Mörters [23, 2009] pedig a független éles modellhez hasonló véletlen gráfokat. A véletlen

fa esetében adott egy w függvény, mely nem feltétlenül lineáris, de teljesít bizonyos feltételeket. Annak valószínűsége, hogy az új csúcs egy adott d fokú régihez csatlakozik, minden lépésben $w(d)$ -vel arányos. A modellre vonatkozó feltételek teljesülnek (2.2.2. szakasz), a skálafüggetlenség bizonyítása szerepel [61]-ben, véletlen elágazó folyamatokra vonatkozó eredményekre támaszkodva.

Dereich és Mörters [23] modelljében irányított gráf épül fel. Az $n+1$. csúcs minden egyes d be-fokú régi csúcshoz $\frac{w(d)}{n}$ valószínűséggel csatlakozik, a többi választástól függetlenül. Minden behúzott az él az új csúcstól a régi felé van irányítva, így a ki-fok nem változik egy csúcs kezdeti éleinek behúzása után. Itt is teljesülnek a gráfmodellre vonatkozó feltételek. Azonban nem világos, hogy hogyan adható meg a kiválasztott csúcsok halmaza a 8. feltételnek megfelelően, ha a függvény nem lineáris. [23] 1.11. megjegyzése szerint ugyanis egy csúcs szomszédainak száma lassan változó, ha f szublineáris, ez $\alpha = 0$ -t jelentene, így a 2.1. tétel nem alkalmazható. Hasonló kérdés merül fel a [61]-beli véletlen fáról szóló modell esetében is.

2.6.5. Ellenpéldák

Felvetődik a kérdés, hogy az egyes feltételek teljes elhagyásával igaz marad-e a 2.1. tétel állítása. Az első öt feltétel tulajdonképpen az állítás megfogalmazásához is szükséges. Az alábbiakban ellenpéldákkal igazoljuk, hogy nem hagyható el a kijelölt csúcsok halmazára vonatkozó feltételek egyike sem.

2.14. megjegyzés. Deifen, van der Esker, van der Hofstad és Hooghiemstra [22, 2009] olyan gráfmodellekben vizsgálják skálafüggetlen viselkedést, melyben a 4. feltétel csak részben teljesül. Modelljükben az új csúcs foka véletlenszerű, a 4. feltételben szereplő (p_d) sorozat létezik, de nem exponenciálisan, hanem polinomiálisan csökkenő. Megfelelő feltételek mellett ilyenkor is létezik a (c_d) aszimptotikus fokszámeloszlás, és ez polinomiálisan csökkenő, azaz skálafüggetlen viselkedés lép fel. A karakterisztikus kitevő a (p_d) -hez tartozó kitevő és egy, az eredeti gráfmodellből számítható kitevő minimuma lesz [22] szerint.

A 6. feltétel szükségessége: monotonitás

Az Albert–Barabási-fában (lásd a 2.6.1. szakaszt) az új csúcs kezdeti fokszáma 1, és szomszédját a régi csúcsok fokszámával arányos valószínűséggel választjuk ki. Mint már láttuk, az 1–5. és 10. feltételek teljesülnek, és $m = 1$.

Álljon a kiválasztott csúcsok S_n halmaza a G_n -ben 1 fokú csúcsokból, vagyis a fa leveleiből.

Az új csúcs mindig kiválasztott létrejötté után, így a 7. és 9. feltételek teljesülnek, itt $q_1 = 1$ és $q_d = 0$, ha $d \geq 2$. A 8. feltétel is teljesül $\alpha = 1$ választással, ez éppen azt jelenti, hogy az 1. feltétel $c_1 > 0$ -val fennáll, amit pedig már láttunk.

Vagyis a 6. feltétel kivételével mindegyik teljesül.

S_n minden csúcsa elsőfokú minden $n \in \mathbb{N}$ -re. Ugyanakkor a (2.2) rekurzió szerint

$$x_1 = \frac{\alpha q_1}{\alpha + \frac{p_1 - c_1}{c_1}} = \frac{1}{1 + \frac{1 - c_1}{c_1}} < 1,$$

hiszen $c_1 < 1$. Tehát a 2.1. tétel rekurziója nem teljesülhet, ez a feltétel nem hagyható el.

A 7. feltétel szükségessége: azonnali kiválasztás

A 7. feltétel elhagyása azt jelentené, hogy egy csúcsot nem csak létrejöttékor, hanem bármelyik későbbi lépésben is kiválaszthatunk.

Tekintsük az Albert–Barabási-fát (lásd a 2.6.1. szakaszt). Kétféle oka lehet majd a kiválasztásnak. Először minden n pozitív egészre kiválasztjuk v_{n^2} -t azonnal a létrejötté után. Vagyis $v_{n^2} \in S_{n^2}$ minden $n \geq 1$ -re. Ezen kívül ha egy elsőfokú csúcs új élt kap, ezt is kiválasztjuk.

A 6. feltétel nyilvánvaló módon teljesül. Mivel S_n a levelek kivételével minden csúcsot tartalmaz, és még a levelek közül is bizonyosakat, könnyen látható, hogy $|S_n| \sim (1 - c_1)n$. Ezért a 8. feltétel $\alpha = 1$ -gyel teljesül.

Minden új csúcs kezdeti fokszáma 1, a 9. feltétel továbbra is fennáll $q_1 = 1$ -gyel.

A 2.1. tétel azt adná, hogy

$$x_1 = \frac{\alpha q_1}{\alpha + \frac{p_1 - c_1}{c_1}} = \frac{1}{1 + \frac{1 - c_1}{c_1}} > 0.$$

Másfelől S_n legfeljebb \sqrt{n} levélből és összesen aszimptotikusan $(1 - c_1)n$ csúcsból áll. Ezért a kiválasztott csúcsok halmazában az elsőfokúak aránya 1 valószínűséggel nullához tart.

Tehát ezt a feltételt sem hagyhatjuk el.

A 8. feltétel szükségessége: a kiválasztások száma

A kiválasztási eljárás két egyszerű, de különböző α kitevőhöz tartozó kiválasztási eljárás keveréke lesz.

Ismét az Albert–Barabási-fából indulunk ki (2.6.1. szakasz).

Rögzítsünk egy k pozitív egészt, és legyen

$$S_n = \{v_{i^k} : i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n^{1/k}\}.$$

A 6–9. feltételek nyilvánvalóan teljesülnek, és mivel $|S_n|$ egyenlő $n^{1/k}$ egészrészével, itt $\alpha = 1/k$.

Így a 2.1. tétel alkalmazható, a kiválasztott csúcsok halmazára megszorított aszimptotikus fokszámoszlás létezik. Ennek karakterisztikus kitevője $\gamma^* = \alpha(\gamma - 1) + 1 = 2/k + 1$. Ez függ k -tól.

$k = 2$ -re az így kapott lokális aszimptotikus fokszámoszlást jelölje (x_d) .

Az eljárásunk a következő. Kiválasztunk minden új csúcsot, amíg a lokális tapasztalati eloszlás és (c_d) variációs távolsága $1/4$ -nél kisebb nem lesz. Az 1. feltétel biztosítja, hogy ez 1 valószínűséggel véges sok lépés elteltével megtörténik. Ezután a v_{n^2} csúcsokat választjuk ki minden $n \in \mathbb{N}$ -re, amíg a lokális tapasztalati eloszlás és (x_d) variációs távolsága $1/8$ -nál kisebb nem lesz. Láttuk, hogy itt (x_d) az aszimptotikus lokális fokszámoszlás, így ehhez is 1 valószínűséggel véges sok lépésre van szükség.

Ezt folytatjuk. Pontosabban, az i . periódusban minden új csúcsot kiválasztunk, ha i páros, illetve a négyzetszám sorszámú csúcsokat választjuk

ki, ha i páratlan. Az i . periódus akkor ér véget, ha a tapasztalati és az aszimptotikus lokális fokszámeloszlás variációs távolsága legfeljebb 2^{-i-1} .

A 6. és 9. feltételek nyilvánvalóan teljesülnek. A kiválasztás csak a múltbeli történésektől függ, a 7. feltétel is teljesül.

A 8. feltétel nem teljesül. Mivel (c_d) és (x_d) különbözőek, lokális aszimptotikus fokszámeloszlás sem létezhet. Tehát ez a feltétel is szükséges.

A 9. feltétel szükségessége: az új csúcs foka

Ez az ellenpélda az $\lambda_1 = 1, \lambda_0 = 0$ paraméterű független éles modellen alapul, mely a 2.6.4. szakaszban szerepelt. Ott láttuk, hogy a 4. feltétel $p_i > 0$ -val ($i = 0, 1, \dots$) teljesült, ahol (p_i) Poisson-eloszlás $s = 1$ várható értékkel. Vegyük észre, hogy $p_0 = p_1$. Ismét kétféle fázisból fog állni a kiválasztási eljárás.

Az első fázisban az új csúcsot pontosan akkor választjuk ki, ha foka 1, a másodikban pontosan akkor, ha foka 0.

A 6., 7. és 9. feltételek mindkét esetben teljesülnek.

Az első fázisban a 2.4. állítás és [47] (2.1) egyenlete alapján azt kapjuk, hogy

$$|S_n| = \sum_{i=1}^n I[i, 1] \sim \sum_{i=1}^n P(\deg_i(v_i) = 1 | \mathcal{F}_{i-1}) \sim ne^{-1} \quad (2.33)$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén. Hasonlóan $|S_n| \sim ne^{-1}$ majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén a 2. fázisban.

A 2.1. tétel szerint következik, hogy a lokális aszimptotikus fokszámeloszlás, $(x_d)_{d \geq 0}$ létezik az első esetben. Világos, hogy $x_0 = 0$ és $x_1 > 0$. Másrészt nulla fokú csúcsok soha nem kapnak új éleket. Vagyis lokális aszimptotikus fokszámeloszlás mindkét esetben létezik, de ezek eltérőek.

Az első fázisban maradunk, amíg a lokális aszimptotikus fokszámeloszlás és (x_d) variációs távolsága $1/4$ -nél kisebb nem lesz. Ezután áttérünk a második fázisra, és ebben maradunk, amíg a pozitív fokú csúcsok aránya S_n -ben $1/8$ alá csökken. Ezeket ismételjük felváltva. A k . periódus akkor

ér véget, ha a tapasztalati és aszimptotikus lokális fokszámeloszlás variációs távolsága 2^{-k-1} -nél kisebb. A 2.1. tétel szerint ez 1 valószínűséggel véges sok lépés alatt megtörténik.

A 6. feltétel teljesül. A kiválasztás a múlttól és az új csúcs fokszámától függ, ez a 7. feltétel. A 2.3. állítás, a (2.33) egyenlet és a nulla fokúakra vonatkozó hasonló összefüggés segítségével azt kapjuk, hogy $|S_n| \sim ne^{-1}$ érvényes 1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén. Tehát a 8. feltétel $\alpha = 1$ -gyel teljesül.

Az utolsó feltétel nem teljesül, és nincs is lokális aszimptotikus fokszámeloszlás, hiszen két különböző fokszámeloszláshoz tartozó kiválasztási eljárást kevertünk.

2.15. megjegyzés. A lineáris súlyozású modellből kiindulva is készíthetünk ellenpéldát (2.6.2. szakasz). Ezt úgy módosítjuk, hogy minden csúcs kezdeti fokát a múlttól függetlenül, véletlenszerűen választjuk. Minden új csúcs egy élt kap $1/2$ valószínűséggel, és kettőt szintén $1/2$ valószínűséggel. A szomszédait az $m = 1$ és $m = 2$ eseteknek megfelelő lineáris súlyozás szerint választjuk. Az 1. és 2. feltételek az 2.6.2. szakasz martingáleméleti módszereihez hasonló módon ellenőrizhetők.

Az első fázisban az egy, a másodikban a két kezdeti éllel rendelkező csúcsokat választjuk ki. Ezeket a fázisokat a fent leírt váltakozó eljárással fűzzük össze. Teljesül, hogy $|S_n| \sim n/2$, és ilyen módon egy újabb ellenpéldához jutunk.

A 10. feltétel szükségessége

A legalább d fokú csúcsok arányának 1 valószínűségű limeszét a kiválasztott csúcsok halmazában z_d -vel jelöltük. A (2.7) összefüggésből látható, hogy a 10. feltétel biztosítja z_d pozitivitását, feltéve, hogy z_{d-1} pozitív. Világos, hogy ha valamilyen d -re ez az arány nulla, és nem keletkeznek nagyobb fokú csúcsok a kiválasztottak között, akkor minden nagyobb fokszámra is nulla lesz az arány, és elfajuló eloszlást kapunk, nincs polinomiális csökkenés.

Ellenpélda készítéséhez módosítsuk a 2.6.4. szakaszban leírt független éles

modellt úgy, hogy az elsőfokú csúcsok soha ne kapjanak új éleket, a megfelelő valószínűséget nullának választjuk. Legyen

$$T_{n-1} = \sum_{d=2}^n X[n-1, d] d,$$

és álljon a kiválasztott csúcsok S_n halmaza az összes 1 fokú csúcsból. Látható, hogy a 10. feltétel kivételével mindegyik teljesül, mégis $x_d = 0$ minden $d > 1$ -re. Ez mutatja, hogy k_d pozitivitása szükséges ahhoz, hogy polinomiálisan csökkenő, nem elfajuló aszimptotikus fokszámeloszlást kapjunk.

3. fejezet

Fokszámok határeloszlása lineáris súlyozású véletlen fákban

3.1. Bevezetés

Tekintsük a lineáris súlyozású véletlen rekurzív fákat (2.6.1. szakasz). Minden lépésben egy új csúcs jön létre, és egy új éllel csatlakozik egy régi csúcshoz. Annak valószínűsége, hogy egy adott d fokú régi csúcs lesz az új csúcs szomszédja, d -nek rögzített lineáris függvényével arányos. A döntés a korábbi lépésektől független.

Ebben a modellben ismert a j -edikként létrejövő csúcs fokszámának határeloszlása. Vagyis ha $X[n, j]$ jelöli a j . csúcs fokszámát az n . lépés után, akkor minden j pozitív egészre $X[n, j] \cdot n^{-\delta}$ egy valószínűséggel konvergál egy pozitív valószínűségi változóhoz valamely pozitív δ -ra [45, Móri, 2005]. Ezeknek a valószínűségi változóknak a momentumai is ismertek.

Most a születési időpont helyett a fában elfoglalt pozíciót rögzítjük, és az erre a helyre kerülő csúcs fokszámának határeloszlását vizsgáljuk. Tekinthetjük például az első csúcs, a gyökér j . gyermekét, vagy a gyökér j . gyermekének k . gyermekét, ennek l . gyermekét, és így tovább. Jelölje X_n

ennek a rögzített helyen lévő csúcsnak a fokszámát n lépés után. Azt látjuk majd, hogy $X_n n^{-\delta}$ egy valószínűséggel konvergál egy pozitív valószínűségi változóhoz valamely pozitív δ -ra. Az itteni δ természetesen megegyezik a rögzített csúcs fokszámának határeloszlásában szereplő kitevővel. A határeloszlásból kapott valószínűségi változó szerkezetét és momentumait is meg tudjuk határozni.

A modell speciális esete az Albert–Barabási-fa, amikor az új csúcs a fokszámokkal arányos valószínűséggel csatlakozik valamelyik régihez, azaz a lineáris függvény az identitásfüggvény. Ilyenkor a határeloszlás pontosan leírható.

3.2. Véletlen fák

3.2.1. Jelölések

Kezdetben egyetlen csúcs van, a fa gyökere. Ezután egyesével vesszük hozzá a fához az újabb csúcsokat, és számon tartjuk a csúcsok születési sorrendjét. Vagyis gyökeres címkézett fával foglalkozunk.

Az alábbi, széles körben elterjedt elnevezéseket fogjuk használni [61, Rudas, Tóth, Valkó, 2007], [25, Drmota, 2009]. A fa csúcsai egyedek, az élek pedig szülő–gyerek kapcsolatokat jelölnek. Egy új csúcs annak a régi csúcsnak a gyermeke, amelyikhez születésekor éllel csatlakozik.

A csúcsokat pozitív egészek sorozataival fogjuk címkézni. Legyen

$$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, \dots\}, \quad \mathbb{Z}_+^0 = \{\emptyset\}, \quad \mathcal{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z}_+^n.$$

Az első csúcs, a gyökér címkéje \emptyset . A gyökér j . gyermekének címkéje j . Hasonlóképpen, az $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{N}$ címkéjű csúcs j -edikként születő gyermeke az (x_1, \dots, x_k, j) címkét kapja. Vagyis $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{N}$ az x_k . gyermeke az (x_1, \dots, x_{k-1}) csúcsnak, ami az x_{k-1} . gyermeke az ő szülőjének, és így tovább.

A fákat ilyen módon a címkék halmazával is jellemezhetjük, a címkék

megadják az éleket is. Ezért a továbbiakban a csúcsokat a címkékkel, a fákat a címkék halmazával azonosítjuk. A véges gyökeres címkézett fák halmazát jelölje \mathcal{G} . Azt mondjuk, hogy az $x = (x_1, \dots, x_k)$ csúcs a fa k . generációjába tartozik. Egy x csúcs fokszámát a G fában $\deg(x, G)$ -vel jelöljük.

3.2.2. Lineáris súlyozású véletlen fák

Ahogy a bevezetésben említettük, ebben a modellben az új csúcs egy d fokú régihez d egy rögzített lineáris függvényével arányos valószínűséggel csatlakozik.

Legyen tehát $\beta > -1$ rögzített. $G_n \in \mathcal{G}$ ($n \in \mathbb{N}$) véletlen fák egy sorozata úgy, hogy $G_1 = \{\emptyset\}$, és ha $n, k \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, \dots, x_k) \in G_n$ és $d = \deg(x, G_n)$, akkor

$$P(G_{n+1} = G_n \cup \{d+1\} | G_n) = \frac{d+\beta}{S_n}, \quad \text{ha } x = \emptyset, \text{ és}$$

$$P(G_{n+1} = G_n \cup \{(x_1, \dots, x_k, d)\} | G_n) = \frac{d+\beta}{S_n}, \quad \text{ha } x \neq \emptyset,$$

ahol $S_n = 2n - 2 + n\beta = \sum_{v \in G_n} (\deg(v, G_n) + \beta)$. A $\beta > -1$ kikötés miatt ez értelmes választás.

Azt mondjuk, hogy egy d fokú csúcs *súlya* $d + \beta$. Vagyis a csúcsok kezdeti súlya $1 + \beta$, majd egyesével nő a gyermekek születésekor.

3.3. Fő eredmények

Rögzített $x \in \mathcal{N}$ címkéjű csúcs fokszámának egy valószínűségű viselkedését és határeloszlását szeretnénk leírni $n \rightarrow \infty$ esetén.

A gyökérre a következő eredmények ismertek [45, Móri, 2005].

$$\frac{\deg(\emptyset, G_n)}{n^{1/(2+\beta)}} \rightarrow \zeta_\emptyset \quad (3.1)$$

teljesül 1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén valamely ζ_\emptyset pozitív valószínűséggel

változóra. ζ_\emptyset momentumai így adhatók meg:

$$E\zeta_\emptyset^k = k! \cdot \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta}{2+\beta}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{k+\beta}{2+\beta}\right)} \cdot \binom{k+\beta}{k} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta}{2+\beta}\right)}{\Gamma(\beta+1)} \cdot \frac{\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma\left(1 + \frac{k+\beta}{2+\beta}\right)} \quad (3.2)$$

tetszőleges $k \geq 1$ egészre.

Fő eredményünk a következő tétel.

3.1. tétel. *Legyen $k \in \mathbb{Z}_+$ és $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{N}$ rögzített. Ekkor*

$$\frac{\deg(x, G_n)}{n^{1/(2+\beta)}} \rightarrow \zeta_x$$

1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén valamely ζ_x pozitív valószínűségi változóra. ζ_x eloszlása megegyezik $\zeta_\emptyset \cdot \xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_k$ eloszlásával, ahol

- $\zeta_\emptyset, \xi_1, \dots, \xi_k$ független valószínűségi változók;
- ζ_\emptyset az (3.1) egyenletnek megfelelő;
- ξ_1 eloszlása $Beta(1 + \beta, x_1 - 1)$, ha $x_1 > 1$; $\xi_1 \equiv 1$, ha $x_1 = 1$;
- ξ_s eloszlása $Beta(1 + \beta, x_s)$ minden $2 \leq s \leq k$ egészre.

Bizonyítás. A tételt k szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

$k = 1$ -re legyen j rögzített pozitív egész. A j csúcs a gyökér j . gyermeke.

Ha $j = 1$, a gyökér első gyermekéről van szó, amit az első lépés után egyetlen él köt a gyökérhez. Mindkettőjük foka 1, így szimmetriai megfontolásokból adódik, hogy ζ_\emptyset és ζ_1 azonos eloszlású.

Ha j nagyobb 1-nél, jelölje N , hogy a j csúcs hányadik lépésben jelenik meg. Vagyis $j \in G_N \setminus G_{N-1}$, ahol N véletlen pozitív egész. A j csúcs megszületése után minden csúcs súlyát kettéosztjuk, egy fehér és egy kék részre. Jelölje rendre $F_n(x)$ és $K_n(x)$ az x csúcs fehér és kék súlyát G_n -ben ($n \geq N$). A teljes súly az érvényes fokszám és β összege, tehát

$$\deg(x, G_n) + \beta = F_n(x) + K_n(x) \quad (n \geq N, x \in G_n). \quad (3.3)$$

A súlyt a következő módon osztjuk ketté:

$$\begin{aligned} F_N(j) &= 1 + \beta, & K_N(j) &= 0; \\ F_N(\emptyset) &= 1 + \beta, & K_N(\emptyset) &= j - 1; \\ F_N(x) &= 0, & K_N(x) &= \deg(x, G_N) + \beta \quad (x \in G_N \setminus \{\emptyset, j\}). \end{aligned}$$

Ez lehetséges, mert j súlya $1 + \beta$ születésekor, a gyökérnek pedig ekkor j a foka. Minden más súlyt kékre színeztünk.

Ezután minden új csúcs súlya teljesen kék lesz, születésekor $1 + \beta$ nagyságú. Amikor egy régi x csúcsnak gyermeke születik, súlya eggyel nő. A növekmény színét válasszuk véletlenszerűen, a korábbi döntésektől függetlenül: legyen fehér annyi valószínűséggel, amennyi a fehér súly aránya x éppen érvényes teljes súlyában. Ezt a következőképpen fogalmazhatjuk meg. $n \geq N$, $k \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, \dots, x_k) \in G_n$ esetén legyen $d = \deg(x, G_n)$, ha $x \neq \emptyset$, és $d = 1 + \deg(x, G_n)$, ha $x = \emptyset$. A különbség abból adódik, hogy ha egy gyökértől különböző csúcs foka d , akkor $d - 1$ gyermeke van és a d születhet meg, míg a gyökér fokszáma és gyermekeinek száma megegyezik. Tehát ezekkel a jelölésekkel

$$\begin{aligned} P(G_{n+1} = G_n \cup \{(x_1, \dots, x_k, d)\}, F_{n+1}(x) = F_n(x) + 1 | G_n) &= \quad (3.4) \\ &= \frac{d + \beta}{S_n} \cdot \frac{F_n(x)}{d + \beta} = \frac{F_n(x)}{S_n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(G_{n+1} = G_n \cup \{(x_1, \dots, x_k, d)\}, K_{n+1}(x) = K_n(x) + 1 | G_n) &= \quad (3.5) \\ &= \frac{d + \beta}{S_n} \cdot \frac{K_n(x)}{d + \beta} = \frac{K_n(x)}{S_n}. \end{aligned}$$

A fehér és a kék súlyok közül mindig pontosan az egyik növekszik eggyel, amikor x -nek gyermeke születik. Fehér súlyt csak a gyökérnek és a j . gyermekének adtunk, és kék csúcsok súlya végig kék marad, így

$$F_n(x) = 0, \quad K_n(x) = \deg(x, G_n) + \beta \quad (n \geq N, x \in G_n \setminus \{\emptyset, j\}).$$

A gyökér j . gyermeke viszont végig csak fehér súllyal rendelkezik:

$$F_n(j) = \deg(j, G_n) + \beta, \quad K_n(j) = 0 \quad (n \geq N). \quad (3.6)$$

Az N . lépésben a gyökér és j . gyermeke azonos fehér súlyt kaptak:

$$F_N(j) = F_N(\emptyset) = 1 + \beta.$$

Jelölje $E_{j,i}$ azt az eseményt, hogy a j csúcs az i . lépésben született: $E_{j,i} = \{N = i\}$ ($i = j, j + 1, \dots$). Egy ilyen eseményre szorítkozva érvényes az alábbi gondolatmenet. Annak valószínűsége, hogy egy csúcs fehér súlya az $n + 1$. lépésben növekszik, csak az aktuális fehér súlyától függ, azaz F_n -n keresztül függ G_n -től. Mivel S_n determinisztikus, ez a (3.4), (3.5) egyenletekből látható. Vagyis a kezdeti egyenlőségből és a szimmetriából következik, hogy ha

$$\frac{F_n(\emptyset)}{n^{1/(2+\beta)}} \rightarrow \zeta_j^0 \quad (3.7)$$

az $E_{j,i}$ eseményen majdnem mindenütt valamely pozitív ζ_j^0 valószínűségi változóra, akkor

$$\frac{F_n(j)}{n^{1/(2+\beta)}} \rightarrow \zeta_j$$

is teljesül az $E_{j,i}$ eseményen majdnem mindenütt, ahol ζ_j az előbbi ζ_j^0 -vel megegyező eloszlású valószínűségi változó. Az $E_{j,i}$ események $i = j, j + 1, \dots$ -re teljes eseményrendszer alkotnak. Ezért ha (3.7)-t belátjuk, úgy, hogy ζ_j^0 feltételes eloszlása minden $E_{j,i}$ eseményen ugyanaz, abból az állítás már következik. Vagyis az állítás bizonyításához elég a gyökér viselkedését vizsgálni, ezt tesszük most.

A kezdeti értékek a következők voltak: $F_N(\emptyset) = 1 + \beta$, $K_N(\emptyset) = j - 1$. Szintén a (3.4) és (3.5) egyenletekből következik, hogy

$$\begin{aligned} P(F_{n+1}(\emptyset) = F_n(\emptyset) + 1 | \deg(\emptyset, G_{n+1}) = \deg(\emptyset, G_n) + 1) &= \quad (3.8) \\ &= \frac{F_n(\emptyset)}{K_n(\emptyset) + K_n(\emptyset)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(K_{n+1}(\emptyset) = K_n(\emptyset) + 1 | \deg(\emptyset, G_{n+1}) = \deg(\emptyset, G_n) + 1) &= \quad (3.9) \\ &= \frac{K_n(\emptyset)}{F_n(\emptyset) + K_n(\emptyset)}. \end{aligned}$$

Vagyis azokban a lépésekben, amikor a gyökérnek gyermeke születik, beágyazott folyamatként a Pólya–Eggenberger-féle urnamodell jelenik meg. Ebben egy urnában a fehér és b kék golyó van. Minden lépésben egyetlen

eloszlással kihúzzunk egy golyót, majd c ugyanolyan színűvel együtt visszatesszük. Ismert, hogy a fehér golyók aránya 1 valószínűséggel konvergál egy $Beta(a/c, b/c)$ eloszlású valószínűségi változóhoz (például: [35, 4.2. szakasz, Johnson, Kotz, 1977], [41, 3.2. tétel, Mahmoud, 2005]). Sőt az eredmény akkor is érvényes, ha pozitív, de nem feltétlenül egész fehér és kék súlyokról beszélünk. Azaz minden lépésben súllyal arányos valószínűséggel kiválasztjuk az egyik színt, és c -vel megnöveljük. Ahogy a (3.8) és (3.9) egyenletek mutatják, éppen ez történik azokban a lépésekben, amikor a gyökérnek gyermeke születik. Így alkalmazhatjuk az urnamodellre vonatkozó – martingálemleleti módszerekkel is bizonyítható – eredményeket $a = 1 + \beta$, $b = j - 1$ és $c = 1$ választással. Azt kapjuk, hogy

$$\frac{F_n(\emptyset)}{F_n(\emptyset) + K_n(\emptyset)} \rightarrow \xi_j^0$$

1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén, és ξ_j^0 eloszlása $Beta(1 + \beta, j - 1)$.

Ebből, a (3.1), (3.3) egyenletekből, valamint a $\beta > -1$ feltételből következik, hogy

$$\frac{F_n(\emptyset)}{n^{1/(2+\beta)}} = \frac{F_n(\emptyset)}{F_n(\emptyset) + K_n(\emptyset)} \cdot \frac{\deg(\emptyset, G_n) + \beta}{n^{1/(2+\beta)}} \rightarrow \xi_j^0 \cdot \zeta_\emptyset = \zeta_j^0$$

1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén. ξ_j^0 és ζ_j^0 függetlenek, mivel a fehér súly arányának 1 valószínűségű konvergenciája nem függ a gyökér összsúlyának növekedésétől. Láthatjuk azt is, hogy ζ_j^0 eloszlása minden $E_{j,i}$ eseményen ugyanaz: a határeloszlás független attól, hogy a j . csúcs hányadik lépésben született.

Az eddigiekből adódik, hogy

$$\frac{F_n(j)}{n^{1/(2+\beta)}} \rightarrow \zeta_j$$

$E_{j,i}$ -n majdnem mindenütt minden i -re és így 1 valószínűséggel is $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol ζ_j^0 és ζ_j eloszlása megegyezik. Végül a (3.6) egyenletet felhasználva kapjuk, hogy

$$\frac{\deg(j, G_n)}{n^{1/(2+\beta)}} = \frac{F_n(j) - \beta}{n^{1/(2+\beta)}} \rightarrow \zeta_j$$

1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén. Itt ζ_j eloszlása megegyezik $\zeta_\emptyset \cdot \xi_j$ eloszlásával, ahol ζ_\emptyset a (3.1) segítségével definiált, ξ_j eloszlása $Beta(1 + \beta, j - 1)$, és ez a két valószínűségi változó független. Ezzel a $k = 1$ eset bizonyítása kész.

Tegyük fel, hogy az állítás érvényes valamely $k \geq 1$ egészre. Rögzítsük az $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{N}$ csúcsot és $x_{k+1} \in \mathbb{Z}_+$ -t. Az indukciós lépés bizonyítása az előző gondolatmenet kis módosításával adódik. Az egyetlen különbség, hogy az x csúcs foka x_{k+1} az x_{k+1} . gyermeke születésekor, hiszen egy éllel csatlakozik a saját szülőjéhez, $x_{k+1} - 1$ éllel az idősebb gyermekeihez. Vagyis az urnamodell paraméterei $a = 1 + \beta$ és $b = x_{k+1}$ lesznek, ennek megfelelően ξ_{k+1} eloszlása $Beta(1 + \beta, x_{k+1})$. \square

3.4. Példák

3.4.1. Az Albert–Barabási-fa

Az Albert–Barabási-fa esetében $\beta = 0$ ([8], 2.6.1. szakasz), és ilyenkor a gyökér fokszámából kapott ζ_\emptyset eloszlása pontosan leírható.

3.2. állítás. *Tekintsük az Albert–Barabási-fát, legyen $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{N}$ és $k \in \mathbb{Z}_+$ rögzített. Ekkor*

$$\frac{\deg(x, G_n)}{n^{1/2}} \rightarrow \zeta_x$$

1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén valamely ζ_x pozitív valószínűségi változóra. ζ_x eloszlása megegyezik $\zeta_\emptyset \cdot \xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_k$ eloszlásával, ahol

- $\zeta_\emptyset, \xi_1, \dots, \xi_k$ független valószínűségi változók;
- ζ_\emptyset eloszlása egy standard normális valószínűségi változó abszolút értékének $1/\sqrt{2}$ -szeresével egyezik meg;
- ξ_1 eloszlása $Beta(1, x_1 - 1)$, ha $x_1 > 1$; $\xi_1 \equiv 1$, ha $x_1 = 1$;
- ξ_s eloszlása $Beta(1, x_s)$ minden $2 \leq s \leq k$ egészre.

Bizonyítás. A (3.2) egyenlet alapján $\beta = 0$ -val

$$E\left(\left(2^{-1/2}\zeta_\emptyset\right)^{2k}\right) = \frac{\Gamma(2k+1)}{2^k\Gamma(k+1)} = (2k-1)!!.$$

Ezek éppen a standard normális eloszlás páros momentumai. A $\zeta_\emptyset^2/2$ változóra alkalmazzuk Carleman kritériumát [29, Feller II., 1971, XV. fejezet, 4. §]. Mivel

$$\sum_{k=1}^{\infty} ((2k-1)!!)^{-\frac{1}{2k}} = \infty,$$

ebből következik, hogy a szóban forgó valószínűségi változó eloszlása megegyezik a standard normális négyzetével. A nemnegativitás miatt pedig ebből ζ_\emptyset eloszlása egyértelműen adódik.

A 3.1. tételt alkalmazva az állítás bizonyítása kész. \square

3.4.2. Az általánosított PORT-modell

Az általánosított PORT-modell (plane oriented recursive tree) definícióját használjuk, mely kicsit eltér a 2.6.1. szakaszban látottól [44, Móri, 2002], [25, Drmota, 2009].

Ebben az esetben az új csúcshoz való csatlakozáskor a foksám helyett a gyermekek száma szerepel. Ez a gyökéknél megegyezik a foksámmal, a többi csúcs esetében annál eggyel kevesebb. Vagyis annak valószínűsége, hogy egy d gyermekkel rendelkező csúcs lesz az új csúcs szomszédja, $d + \gamma$ -val arányos, ahol γ pozitív paraméter. A következő állítás bizonyítható.

3.3. állítás. *Legyen $k \in \mathbb{Z}_+$ és $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{N}$ rögzített. Ekkor*

$$\frac{\deg(x, G_n)}{n^{1/(1+\gamma)}} \rightarrow \zeta_x$$

1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén valamely ζ_x pozitív valószínűségi változóra. ζ_x eloszlása megegyezik $\zeta_\emptyset \cdot \xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_k$ eloszlásával, ahol

- $\zeta_\emptyset, \xi_1, \dots, \xi_k$ független valószínűségi változók;
- ξ_s eloszlása $Beta(\gamma, x_s)$ minden $1 \leq s \leq k$ egészre.

ζ_\emptyset létezése Móri [45, 2005] módszereihez hasonlóan mutatható meg martingálméleti eszközökkel. Ennek alapján az állítás bizonyítása a 3.1. tétel módosításaként kapható.

3.4.3. m -elágazó fák

Kérdés lehet, mi a helyzet olyan fákban, ahol m pozitív egész, minden lépésben a fokszám lineáris függvényével arányosan választunk egy csúcsot, ennek pedig m gyermeke születik [41, 8.2.5. szakasz, Mahmoud, 2005]. Ilyenkor tehát minden lépésben m új csúcs jön létre, és mindegyik egy-egy éllel csatlakozik a kiválasztott csúcshoz. Egy d fokú régi csúcsot $d + \beta$ -val arányos valószínűséggel választunk ki, ahol $\beta > -1$ rögzített.

A gyökér fokszámának határeloszlása szokásos martingálméleti módszerekkel adható meg.

Az előző bizonyítás módosítható erre az esetre is. Világos, hogy az egyszerre születő csúcsok fokszámának határeloszlása megegyezik. Tekintsük például a gyökér mj . gyermekét. Ennek születésekor egy éle van, míg a gyökérnek már mj . A gyökér súlyából $1 + \beta$ -t fehérre színezzük, a többi kék. A súlyok növekedésének valószínűsége a korábbival megegyező, így a gyökér fehér súlyának és az mj . gyermek fokának határeloszlása megegyezik. Mivel a további lépésekben a kiválasztott csúcsok súlya m -mel nő, a kiválasztott szín súlyát is m -mel növeljük minden lépésben. Vagyis $a = 1 + \beta$, $b = mj - 1$ és $c = m$ a Pólya–Eggenberger-féle urnamodellben. Ez érvényes az mj . gyermekkel egyszerre született csúcsokra is, így végül azt kapjuk, hogy $\zeta_j = \zeta_\emptyset \xi_1$, ahol ζ_\emptyset és ξ_1 függetlenek, és ξ_1 eloszlása $Beta\left(\frac{1+\beta}{m}, \frac{m\lceil j/m \rceil - 1}{m}\right)$. Ezt lehet folytatni a következő generációkban született csúcsokra is.

3.4.4. Multifák

Tekintsük a 2.6.3. szakaszban definált modellt. $m \geq 2$ rögzített egész. A véletlen m -multifa kezdeti állapotában egy m csúcsú teljes gráfból áll, és ezek a csúcsok közösen egy m nagyságú hiperélt, bázist alkotnak. Minden lépésben egy új csúcs jön létre. Ilyenkor a már létező bázisokból egyenletes

eloszlás szerint kiválasztunk egyet. Az új csúcsot ennek minden csúcsával összekötjük, azaz egy m -multicseresznye jön létre a kiválasztott bázisból és az új csúcsból, mint centrumból. Végül m különböző bázist adunk a multifához, ezek mindegyike tartalmazza az új csúcsot és $m - 1$ darabot a kiválasztott bázis csúcsai közül.

Ebben a modellben mondhatjuk, hogy a létrejövő m darab bázis a kiválasztott bázis m gyermeke. Ebben az értelemben a 3.4.3 szakaszban tárgyalt modellhez jutunk, azzal a különbséggel, hogy a csúcsok kiválasztása a régi csúcsok közül egyenletes eloszlás szerint történik. Ilyenkor egy gyermek megszületésekor a szülő és a gyermek fokszáma közötti különbség véges, a továbbiakban pedig minden lépésben azonos valószínűséggel születnek gyermekei egyiknek vagy másiknak, így a fokszámuk határeloszlása között nincs különbség, ebben az értelemben a feladat nem érdekes.

Ugyanakkor a multifa nem fa, így a fenti egyértelmű címkézéssel sem lehet ellátni a csúcsait. Mivel azonban egy régi csúcshoz egyszerre csak egy új csatlakozik, van értelme egy adott csúcs j . gyermekéről vagy annak k . gyermekéről beszélni. A különbség az, hogy ezek nem lesznek feltétlenül különbözőek, egy csúcs több címkét is kaphat a véletlen folyamatban.

Válasszunk ki a kezdeti m csúcs közül egyet, legyen ez \emptyset . A kezdeti elrendezés szimmetriája miatt az eredmények bármelyik másik kezdeti csúcsra is érvényesek lesznek. [49, Móri, 2010] 3.1. tételéből ($k = 1$ -gyel alkalmazva) kiderül, hogy a kezdeti konfiguráció valamely csúcsához csatlakozó csúcsok számát $n^{(m-1)/m}$ -nel osztva a kapott sorozat egy valószínűséggel konvergál egy pozitív valószínűségi változóhoz. Ebből kiindulva a 3.1. tételhez hasonló eredményhez juthatunk.

Tekintsük a \emptyset csúcs j . gyermekét.

3.4. tétel. *Legyen $k \in \mathbb{Z}_+$ és $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{N}$ rögzített. Ekkor a véletlen m -multifában*

$$\frac{\deg(x, G_n)}{n^{1/(2+\beta)}} \rightarrow \zeta_x$$

1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén valamely ζ_x pozitív valószínűségi változóra. ζ_x eloszlása megegyezik $\zeta_\emptyset \cdot \xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_k$ eloszlásával, ahol

- $\zeta_\emptyset, \xi_1, \dots, \xi_k$ független valószínűségi változók;
- ζ_\emptyset pozitív;
- ξ_1 eloszlása $Beta\left(1 + \frac{1}{m-1}, x_1 - 1\right)$, ha $x_1 > 1$; $\xi_1 \equiv 1$, ha $x_1 = 1$;
- ξ_s eloszlása $Beta\left(1 + \frac{1}{m-1}, x_s\right)$ minden $2 \leq s \leq k$ egészre.

Bizonyítás. A \emptyset csúcsra az állítás, azaz ζ_\emptyset létezése és pozitivitása következik [49] 3.1. tételéből, illetve ahhoz hasonló martingáleméleti módszerekkel könnyen igazolható.

Legyen most $k = 1$, $j \geq 1$ és tekintsük \emptyset j . gyermekét. Az adott csúcsot tartalmazó bázisok számát fogjuk számon tartani, ezekre lesz érvényes a 3.1. tételben alkalmazott gondolatmenet. Kezdetben mind az m csúcs egy bázisban van benne. Minden más csúcs születésekor m bázisba kerül. Ha egy csúcsnak új szomszédja lesz, az őt tartalmazó bázisok száma $m - 1$ -gyel nő. Ezek alapján a j . gyermek születésekor \emptyset -t $1 + (m - 1)j$ bázis tartalmazza, a j . gyermeket m .

A gyökeret tartalmazó $1 + (m - 1)j$ bázis közül m darabnak legyen a színe fehér, a többinek kék. A gyökeret tartalmazó újabb bázisok színe azzal egyezik meg, amilyen színű bázis kiválasztásakor létrejöttek. Mivel a bázisok közül mindig egyenletesen választunk, a j . gyermeket tartalmazó bázisok számának eloszlása megegyezik a fehér bázisok számának eloszlásával határértékben is (az együttes eloszlást ehhez nem kell vizsgálnunk; az egész rendszerben adott számú, egy csúcsra illeszkedő fehér bázisból kiindulva a határeloszlás nem függ attól, hogy melyik bázisokat színeztük fehérre).

A gyökeret tartalmazó bázisokat vizsgálva egy Pólya–Eggenberger-féle urnamodellhez jutunk, ahol $a = m$ fehér, $b = (m - 1)(j - 1)$ kék golyóval indítunk, és minden húzás után $c = m - 1$ ugyanolyan színűt teszünk az urnába. A már idézett eredmények alapján ismert, hogy ilyenkor a fehér golyók számának aránya egy valószínűséggel konvergál egy $Beta(a/c, b/c)$ eloszlású valószínűségi változóhoz.

Azokat a lépéseket vizsgálva, melyekben a gyökér új élt kap, a konvergencia érvényes és a limeszként kapott valószínűségi változó ζ_\emptyset -tól független,

ugyanúgy, mint a 3.1. tételben.

A foksám és a bázisok száma között determinisztikus lineáris kapcsolat áll fenn, egy új éllel a régi csúcs $m - 1$ új bázisba kerül be. Ez a gyökerre és a j . gyermekre egyformán igaz, így áttérhetünk a bázisok száma helyett a foksámra is, hogy megkapjuk ξ_1 -t. Ezzel a $k = 1$ eset kész.

Ezután a bizonyítás k szerinti teljes indukcióval történik. Annyit kell változtatni a fentiekben, hogy a később létrejövő csúcsok születésükkor m bázisban vannak benne egy helyett, így a j . gyermekük születésekor az őket tartalmazó bázisok száma $m + (m - 1)j$. Ezért $a = m$ és $b = (m - 1)j$ az urnamodellben, ha ezek közül m darabot színezzünk fehérre, azaz annyit, ahány bázis a j . gyermeket születésekor tartalmazza. \square

3.5. Funkcionális centrális határeloszlás-tétel

Most a fő eredmények funkcionálokkal kapcsolatos kiterjesztését mutatjuk meg a lineáris súlyozású fákra. Hasonló eredmények kaphatók az előző szakasz többi modelljére, ezeket a részleteket elhagyjuk. Mindez Gouet [33, 1993] funkcionális határeloszlástételekre vonatkozó eredményein alapul. Folyamatok gyenge konvergenciáján az indukált valószínűségi mértékek gyenge konvergenciáját értjük a $D[0, \infty)$ Skorohod-térben. Jelölése: \Rightarrow .

3.5. tétel. *Legyen $k \in \mathbb{Z}_+$ és $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{N}$ rögzített. Ekkor a 3.2.2. szakasz lineáris súlyozású modelljére a következő teljesül.*

$$n^{-1/(2(2+\beta))} (\deg(x, \lfloor nt^{(2+\beta)} \rfloor) - n^{1/(2+\beta)} t \zeta_x) \Rightarrow B(\zeta_x t),$$

minden $t > 0$ -ra $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol B egy ζ_x -től független Wiener-folyamat.

Bizonyítás. A gyökerre, az $x = \emptyset$ esetben, az állítás közvetlenül adódik Gouet eredményéből [33] az alábbi Pólya-urna segítségével. Legyen a gyökér teljes súlya fehér, és minden más súly kék. Minden lépésben egy színt választunk a súlyokkal arányos valószínűségekkel. Gouet [33] jelöléseit használjuk. Ha a fehéret választottuk, a fehér súly $a = 1$ -gyel növekszik, a

kék pedig $b = 1 + \beta$ -val, az új csúcs miatt. Ha a kéket választottuk, a fehér nem változik, azaz $c = 0$, viszont a kék $d = 2 + \beta$ -val nő. Kezdetben $1 + \beta$ fehér súly van, kék nincs. Könnyen látható, hogy ez a modell fenntartható (tenable) a hivatkozott cikknek megfelelő értelemben, ami azt jelenti, hogy az urna kezdetben nem üres, a teljes súly mindig azonos $s = 2 + \beta \geq 1$ mennyiséggel növekszik, $a \neq c$, végül, a folyamat nem áll le megvalósíthatatlan súlycsökkentések miatt. A mi esetünkben ilyen nincs is.

[33] 2.2. állításának feltételei is teljesülnek: $s > a > 0$, $bc = 0$, $\max(b, c)$ pozitív. Ebből pedig azonnal adódik a gyökérre vonatkozó eredmény.

Legyen most $x \in \mathcal{N}$, $x \neq \emptyset$ rögzített. Ismét az x csúcs születési ideje kerül a feltételbe. Jelölje $E_{x,j}$ azt az eseményt, hogy x a j . lépésben született ($j = 1, 2, \dots$). $E_{x,j}$ -re feltételesen színezzük x teljes súlyát fehérre, és minden más súlyt kékre. Ugyanúgy, mint a gyökér esetében, a Gouet által vizsgált urnamodellt kapjuk a következő mátrixszal:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 + \beta \\ 0 & 2 + \beta \end{pmatrix}.$$

Ismét [33] 2.2. állítása alkalmazható, az állítás teljesül az $E_{x,j}$ -re vonatkozó feltételes valószínűségi mezőn. Formálisan legyen

$$S(n, t) = n^{-1/(2(2+\beta))} (\deg(x, \lfloor nt^{(2+\beta)} \rfloor) - n^{1/(2+\beta)} t \zeta_x) \quad (n \geq 1, t > 0);$$

$B^*(t) = B(\zeta_x t)$ minden $t > 0$ -ra. Legyen C rögzített nyílt Borel-halmaz a D Szkorohod-térben. Így azt kapjuk, hogy

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P(S(n, \cdot) \in C | E_{x,j}) \geq P(B^*(\cdot) \in C | E_{x,j}).$$

Mivel az $E_{x,j}$ események j különböző értékeire diszjunktak, ebből adódik, hogy

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P\left(S(n, \cdot) \in C \left| \bigcup_{j=1}^J E_{x,j} \right.\right) \geq P\left(B^*(\cdot) \in C \left| \bigcup_{j=1}^J E_{x,j} \right.\right)$$

minden $J \in \mathbb{N}$ -re. Másfelől világos, hogy

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \sum_{j=J+1}^{\infty} P(E_{x,j}) = 0.$$

Most már könnyen látható, hogy

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P(S(n, \cdot) \in C) \geq P(B^*(\cdot) \in C).$$

Mivel ez minden C nyílt Borel-halmazra teljesül, a gyenge konvergenciát bizonyítottuk. \square

4. fejezet

A háromszöges modell

Ebben a fejezetben egy olyan véletlengráf-modellt vezetünk be és vizsgálunk meg, melyben nem csupán a csúcsok és azok fokszámai számítanak, mint az eddig említett modellek közül szinte mindegyikben (például az Albert–Barabási–, Cooper–Frieze– és a publikációs modellekben [8, 20, 5]), hanem a gráf fejlődése során azt is figyelembe vesszük, hogy mely csoportok hány-szor kaptak egyszerre új éleket. Valós hálózatokban is találkozhatunk olyan esetekkel, amikor nem csupán két csúcs, hanem egyszerre több csúcs szerepel együtt.

Ebben a modellben minden lépésben három csúcs lép kölcsönhatásba, és a már többször választott hármas csoportok nagyobb valószínűséggel vesznek részt közösen újabb kölcsönhatásban. A 2.6.3. szakaszban ismertetett véletlen multifák esetében ez közvetett módon igaz volt, hiszen csak létező bázist választhattunk, de ott sem tartottuk számon, hogy melyik bázist hány-szor választottuk korábban. Itt minden csúcsnak, élnek és háromszögnek pozitív súlya lesz, ami az idő előrehaladtával növekszik, és lényegében azt írja le, hogy hány-szor szerepelt már kölcsönhatásban az adott elem.

Háromszögek helyett nagyobb csoportokat is tekinthetnénk, az átláthatóság kedvéért és a technikai nehézségek miatt azonban ezt az egyszerűbb esetet vizsgáljuk, mely a lényeges jelenségeket már tartalmazza.

Ahogy az [5], [20], [49] cikkek mindegyikében, itt is a skálafüggetlenség igazolása az első cél. Modellünkben egy csúcs súlya és fokszáma között nincs

determinisztikus kapcsolat. Meghatározzuk a súly és a fokszám együttes aszimptotikus eloszlását, azaz a d fokú és w súlyú csúcsok arányának 1 valószínűségű limeszét. Majd a súlyokra bizonyítunk skálafüggetlenséget (1.1. definíció). Vagyis a célunk azt megmutatni, hogy a w súlyú csúcsok aránya 1 valószínűséggel konvergál valamely x_w pozitív konstanshoz, ha a lépések száma végtelenhez tart. Az (x_w) sorozatra rekurziót adunk, amiből látható, hogy x_w polinomiálisan csökken, ha $w \rightarrow \infty$. Ezután a fokszámokra is skálafüggetlenséget bizonyítunk. Látni fogjuk, hogy a kitevők egyenlők a fokszám és a súly esetében. Végül meghatározzuk egy rögzített csúcs súlyának, illetve a maximális súlynak az aszimptotikus viselkedését, majd ugyanezeket a fokszámok esetében is megvizsgáljuk. A módszerek továbbra is a martingálelmélet eszköztárából valók.

A súlyok aszimptotikus eloszlására vonatkozó eredmények megtalálhatók a [7] cikkben.

4.1. A háromszöges modell

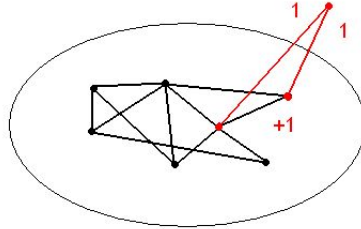
Minden lépésben három csúcs lép majd kölcsönhatásba.

Egyetlen háromszögből indulunk ki. Ennek és minden élének egy a súlya. Ezután lépésről lépésre új csúcsokat és éleket adunk a gráfhoz véletlenszerűen. A csúcsok, élek és háromszögek mindegyikének nemnegatív súlya lesz, mely a gráf fejlődésének megfelelően növekszik. A súly azt mutatja, hogy az adott csúcs, csúcspár vagy háromszög hány alkalommal vett részt közösen kölcsönhatásban.

A háromszögek összsúlya minden lépésben eggyel, míg az élek és a csúcsok összsúlya minden lépésben hárommal fog növekedni, ebben nincs véletlenség.

Minden lépésben először a múlttól függetlenül kisorsoljuk, hogy új csúcs csatlakozik a gráfhoz és két régivel lép kölcsönhatásba, vagy három régi csúcs alakít csoportot. Az új csúcs születésének valószínűsége minden lépésben p , ami a modell első paramétere. Feltesszük, hogy $0 < p \leq 1$.

Ha az n . lépésben új csúcs jön létre, kiválasztunk két régi csúcsot az



4.1. ábra. Az új csúcs kölcsönhatása két régi csúccsal

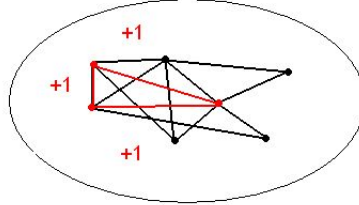
alábbi módon. A múlttól függetlenül r valószínűséggel súlyarányosan választunk, $1-r$ valószínűséggel egyenletesen. r szintén a modell előre rögzített paramétere. A súlyarányos választás azt jelenti, hogy egy éppen w súllyal rendelkező él két végpontját $\frac{w}{3n}$ valószínűséggel választjuk. Itt $3n$ a már behúzott élek összsúlya. Az egyenletes esetben az összes lehetséges csúcspárt ugyanakkora valószínűséggel választjuk. Így korábban össze nem kötött csúcsok között is keletkezhetnek új élek, de hurokéleket nem engedünk meg.

Ezután az új csúcs a két kiválasztott régivel lép kölcsönhatásba (4.1. ábra). Az általuk alkotott háromszög 1 súllyal jelenik meg. Az új csúcsot a két régivel 1-1 súlyú élekkel összekötjük, a két régi csúcs közötti él súlyát pedig eggyel növeljük. Ha még nem volt itt él, ami egyenletes választás esetén előfordulhat, akkor ezt az élet behúzzuk, és természetesen egy súlyt kap. Ezzel a lépés véget ér.

$1-p$ valószínűséggel három régi csúcs között jön létre kölcsönhatás. Ezeket q valószínűséggel súlyarányosan, $1-q$ valószínűséggel egyenletesen választjuk, és ez a döntés is a múlttól független. Ez a q a modell harmadik paramétere.

Súlyarányos választás esetén egy w súlyú háromszög $\frac{w}{n}$ valószínűséggel szerepel. Ha egy háromszög már szerepelt kölcsönhatásban, akkor pozitív a súlya, és fordítva, de más módon is létrejöhetnek háromszögek. Ezeknek a súlya nulla, így ilyenkor nem lehet őket kiválasztani.

Az egyenletes választás itt is visszatevés nélküli mintavételt jelent, bármely három különböző csúcsot egyenlő valószínűséggel választunk ki.



4.2. ábra. Három régi csúcs kölcsönhatása

Mindkét esetben, ha kiválasztottunk három csúcsot, behúzzuk köztük az eddig hiányzó éleket. Ezután a háromszög és mindhárom él súlyát eggyel növeljük (4.2. ábra). A most keletkező élék súlya így egy lesz.

A súly így valóban azt méri élekre és háromszögekre is, hogy az adott két vagy három csúcs hányszor szerepelt közösen kölcsönhatásban. Ez a csúcsokra is érvényes lesz, az alábbi meghatározással.

Egy csúcs súlya az őt tartalmazó háromszögek összsúlya. Ez éppen a belőle kiinduló élék súlyának összegének a fele, hiszen amikor egy csúcs kölcsönhatásban vesz részt, az első összeg eggyel, a második kettővel nő. A csúcsok összsúlya is lépésenként hárommal növekszik.

Hasonlóképpen egy él súlya megegyezik az őt tartalmazó háromszögek összsúlyával. Vagyis az élék súlyarányos választásánál úgy is eljárhatnánk, hogy kiválasztunk egy háromszöget súlyarányosan, majd ennek egy élet egyenletes eloszlás szerint, ez ugyanazt az eredményt adja.

Legyen \mathcal{F}_n az első n lépés által generált σ -algebra, V_n pedig a csúcsok száma n lépés után. Vagyis $V_0 = 3$. Mivel minden lépésben a korábbiaktól függetlenül döntünk az új csúcs születéséről, a nagy számok erős törvénye szerint

$$V_n = pn + o(n^{1/2+\varepsilon}) \quad (4.1)$$

majdnem biztosan minden $\varepsilon > 0$ -ra.

Továbbra is használjuk azt a jelölést, hogy ha $(a_n), (b_n)$ nemnegatív számokból álló sorozatok, $a_n \sim b_n$ azt jelenti, hogy $b_n > 0$ véges sok tag

kivételével, és $a_n/b_n \rightarrow 1$ fennáll $n \rightarrow \infty$ esetén.

4.2. A modell skálafüggetlensége

Az első felvetődő kérdés a súlyok aszimptotikus eloszlásának meghatározása, azaz a w súlyú csúcsok arányának vizsgálata. Kérdés, hogy tapasztalhatunk-e itt skálafüggetlen viselkedést. Skálafüggetlen viselkedés olyan modellekben várható, ahol nagyobb fokszámmal, súllyal rendelkező csúcsok nagyobb valószínűséggel kapnak új éleket. Ezért feltesszük, hogy nem csak egyenletes választás van, azaz $r > 0$, vagy $q > 0$ és $p < 1$. Azt korábban feltettük, hogy p pozitív.

Egy csúcs súlya az őt tartalmazó háromszögek súlyának összege, ami fele a csúcsból induló élek súlyának összegének. A csúcs súlya akkor növekszik, ha a csúcs kölcsönhatásban vesz részt, és azt mutatja, hogy az adott csúcs hányszor vett részt kölcsönhatásban. A csúcsokra egy másik mennyiség is jellemző: a fokszám, azaz a belőlük induló élek száma, ami azt mutatja, hogy az adott csúcs hány különböző másik csúccsal lépett már kölcsönhatásba. Ha a csúcs kölcsönhatásban vesz részt, a fokszáma nőhet kettővel, például ha egy új csúcs és egy egyenletesen választott régi vesz részt a kölcsönhatásban, vagy eggyel, például ha egy új csúcs csatlakozik, de súlyarányosan választunk. Az is lehetséges, hogy a súly növekszik, de a fokszám nem változik: biztosan ez a helyzet, ha három régi csúcs lép kölcsönhatásba, melyeket súlyarányosan választunk a meglévő háromszögek közül. Ilyenkor nem keletkeznek új élek, csak meglévők súlya növekszik. Tehát a súly és a fokszám nem egymás determinisztikus függvényei. Így további kérdés, hogy van-e aszimptotikus fokszámeloszlás, skálafüggetlen viselkedés a fokszámokra.

Ezek megválaszolásához a súly és a fokszám együttes aszimptotikus viselkedését, azaz a w súlyú és d fokú csúcsok arányának határértékét fogjuk meghatározni. Ebből az aszimptotikus súly- és fokszámeloszlás is leolvasható lesz.

4.2.1. A súly és a fokszám együttes eloszlása

Ahhoz, hogy a súly és fokszám együttes eloszlását leírjuk, jelölje $X[n, d, w]$ a d fokú és w súlyú csúcsok számát n lépés után. Minden csúcs kezdeti fokszáma kettő, és kezdeti súlya egy. Amikor a csúcs kölcsönhatásban vesz részt, súlya eggyel nő, fokszáma nullával, eggyel, vagy kettővel. Ezért csak olyan d, w párokra lehet pozitív ez a mennyiség, ahol $1 \leq w$ és $2 \leq d \leq 2w$. Az alábbi tétel a d fokú és w súlyú csúcsok arányának 1 valószínűségű konvergenciájáról szól.

4.1. tétel. *Rögzített $1 \leq w$ és $2 \leq d \leq 2w$ egészekre*

$$\frac{X[n, d, w]}{V_n} \rightarrow x_{d,w}$$

teljesül 1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol $x_{d,w}$ pozitív konstans. Az alábbi rekurzió érvényes:

$$\begin{aligned} x_{2,1} &= \frac{1}{\alpha + \beta + 1}; \\ x_{d,w} &= \frac{1}{\alpha w + \beta + 1} [\alpha_1(w-1)x_{d,w-1} + \alpha_2(w-1)x_{d-1,w-1} + \beta x_{d-2,w-1}], \\ \alpha_1 &= (1-p)q, \quad \alpha_2 = \frac{2pr}{3}, \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \\ \beta &= \frac{1}{p} [2(1-r) + 3(1-p)(1-q)]. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Írjuk fel $X[n, d, w]$ feltételes várható értékét az \mathcal{F}_{n-1} σ -algebrára vonatkozóan, ha $w \geq 1$. Felhasználjuk, hogy ha egy régi csúcs az újjal lép kölcsönhatásba, akkor mindenképpen nő a fokszáma, ugyanakkor súlyarányos választásnál nem keletkeznek új élek a régi csúcsok között.

Az első lépés annak meghatározása, hogy egy w súlyú csúcs milyen valószínűséggel vesz részt kölcsönhatásban az n . lépésben.

Ha az n . lépésben új csúcs csatlakozik, és súlyarányosan választunk az élek közül, egy w súlyú csúcs $\frac{2w}{3n}$ valószínűséggel vesz részt a kölcsönhatásban, hiszen az élek összsúlya $3n$, és az egy csúcsba befutó élek súlyának összege a csúcs w súlyának kétszerese, hiszen minden kölcsönhatás mindkét éle eggyel-eggyel növeli a csúcsba befutó élek összsúlyát.

Másrészt $\binom{V_{n-1}}{2}$ csúcspár van, és minden csúcs $V_{n-1} - 1$ -be tartozik bele. Vagyis egy csúcsot $\frac{2}{V_{n-1}}$ valószínűséggel választunk egyenletes eloszlásnál.

Nézzük a régi csúcsok közötti kölcsönhatást. Ha egy csúcs súlya w , az épp azt jelenti, hogy az őt tartalmazó háromszögek súlyának összege w , míg az összes háromszög súlyának összege n az első $n - 1$ lépés után. Ezért a kiválasztás valószínűsége $\frac{w}{n}$ súlyarányos választásnál. Egyenletes választásnál ugyanerre $\binom{V_{n-1}-1}{2} / \binom{V_{n-1}}{3} = \frac{3}{V_{n-1}}$ adódik.

Összességében tehát annak valószínűsége, hogy egy w súlyú csúcs kölcsönhatásban vesz részt az n . lépésben:

$$p \left[r \frac{2w}{3n} + (1-r) \frac{2}{V_{n-1}} \right] + (1-p) \left[q \frac{w}{n} + (1-q) \frac{3}{V_{n-1}} \right] = \frac{\alpha w}{n} + \frac{\beta p}{V_{n-1}}. \quad (4.2)$$

Ezek alapján annak valószínűsége, hogy egy d fokú, w súlyú csúcsra az n . lépésben teljesül, hogy

- sem a súly, sem a foka nem változik: $1 - \frac{\alpha w}{n} - \frac{\beta p}{V_{n-1}}$.
- súly növekszik, de foka nem változik: $(1-p) \left[q \frac{w-1}{n} + (1-q) \frac{\binom{d}{2}}{\binom{V_{n-1}}{3}} \right]$.
Ilyenkor a csúcs mindenképpen két régi csúcscsal hat kölcsön, különben nőne a foka. Ezen belül ez történik súlyarányos választásnál, vagy egyenletes választásnál, ha a meglévő d szomszédja közül választunk kettőt.
- súly és foka is eggyel nő:

$$p \left[r \frac{2(w-1)}{3n} + (1-r) \frac{d}{\binom{V_{n-1}}{2}} \right] + (1-p)(1-q) \frac{d(V_{n-1}-1-d)}{\binom{V_{n-1}}{3}}.$$

Ez történik, ha új csúcs csatlakozik, és súlyarányos választás van, vagy egyenletes választásnál ezt a csúcsot és a d szomszédja közül az egyiket választjuk; továbbá, ha három régi csúcs hat kölcsön, és az egyenletes választásnál ezt a csúcsot, egy szomszédját és egy olyat választunk, amivel még nincs összekötve.

- súlya eggyel, foka kettővel nő:

$$p(1-r)\frac{V_{n-1}-d-1}{\binom{V_{n-1}}{2}} + (1-p)(1-q)\frac{\binom{V_{n-1}-1-d}{2}}{\binom{V_{n-1}}{3}}.$$

Ez akkor történik, ha új csúcs születik, és a régiek közül ezt a csúcsot és egy olyat választunk az egyenletes választásnál, ami eddig nem volt a szomszédja, vagy ha ez a csúcs egyenletes választásnál két olyan régi csúccsal lép kölcsönhatásba, amelyekkel eddig nem volt összekötve.

Az újonnan születő csúcs kezdeti foka mindig kettő és súlya mindig egy, ezért amikor $d = 2$ és $w = 1$, p valószínűséggel az új csúcs miatt eggyel nő az ilyen csúcsok száma.

Ezek alapján $X[n, d, w]$ feltételes várható értéke, ha $w \geq 1$:

$$\begin{aligned} E(X[n, d, w]|\mathcal{F}_n) &= X[n-1, d, w] \cdot \left(1 - \frac{\alpha w}{n} - \frac{\beta p}{V_{n-1}}\right) + \\ &+ X[n-1, d, w-1] \cdot (1-p) \left[q\frac{w-1}{n} + (1-q)\frac{\binom{d}{2}}{\binom{V_{n-1}}{3}} \right] + \\ &+ X[n-1, d-1, w-1] \cdot p \left[r\frac{2(w-1)}{3n} + (1-r)\frac{d}{\binom{V_{n-1}}{2}} \right] + \\ &+ X[n-1, d-1, w-1] \cdot (1-p)(1-q)\frac{d(V_{n-1}-1-d)}{\binom{V_{n-1}}{3}} + \\ &+ X[n-1, d-2, w-1] \times \\ &\times \left[p(1-r)\frac{V_{n-1}-d-1}{\binom{V_{n-1}}{2}} + (1-p)(1-q)\frac{\binom{V_{n-1}-1-d}{2}}{\binom{V_{n-1}}{3}} \right] + p\delta_{d,2}\delta_{w,1}. \end{aligned}$$

Legyen

$$c[n, w] = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\alpha w}{i} - \frac{\beta p}{V_{i-1}}\right)^{-1}, \quad n \geq 1, w \geq 1.$$

A (4.1) egyenlet szerint minden pozitív, $\frac{1}{2}$ -nél kisebb ε -ra

$$\begin{aligned} \log c[n, w] &= \sum_{i=1}^{n-1} -\log \left(1 - \frac{\alpha w}{i} - \frac{\beta}{i + o(i^{1/2+\varepsilon})}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\alpha w}{i} + \frac{\beta}{i} + o(i^{-3/2+\varepsilon})\right) = (\alpha w + \beta) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} + O(1) \end{aligned}$$

1 valószínűséggel, ahol a hibatag $n \rightarrow \infty$ esetén konvergens. Ebből következik, hogy

$$c[n, w] \sim a_w n^{\alpha w + \beta} \quad (4.3)$$

1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol a_w pozitív valószínűségi változó.

Szorozzuk meg az előző egyenlet mindkét oldalát $c[n, w]$ -vel. Legyen $Z[n, d, w] = c[n, w]X[n, d, w]$, $n \geq 1, w \geq 1, d \geq 2$. Azt kapjuk, hogy $(Z[n, d, w], \mathcal{F}_n)$ nemnegatív szubmartingál minden $w \geq 1, d \geq 2$ pozitív egészre. A 2.3. állítást fogjuk alkalmazni. A Doob–Meyer-felbontásban legyen $Z[n, w] = M[n, d, w] + A[n, d, w]$, ahol $M[n, d, w]$ martingál és $A[n, d, w]$ a kanonikus növekvő folyamat:

$$\begin{aligned} A[n, d, w] = & EZ[1, d, w] + \\ & + \sum_{i=2}^n c[i, w]X[i-1, d, w-1](1-p) \left[q \frac{w-1}{i} + (1-q) \frac{\binom{d}{2}}{\binom{V_{i-1}}{3}} \right] + \\ & + c[i, w]X[i-1, d-1, w-1] \cdot p \left[r \frac{2(w-1)}{3i} + (1-r) \frac{d}{\binom{V_{i-1}}{2}} \right] + \\ & + c[i, w]X[i-1, d-1, w-1] \cdot (1-p)(1-q) \frac{d(V_{i-1}-1-d)}{\binom{V_{i-1}}{3}} + \\ & + c[i, w]X[i-1, d-2, w-1] \times \\ & \times \left[p(1-r) \frac{V_{i-1}-d-1}{\binom{V_{i-1}}{2}} + (1-p)(1-q) \frac{\binom{V_{i-1}-1-d}{2}}{\binom{V_{i-1}}{3}} \right] + \\ & + c[i, w]p\delta_{d,2}\delta w, 1. \end{aligned}$$

A martingál szórására felső becslést adunk. Ehhez felhasználjuk, hogy $c[i, w]$ mérhető \mathcal{F}_{i-1} -re, illetve mivel egy lépésben egy kölcsönhatás van, X

megváltozása legfeljebb három lehet. A (4.3) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
B[n, d, w] &= \sum_{i=2}^n D^2(Z[i, d, w] | \mathcal{F}_{i-1}) = \sum_{i=2}^n c[i, w]^2 D^2(X[i, d, w] | \mathcal{F}_{i-1}) = \\
&= \sum_{i=2}^n c[i, w]^2 D^2(X[i, d, w] - X[i-1, d, w] | \mathcal{F}_{i-1}) \leq \\
&\leq \sum_{i=2}^n c[i, w]^2 E \left((X[i, d, w] - X[i-1, d, w])^2 | \mathcal{F}_{i-1} \right) \leq \\
&\leq 9 \sum_{i=2}^n c[i, w]^2 = O(n^{2(\alpha w + \beta) + 1}).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Ezután a bizonyítás w szerinti teljes indukcióval történik. Az első lehetőség $w = 1$, ide csak olyan csúcsok számítanak, amik születésük óta még nem vettek részt kölcsönhatásban, ezért fokuk mindenképpen 2.

$d = 2, w = 1$ -re

$$A[n, 2, 1] \sim p \sum_{i=2}^n c[i, 1] \sim p \sum_{i=2}^n a_1 i^{\alpha + \beta} \sim p \cdot \frac{a_1}{\alpha + \beta + 1} \cdot n^{\alpha + \beta + 1} \tag{4.5}$$

teljesül 1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén.

Másrészt $B[n, 2, 1] = O(n^{2(\alpha + \beta) + 1})$, így a 2.3. állítást alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$Z[n, 2, 1] \sim A[n, 2, 1]$$

1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén. $c[n, 1]$ és $A[n, 2, 1]$ aszimptotikáját ismerjük a (4.3) és (4.5) egyenletekből, ezután alkalmazzuk (4.1)-t és $Z[n, 2, 1]$ definícióját. Mindezekből azt kapjuk, hogy

$$\frac{X[n, 2, 1]}{V_n} = \frac{Z[n, 2, 1]}{c[n, 1]V_n} \sim \frac{\frac{a_1}{\alpha + \beta + 1} p n^{\alpha + \beta + 1}}{a_1 n^{\alpha + \beta} p n} \rightarrow \frac{1}{\alpha + \beta + 1}$$

1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén.

Vagyis a tétel teljesül $w = 1$ -re $x_{2,1} = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}$ -gyel, és erre a súlyra semmilyen más fokszám nem fordul elő.

Tegyük fel, hogy w -nél kisebb súly esetén igaz a tétel állítása minden lehetséges d súlyra, azaz 2 és a súly kétszerese közti értékekre létezik és pozitív 1 valószínűségű határértéke a d fokú és w súlyú csúcsok arányának. Az egyszerűség kedvéért $x_{d,w}$ legyen nulla, amikor nem teljesül az $1 \leq w$ és $2 \leq d \leq 2w$ feltételek valamelyike, ezek is részt vehetnek majd a rekurzióban.

Az $A[n, d, w]$ -ben szereplő tagokról bizonyosokról tudjuk, hogy 0, másoktól az indukciós feltevés miatt tudjuk az aszimptotikát. Azt vehetjük észre, hogy egyes tagok nagyságrendje kisebb a többinél. Mivel a foksám, d rögzített, a csúcsok száma, n pedig végtelenhez tart, minden egyenletes választáskor annak valószínűsége, hogy az adott csúcs egy szomszédjával lép kölcsönhatásba, aszimptotikusan kisebb, mint annak valószínűsége, hogy egy vele össze nem kötöttel hat kölcsön, és így új élt kap. Ugyanakkor új csúccsal való kölcsönhatáskor mindig nő a foksám, súlyarányos választáskor pedig régi csúcsok között nem keletkezhet új él. Ezeket láthatjuk majd $A[n, d, w]$ aszimptotikájában, melyet az indukciós feltevés szerint a következőképpen kaphatunk meg. Felhasználjuk még, hogy a (4.1) egyenlet szerint a csúcsok száma aszimptotikusan pn -nel egyenlő, továbbá a (4.3) szerint a normáló konstansok regulárisan változók $\alpha w + \beta$ kitevővel.

$$\begin{aligned}
A[n, d, w] &\sim \sum_{i=2}^n c[i, w] \cdot x_{d,w-1} p i \cdot (1-p) q \frac{w-1}{i} + \\
&\quad + c[i, w] \cdot x_{d-1,w-1} p i \cdot p r \frac{2(w-1)}{3i} + \\
&\quad + c[i, w] \cdot x_{d-2,w-1} p i \left[2(1-r) + \frac{3(1-p)(1-q)}{p} \right] \sim \\
&\sim p \sum_{i=2}^n a_w i^{\alpha w + \beta} \left[(1-p) q (w-1) x_{d,w-1} + p r \frac{2(w-1)}{3} x_{d-1,w-1} + \right. \\
&\quad \left. + \left[2(1-r) + \frac{3(1-p)(1-q)}{p} \right] x_{d-2,w-1} \right] \sim \\
&\sim p \frac{a_w n^{\alpha w + \beta + 1}}{\alpha w + \beta + 1} \left[(1-p) q (w-1) x_{d,w-1} + p r \frac{2(w-1)}{3} x_{d-1,w-1} + \right. \\
&\quad \left. + \left[2(1-r) + \frac{3(1-p)(1-q)}{p} \right] x_{d-2,w-1} \right]
\end{aligned}$$

teljesül 1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén. Vegyük észre, hogy ha a d, w pár olyan, hogy $X[n, d, w]$ lehet pozitív, akkor a jobb oldalon szereplő együtt-hatók között is van olyan, melyről az indukciós feltevés alapján tudjuk, hogy pozitív. Ha ugyanis $2 \leq d \leq 2(w-1)$, akkor $x_{d,w-1}$ pozitív, ha $d = 2w-1$, akkor $w \geq 2$ miatt $x_{d-1,w-1}$ lesz biztosan pozitív, ha pedig $d = 2w \geq 4$, akkor $x_{d-2,w-1} > 0$.

Most tehát alkalmazhatjuk a 2.3. állítást: a szórásnégyzet becslése szerint $B[n, d, w]^{1/2} \log B[n, d, w] = O(n^{\alpha w + \beta + 6/10}) = O(A[n, d, w])$. Ezért az állítás szerint $Z[n, d, w] \sim A[n, d, w]$ teljesül 1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén, majd a $c[n, w]$ normáló konstansokkal osztva kapjuk, hogy

$$X[n, d, w] \sim x_{d,w}pn \quad \Rightarrow \quad \frac{X[n, d, w]}{V_n} \rightarrow x_{d,w}$$

$n \rightarrow \infty$ esetén 1 valószínűséggel, ahol

$$\begin{aligned} x_{d,w} &= \frac{1}{\alpha w + \beta + 1} \left[(1-p)q(w-1)x_{d,w-1} + pr \frac{2(w-1)}{3} x_{d-1,w-1} + \right. \\ &\quad \left. + \left(2(1-r) + \frac{3(1-p)(1-q)}{p} \right) x_{d-2,w-1} \right] = \\ &= \frac{1}{\alpha w + \beta + 1} [\alpha_1(w-1)x_{d,w-1} + \alpha_2(w-1)x_{d-1,w-1} + \beta x_{d-2,w-1}], \end{aligned}$$

és valóban

$$\alpha_1 = (1-p)q, \quad \alpha_2 = \frac{2pr}{3}, \quad \beta = 2(1-r) + \frac{3(1-p)(1-q)}{p}.$$

Így a bizonyítás indukciós lépése kész. Azt is láttuk, hogy $x_{d,w}$ valóban pozitív, ha d és w teljesíti a feltételeket. \square

Az együttes aszimptotikus eloszlás explicit alakja

Az együttes eloszlásra a rekurzió alapján explicit alak is felírható. Ezt mutatjuk meg a következő állításban, bár ezt az előállítást nem fogjuk használni a skálafüggetlenség bizonyításában.

4.2. állítás. Legyen $c_w = (\alpha w + \beta + 1)(\alpha(w - 1) + \beta + 1) \dots (\alpha + \beta + 1)$ ($w \geq 1$). Ekkor a 4.1. tételben szereplő rekurzió megoldása így írható $1 \leq w$, $2 \leq d \leq 2w$ esetén:

$$x_{d,w} = \frac{1}{c_w} \sum_{k=1}^w \left[\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{w-k} \leq w-1} (w - i_1)(w - i_2) \dots (w - i_{w-k}) \right] \times \\ \times \binom{w-k}{d-2k} \alpha_1^{w-d+k} \alpha_2^{d-2k} \beta^{k-1}.$$

$w = 1$ -re az üres összeget 1-nek tekintjük.

Bizonyítás. w szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Már láttuk, hogy a feltételt nem teljesítő d, w párokra $x_{d,w}$ -t nullának értelmezhetjük. A képlet ilyenkor is jó eredményt ad: $d > 2w$ esetén $d - 2k > w - k$, így a binomiális együttható minden tagban nulla. Ezért ahogyan a rekurzióban, az itteni bizonyításban is beírhatjuk ezeket a tagokat, nulla hozzáadásával nem változtatunk majd az összegben.

$w = 1$ -re $d = 2$ az egyetlen lehetőség. Ilyenkor $k = 1$, $w - k = 0$ darab i -t kell kiválasztani, az első összeget 1-nek értelmeztük. A binomiális együttható 1, a kitevők pedig mind nullák, így $x_{2,1}$ -re c_1 reciproka adódik, a 4.1. tételnek megfelelően.

Tegyük fel, hogy valamely $w \geq 1$ -re minden nála kisebb súlyra és lehetséges d -re érvényes a fenti alak. Ekkor használjuk az indukciós feltevést, az első két tagban a binomiális együtthatók összegére vonatkozó összefüggést, a harmadikban pedig indexcserét. Vegyük észre, hogy az első két tagban az α_1 , α_2 , β kitevői az α_1 -gyel, illetve α_2 -vel való szorzás után éppen megegyeznek.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha w + \beta + 1} [\alpha_1(w-1)x_{d,w-1} + \alpha_2(w-1)x_{d-1,w-1} + \beta x_{d-2,w-1}] = \\
& = \frac{1}{c_w} (w-1) \sum_{k=1}^{w-1} \left[\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{w-1-k} \leq w-2} (w-1-i_1) \dots (w-1-i_{w-k}) \right] \times \\
& \quad \times \binom{w-1-k}{d-2k} \alpha_1^{w-d+k} \alpha_2^{d-2k} \beta^{k-1} + \\
& \quad + \frac{1}{c_w} (w-1) \sum_{k=1}^{w-1} \left[\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{w-1-k} \leq w-2} (w-1-i_1) \dots (w-1-i_{w-k}) \right] \times \\
& \quad \times \binom{w-1-k}{d-1-2k} \alpha_1^{w-d+k} \alpha_2^{d-2k} \beta^{k-1} + \\
& \quad + \frac{1}{c_w} (w-1) \sum_{k=1}^{w-1} \left[\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{w-1-k} \leq w-2} (w-1-i_1) \dots (w-1-i_{w-k}) \right] \times \\
& \quad \times \binom{w-1-k}{d-2-2k} \alpha_1^{w-d+k+1} \alpha_2^{d-2k-2} \beta^k = \\
& = \frac{1}{c_w} \sum_{k=1}^{w-1} (w-1) \left[\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{w-1-k} \leq w-2} (w-1-i_1) \dots (w-1-i_{w-k}) \right] \times \\
& \quad \times \binom{w-k}{d-2k} \alpha_1^{w-d+k} \alpha_2^{d-2k} \beta^{k-1} + \\
& \quad + \frac{1}{c_w} \sum_{k=2}^w \left[\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{w-k} \leq w-2} (w-1-i_1) \dots (w-1-i_{w-k}) \right] \times \\
& \quad \times \binom{w-k}{d-2k} \alpha_1^{w-d+k} \alpha_2^{d-2k} \beta^{k-1}.
\end{aligned}$$

Most a binomiális együtthatók és α_1 , α_2 , β kitevői is megegyeznek. Az első tagban minden lehetséges módon kiválasztunk 1 és $w-2$ között $w-k-1$ különböző számot, majd a szorzatukat megszorozzuk $w-1$ -gyel. Tehát összesen $w-k$ különböző számot választottunk 1 és $w-1$ között, úgy, hogy $w-1$ biztosan szerepel. A második tagban pedig szintén $w-k$ különböző számot választottunk, de csak 1 és $w-2$ között, tehát ezekben $w-1$ biztosan nem szerepel. Összességében tehát minden olyan szorzatot megkapunk, ahol $w-k$ tényező szerepel, melyek 1 és $w-1$ közötti különböző számok, ahol

$w - 1$ szerepel, az az első tagban van, ahol nem, az a másodikban. k értéke 1 és w között mehet. Az első tagban $k = w$ hiányzik, ilyenkor 0 számot kell választani, ezt nem lehet úgy, hogy $w - 1$ szerepeljen. Ezt 1-nek értelmeztük, és a második tagban található. A második összegből $k = 1$ hiányzik, hiszen $w - 1$ különböző számot választani csak úgy tudunk 1 és $w - 1$ között, ha mindegyik szerepel, tehát $w - 1$ is. Összességében tehát mindent pontosan egyszer számoltunk, és a fenti összegre

$$\frac{1}{c_w} \sum_{k=1}^w \left[\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{w-k} \leq w-1} (w - i_1)(w - i_2) \dots (w - i_{w-k}) \right] \times \\ \times \binom{w-k}{d-2k} \alpha_1^{w-d+k} \alpha_2^{d-2k} \beta^{k-1}$$

adódik. Ezzel az indukciós lépés kész. □

Az együttes eloszlás előállítása

A 4.2. állítás bizonyítás arra mutat rá, hogy ha egy csúcs súlya növekszik, akkor foka csak kis valószínűséggel nő, ha három, súlyokkal arányosan választott régi csúcs kölcsönhatásáról van szó, ilyenkor ugyanis nem keletkeznek új élek; tipikusan eggyel nő, ha új csúcsot választunk, és súlyarányosan választjuk a szomszédait; végül nagy valószínűséggel kettővel nő, ha egyenletes választás történik. Ennek alapján lehet sejteni, hogy a határeloszlás előállítható bizonyos független valószínűségi változók összegeként. Erről szól az alábbi állítás, amely alapján az együttes eloszlás peremeloszlásait is vizsgálni tudjuk majd.

Az alábbi jelölést fogjuk használni:

$$x_w = x_{2,w} + \dots + x_{2w,w} \quad (w \geq 1),$$

azaz x_w az összes lehetséges w -hez tartozó x, w párra a megfelelő limeszek összege.

Legyen W pozitív egész értékű valószínűségi változó ezzel az eloszlással: $P(W = w) = x_w$, $w = 1, 2, \dots$. Legyen $\xi_1 \equiv 2$, és a ξ_2, ξ_3, \dots valószínűségi

változók legyenek függetlenek egymástól és W -től is, továbbá

$$P(\xi_w = 0) = \frac{\alpha_1(w-1)}{\alpha(w-1) + \beta}, \quad P(\xi_w = 1) = \frac{\alpha_2(w-1)}{\alpha(w-1) + \beta},$$

$$P(\xi_w = 2) = \frac{\beta}{\alpha(w-1) + \beta}.$$

4.3. állítás. *Tekintsük az $S_w = \xi_1 + \dots + \xi_w$ részletösszegeket. Ekkor*

$$P(S_W = d, W = w) = x_{d,w}, \quad 1 \leq w, \quad 2 \leq d \leq 2w.$$

Bizonyítás. A kezdeti feltétel könnyen látható:

$$P(S_W = 2, W = 1) = P(W = 1) = x_1 = x_{2,1}.$$

Ezután

$$\begin{aligned} P(S_W = d, W = w) &= P(S_w = d, W = w) = \\ &= P(S_w = d)P(W = w) = \\ &= \left[P(S_{w-1} = d)P(\xi_w = 0) + P(S_{w-1} = d-1)P(\xi_w = 1) + \right. \\ &\quad \left. + P(S_{w-1} = d-2)P(\xi_w = 2) \right] \left[P(W = w-1) \frac{\alpha(w-1) + \beta}{\alpha w + \beta + 1} \right] \\ &= P(S_{w-1} = d, W = w-1) \frac{\alpha_1(w-1)}{\alpha w + \beta + 1} + \\ &\quad + P(S_{w-1} = d-1, W = w-1) \frac{\alpha_2(w-1)}{\alpha w + \beta + 1} + \\ &\quad + P(S_{w-1} = d-2, W = w-1) \frac{\beta}{\alpha w + \beta + 1}. \end{aligned}$$

Vagyis a $P(S_W = d, W = w)$ valószínűségek ugyanazt a rekurziót teljesítik, mint ami $(x_{d,w})$ definíciójában szerepelt a 4.1. tételben. \square

4.4. állítás. $(x_{d,w})$ valószínűségeloszlás, azaz $\sum_{w=1}^{\infty} \sum_{d=2}^{2w} x_{d,w} = 1$.

Bizonyítás. Mivel az előző állításban szereplő (S_W, W) valószínűségi vektor-változó, ez az előző állításból azonnal következik. \square

4.2.2. Skálafüggetlenség súlyokra

Jelölje $X[n, w]$ a w súllyal rendelkező csúcsok számát n lépés után. Az $\frac{X[n, w]}{V_n}$ arányról szeretnénk 1 valószínűségű konvergenciát bizonyítani, majd a limeszekre rekurziót adni és polinomiális csökkenésüket látni.

4.5. tétel. Minden $w = 1, 2, \dots$ egészre

$$\frac{X[n, w]}{V_n} \rightarrow x_w = x_{2,w} + \dots + x_{2w,w}$$

1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén. Az x_w határértékek pozitívak, és az alábbi rekurziót teljesítik:

$$x_1 = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}, \quad x_w = \frac{\alpha(w-1) + \beta}{\alpha w + \beta + 1} x_{w-1}, \quad w \geq 2, \quad (4.6)$$

ahol

$$\alpha = \frac{2}{3}pr + (1-p)q > 0, \quad \beta = \frac{1}{p}[2p(1-r) + 3(1-p)(1-q)].$$

Továbbá

$$x_w \sim Cw^{-(1+\frac{1}{\alpha})},$$

amint $w \rightarrow \infty$ valamely C pozitív számmal.

Bizonyítás. A 4.3. állítás és a 4.1. tétel szerint a súly és fokszám együttes tapasztalati eloszlása teljes variációs normában konvergál (S_W, W) -hez. Ezért ez teljesül $X[n, w]/V_n$ -re és W -re, amiből az 1 valószínűségű konvergencia is következik.

Tehát x_w létezik, és $\sum_d x_{d,w}$ -vel egyenlő. 1 súlya csak 2 fokú csúcsnak lehet, ezért $x_1 = x_{2,1}$, ez a kezdő lépés. Az $x_{d,w}$ -re a 4.1. tételben kapott rekurziót d szerint könnyen összegezhethetjük, így kapjuk a (4.6) összefüggést. Ebből tovább számolva

$$\begin{aligned} x_w &= x_1 \prod_{j=2}^w \frac{\alpha(j-1) + \beta}{\alpha j + \beta + 1} = \frac{1}{\alpha w + \beta + 1} \prod_{j=1}^{w-1} \frac{j + \frac{\beta}{\alpha}}{j + \frac{\beta+1}{\alpha}} = \\ &= \frac{\Gamma(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}) \Gamma(w + \frac{\beta}{\alpha})}{\alpha \Gamma(1 + \frac{\beta}{\alpha}) \Gamma(w + \frac{\beta+1}{\alpha} + 1)} \sim Cw^{-(1+\frac{1}{\alpha})} \quad (4.7) \end{aligned}$$

valamely pozitív C számmal, amint w végtelenhez tart. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. \square

4.1. megjegyzés. Az (x_w) sorozat valószínűségeloszlás, összege 1, hiszen az együttes eloszlást, $(x_{d,w})$ -t összegezve is egyet kapunk.

4.2.3. Skálafüggetlenség fokszámokra

A fokszámoknál megjelenő határértékekre sem a rekurzióból, sem az explicit alakból nem látható könnyen az aszimptotikus viselkedés, az együttes eloszlás határértékére adott fenti konstrukcióból azonban igen. Emellett generátorfüggvényes módszerek használatával is minden bizonnyal meghatározható lenne az aszimptotika.

Mielőtt a fokszámokra vonatkozó peremeloszlás aszimptotikáját megadnánk, az együttes eloszlás viselkedését írjuk le a 4.3. állításbeli előállítás és koncentrációs eredmények segítségével.

4.6. tétel. *Tegyük fel, hogy α_1 és α_2 pozitívak. Ekkor*

$$x_{d,w} = x_w \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\alpha_1\alpha_2w}} \left(\exp\left(-\frac{(\alpha d - \alpha_2 w)^2}{2\alpha_1\alpha_2w}\right) + O(w^{-1/2}) \right),$$

ahol a maradéktag nem függ d -től.

Bizonyítás. ξ_w várható értéke a definíció alapján könnyen kiszámítható:

$$E\xi_w = \frac{\alpha_2(w-1) + 2\beta}{\alpha(w-1) + \beta} = \frac{\alpha_2}{\alpha} + \frac{(\alpha + \alpha_1)\beta}{\alpha(\alpha(w-1) + \beta)},$$

és így $ES_w = \frac{\alpha_2}{\alpha} w + O(\log w)$. Hasonlóképpen

$$\begin{aligned} E\xi_w^2 &= \frac{\alpha_2(w-1) + 4\beta}{\alpha(w-1) + \beta} = \frac{\alpha_2}{\alpha} + \frac{(4 - \frac{\alpha_2}{\alpha})\beta}{\alpha(w-1) + \beta}, \\ D^2(\xi_w) &= \frac{\alpha_2}{\alpha} + O\left(\frac{1}{w}\right) - \left[\frac{\alpha_2}{\alpha} + O\left(\frac{1}{w}\right) \right]^2 = \frac{\alpha_2}{\alpha} \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha}\right) + O\left(\frac{1}{w}\right) = \\ &= \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha^2} + O\left(\frac{1}{w}\right), \\ D^2(S_w) &= \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha^2} w + O(\log w) \end{aligned}$$

teljesül $w \rightarrow \infty$ esetén. Ezután alkalmazható [55, Petrov, 1975] VII.1.5. lokális határeloszlástétele az S_w összegre. A feltételek teljesülnek, hiszen feltettük, hogy α_1 és α_2 is pozitív, ξ_w -k pedig egyenletesen korlátosak:

$$\liminf_{w \rightarrow \infty} \frac{1}{w} D^2(S_w) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha^2} > 0, \quad \limsup_{w \rightarrow \infty} \frac{1}{w} \sum_{j=1}^w |\xi_j - E\xi_j|^3 < \infty.$$

Így a tétel szerint

$$\sup_{d \in \mathbb{Z}} \left| D(S_w) P(S_w = d) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(d - ES_w)^2}{2D^2(S_w)}\right) \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{w}}\right). \quad (4.8)$$

Ezután az $|e^{-y} - e^{-x}| \leq |y - x| \max(e^{-x}, e^{-y})$ triviális becsléssel

$$\begin{aligned} & \left| \exp\left(-\frac{(d - ES_w)^2}{2D^2(S_w)}\right) - \exp\left(-\frac{(d - \frac{\alpha_2}{\alpha}w)^2}{2D^2(S_w)}\right) \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{2(d - \frac{\alpha_2}{\alpha}w + O(\log w)) O(\log w)}{2D^2(S_w)} \right| \exp\left(-\frac{(d - \frac{\alpha_2}{\alpha}w + O(\log w))^2}{2D^2(S_w)}\right). \end{aligned}$$

Már láttuk, hogy $D^2(S_w)$ nagyságrendje w , ezért az első tényező $O(\log w/w)$, a második pedig $\exp(-Cw)$ -vel becsülhető felülről. Így a szorzat $O(w^{-1/2})$. Hasonlóan

$$\begin{aligned} & \left| \exp\left(-\frac{(d - \frac{\alpha_2}{\alpha}w)^2}{2D^2(S_w)}\right) - \exp\left(-\frac{(d - \frac{\alpha_2}{\alpha}w)^2}{2\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha^2}w}\right) \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{(\alpha d - \alpha_2 w)^2}{\alpha_1 \alpha_2 w + O(\log w)} - \frac{(\alpha d - \alpha_2 w)^2}{\alpha_1 \alpha_2 w} \right| \exp\left(-\frac{(\alpha d - \alpha_2 w)^2}{\alpha_1 \alpha_2 w + O(\log w)}\right). \end{aligned}$$

Itt az első tényező $O(\log w)$, míg a harmadik exponenciálisan kicsi, így a szorzat $O(w^{-1/2})$.

Végül

$$\left| D(S_w) - \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 w}}{\alpha} \right| P(S_w = d) = \frac{O(\log w)}{D(S_w) + \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 w}}{\alpha}} P(S_w = d) = O(w^{-1/2}),$$

hiszen a (4.8) becslés szerint $D(S_w)P(S_w = d)$, azaz $wP(S_w = d)$ is $O(w^{-1/2})$.

Vagyis a (4.8) összefüggésből következik, hogy

$$\sup_{d \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 w}}{\alpha} P(S_w = d) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\alpha d - \alpha_2 w)^2}{2\alpha_1 \alpha_2 w}\right) \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{w}}\right).$$

Vegyük észre, hogy W és a ξ_s tagok függetlensége miatt

$$x_{d,w} = P(S_W = d, W = w) = P(S_w = d, W = w) = P(S_w = d)x_w.$$

Ezt beírva és átrendezve a tétel állítását kapjuk. A maradéktagok mindenütt d -től függetlenek voltak. \square

Most már meg tudjuk határozni a foksámokra vonatkozó határértékek aszimptotikus viselkedését, így bizonyítva a skálafüggetlenséget. Ebből azt látjuk, hogy a súlyokra és a foksámokra vonatkozó karakterisztikus kitevők megegyeznek.

4.7. tétel. Jelölje $U[n, d]$ a d foksámú csúcsok számát n lépés után. Ekkor minden $d \geq 2$ egészre

$$\frac{U[n, d]}{V_n} \rightarrow u_d$$

teljesül 1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol u_d pozitív konstans. Továbbá

$$u_d \sim \frac{\Gamma(1 + \frac{\beta+1}{\alpha})}{\alpha_2 \Gamma(1 + \frac{\beta}{\alpha})} \left(\frac{\alpha}{\alpha_2} d\right)^{-\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}, \quad \text{amint } d \rightarrow \infty.$$

Bizonyítás. Az állítás első része a 4.5. tétel első lépéséhez hasonlóan adódik.

u_d aszimptotikájának meghatározásához legyen

$$f = \frac{\alpha}{\alpha_2} d, \quad H = \{w : f - f^{1/2+\varepsilon} \leq w \leq f + f^{1/2+\varepsilon}\},$$

$$H^- = \{w : w < f - f^{1/2+\varepsilon}\}, \quad H^+ = \{w : w > f + f^{1/2+\varepsilon}\}$$

valamely rögzített $0 < \varepsilon < 1/6$ -ra.

A Hoeffding-féle exponenciális egyenlőtlenség szerint [34, 2. tétel] minden $w \in H^-$ esetén

$$\begin{aligned} P(S_w \geq d) &\leq P\left(S_w - ES_w \geq d - \frac{\alpha_2}{\alpha} w - O(\log w)\right) \leq \\ &\leq \exp\left(-\frac{\left(d - \frac{\alpha_2}{\alpha} w - O(\log w)\right)^2}{2w}\right) = \\ &= \exp\left(-\left(\frac{\alpha_2}{\alpha}\right)^2 \frac{(f - w - O(\log w))^2}{2w}\right). \end{aligned}$$

Itt a számlálóban $(f - w - O(\log w))^2 \geq f^{1+2\varepsilon} - O(f^{1/2+\varepsilon} \log f)$, hiszen $w \in H^-$, a nevezőben pedig $w \leq f$ ugyanezért. Így

$$P(S_w \geq d) \leq \exp\left(-\frac{\alpha_2^2 f^{2\varepsilon}}{2\alpha^2} + o(1)\right).$$

Felhasználva ezt és azt is, hogy H^- elemszáma nem lehet f -nél több:

$$\begin{aligned} P(S_W = d, W \in H^-) &= \sum_{w \in H^-} P(S_w = d) \leq \\ &\leq (1 + o(1))f \exp\left(-\frac{\alpha_2^2 f^{2\varepsilon}}{2\alpha^2}\right) = o\left(f^{-\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

A $w \in H^+$ eset hasonlóan kezelhető:

$$\begin{aligned} P(S_w \leq d) &\leq P\left(S_w - ES_w \leq d - \frac{\alpha_2}{\alpha} w\right) \leq \\ &\leq \exp\left(-\frac{\left(\frac{\alpha_2}{\alpha} w - d\right)^2}{2w}\right) \leq \exp\left(-\left(\frac{\alpha_2}{\alpha}\right)^2 \frac{(w-f)^2}{2w}\right). \end{aligned}$$

Most az alábbi becslést használhatjuk $w \in H^+$ és a konkávitás alapján:

$$2(w-f) \geq f^{1/2+\varepsilon} + w - f \geq f^{1/2+\varepsilon} + (w-f)^{1/2+\varepsilon} \geq w^{1/2+\varepsilon}$$

a számlálóban, amiből

$$P(S_w \leq d) \leq \exp\left(-\frac{\alpha_2^2 w^{2\varepsilon}}{8\alpha^2}\right).$$

Így

$$P(S_W = d, W \in H^+) \leq \sum_{w > f} \exp\left(-\frac{\alpha_2^2 w^{2\varepsilon}}{8\alpha^2}\right) = o\left(f^{-\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right). \quad (4.10)$$

Végül $w \in H$ -ra $w = f + O(f^{1/2+\varepsilon}) = f(1 + O(f^{-1/2+\varepsilon}))$. Ezért

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha d - \alpha_2 w)^2}{2\alpha_1 \alpha_2 w} &= \frac{\alpha_2 (f-w)^2}{2\alpha_1 w} = \frac{\alpha_2 (f-w)^2}{2\alpha_1 f} \left(1 + O(f^{-1/2+\varepsilon})\right) = \\ &= \frac{\alpha_2 (f-w)^2}{2\alpha_1 f} + O(f^{-1/2+3\varepsilon}). \end{aligned}$$

A 4.6. tétel alapján szeretnénk az aszimptotikát pontosan felírni. x_w aszimptotikája a 4.5. tételből látható, az exponenciális részét pedig most számoltuk ki. Tehát

$$x_{d,w} \sim \frac{\Gamma(1 + \frac{\beta+1}{\alpha})}{\alpha \Gamma(1 + \frac{\beta}{\alpha})} f^{-(1+\frac{1}{\alpha})} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\alpha_1\alpha_2}f} \exp\left(-\frac{\alpha_2(w-f)^2}{2\alpha_1f}\right)$$

teljesül $d \rightarrow \infty$ és $w \in H$ esetén. Mivel

$$\sum_{w \in H} \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\alpha_1\alpha_2}f} \exp\left(-\frac{\alpha_2(w-f)^2}{2\alpha_1f}\right) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\alpha_1\alpha_2}} \exp\left(-\frac{\alpha_2 t^2}{2\alpha_1}\right) dt = \frac{\alpha}{\alpha_2},$$

összegzés után azt kapjuk, hogy $d \rightarrow \infty$ esetén

$$P(S_W = d, W \in H) \sim \frac{\Gamma(1 + \frac{\beta+1}{\alpha})}{\alpha_2 \Gamma(1 + \frac{\beta}{\alpha})} f^{-(1+\frac{1}{\alpha})}. \quad (4.11)$$

A bizonyítás (4.9), (4.10) és (4.11) összevetésével fejezhető be:

$$u_d = \sum_{w \geq 1} x_{d,w} = \sum_{w \geq 1} P(S_W = d, W = w),$$

ahol mind a három halmazra külön összegzünk, és $w \in H$ adja a lényeges tagot. \square

4.3. Súlyok és fokszámok aszimptotikája

Rögzített csúcs súlyának és fokszámának, illetve a maximális súlynak és maximális fokszámának az aszimptotikus viselkedését írjuk le. A maximális súly regulárisan változik, és a kitevő megegyezik az egyetlen csúcs súlyának reguláris változásához tartozó kitevővel. Egy csúcs súlya és fokszáma között nincs determinisztikus kapcsolat, mégis egyetlen csúcs fokszámára és a maximális fokszámra is ugyanolyan reguláris változást bizonyíthatunk, mint a súlyokra.

4.3.1. Rögzített csúcs súlya

Ebben a szakaszban rögzített csúcs súlyának aszimptotikus viselkedését szeretnénk leírni. Ehhez olyan martingálokat keresünk, melyeket később a maximális súly aszimptotikus viselkedésének leírásakor is tudunk majd használni.

A kezdeti elrendezés, az egy súlyú háromszög szimmetrikus, így elég az egyik csúccsal foglalkoznunk. Az egyik csúcs címkéje legyen tehát 0; a másik kettő nem kap címkét. A később létrejövő csúcsok címkéi születési sorrendben $1, 2, \dots$ legyenek. Legyen $W[n, j]$ a j . csúcs súlya n lépés után, ha már létezik ez a csúcs, különben nulla. Világos, hogy a j . csúcs nem születhet a j . lépésnél korábban.

Legyen $I[n, j]$ a $\{W[n, j] > 1\}$ esemény indikátora, $J[n, j]$ pedig annak az indikátora, hogy a j . csúcs az n . lépésben született:

$$J[n, j] = I[n, j] - I[n-1, j].$$

Az alábbi jelölésekre lesz szükségünk:

$$b[n, k] = \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{\alpha k}{i}\right)^{-1}; \quad (4.12)$$

$$d[n, k, j] = - \sum_{i=1}^{n-1} b[i+1, k] \frac{\beta p}{V_{i-1}} \binom{W[i, j] + k - 1}{k-1}, \quad (4.13)$$

ahol α, β ugyanaz, mint a 4.5. tételben:

$$\alpha = \frac{2}{3}pr + (1-p)q > 0, \quad \beta = \frac{1}{p}[2p(1-r) + 3(1-p)(1-q)].$$

Itt $b[n, k]$ véletlentől nem függ, míg $d[n, k, j]$ véletlen, de mérhető az \mathcal{F}_{n-1} -re, az első $n-1$ lépés által generált σ -algebrára nézve minden k -ra és j -re. Az aszimptotika is könnyen látható:

$$b[n, k] \sim b_k n^{-k\alpha} \quad (4.14)$$

rögzített $b_k > 0$ -val $n \rightarrow \infty$ esetén.

Ezek segítségével írható fel az a folyamat, melyről belátjuk, hogy martingál.

4.1. lemma. Minden j, k, l pozitív egészekre $j \leq l$ esetén az alábbi

$$Z[n, j, k, l] = \left[b[n, k] \binom{W[n, j] + k - 1}{k} + d[n, k, j] \right] I[l, j]$$

folyamat martingál $n \geq l$ -re.

Bizonyítás. A (4.2) egyenlet szerint, feltéve, hogy a j . csúcs létezik az l . lépésben, annak valószínűsége, hogy a j . csúcs új élt kap az $n + 1$. lépésben $\frac{\alpha W[n, j]}{n+1} + \frac{\beta p}{V_n}$, ahol $n + 1 \geq l$, és $V_n \sim np + o(n^{1/2+\varepsilon})$ a (4.1) egyenlet szerint. Ezért tetszőleges rögzített $k, l \geq 1$, $n \geq l$ egészekre

$$\begin{aligned} E \left(\binom{W[n+1, j] + k - 1}{k} I[l, j] \middle| \mathcal{F}_n \right) &= I[l, j] \binom{W[n, j] + k - 1}{k} + \\ &+ I[l, j] \left[\frac{\alpha W[n, j]}{n+1} + \frac{\beta p}{V_n} \right] \left[\binom{W[n, j] + k}{k} - \binom{W[n, j] + k - 1}{k} \right] = \\ &= I[l, j] \left[\binom{W[n, j] + k - 1}{k} + \left[\frac{\alpha W[n, j]}{n+1} + \frac{\beta p}{V_n} \right] \binom{W[n, j] + k - 1}{k-1} \right] = \\ &= I[l, j] \binom{W[n, j] + k - 1}{k} \left(1 + \frac{\alpha k}{n+1} \right) + I[l, j] \frac{\beta p}{V_n} \binom{W[n, j] + k - 1}{k-1}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Mindkét oldalt $b[n+1, k]$ -val szorozva és a definíciót felhasználva:

$$\begin{aligned} E \left(b[n+1, k] \binom{W[n+1, j] + k - 1}{k} I[l, j] \middle| \mathcal{F}_n \right) &= \\ &= I[l, j] \left[\binom{W[n, j] + k - 1}{k} b[n, k] + \frac{\beta p}{V_n} \binom{W[n, j] + k - 1}{k-1} b[n+1, k] \right] = \\ &= I[l, j] \left[\binom{W[n, j] + k - 1}{k} b[n, k] + d[n, k, j] - d[n+1, k, j] \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Mivel $d[n+1, k, j]$ mérhető \mathcal{F}_n -re nézve, ebből a lemma állítása következik.

□

Most már kimondhatjuk a rögzített csúcs súlyának aszimptotikus viselkedéséről szóló tételt.

4.8. tétel. Legyen $j \geq 0$ rögzített. Ekkor

$$W[n, j] \sim \zeta_j n^\alpha \quad (4.17)$$

teljesül 1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol ζ_j pozitív valószínűségi változó.

Bizonyítás. Először azt látjuk be, hogy az állítás nemnegatív ζ_j -vel teljesül.

Tekintsük azt az eseményt, hogy a j . csúcs létezik n lépés után. Ezen az eseményen majdnem mindenütt

$$P(W[n+1, j] = W[n, j] + 1 \mid \mathcal{F}_n) \geq \frac{\alpha}{n+1}.$$

A Borel–Cantelli-lemma Lévy-féle általánosítása [50, Neveu, VII-2-6] szerint, azaz a 2.4. állítást indikátorokra alkalmazva azt kapjuk, hogy $W[n, j] \rightarrow \infty$ majdnem biztosan.

A 4.1. lemmát $k = 1$ -gyel fogjuk használni. A 4.14 egyenlethez hasonlóan kapjuk, hogy

$$b[n, 1] \sim \Gamma(1 + \alpha)n^{-\alpha} \quad (n \rightarrow \infty). \quad (4.18)$$

Vagyis a (4.1) egyenletet és α pozitivitását felhasználva:

$$d[n, 1, j] = - \sum_{i=1}^{n-1} b[i+1, 1] \frac{\beta p}{V_{i-1}} = \beta \Gamma(1 + \alpha) \sum_{i=1}^{n-1} i^{-\alpha-1} (1 + o(1)).$$

Tehát $d[n, 1, j]$ egyrészt nem függ j -től, másrészt konvergens $n \rightarrow \infty$ esetén. Ezért a 4.1. lemmában szereplő martingál $k = 1$ mellett alulról korlátos. Másfelől ez a martingál korlátos differenciájú, hiszen

$$Z[n+1, 1, j] - Z[n, 1, j] \leq b[n, 1] (W[n+1, j] - W[n, j]) \leq b[n, 1] \leq 1,$$

és

$$\begin{aligned} Z[n, 1, j] - Z[n+1, 1, j] &\leq (b[n, 1] - b[n+1, 1])W[n, j] + \\ &+ (d[n+1, 1, j] - d[n, 1, j]) \leq b[n+1, 1]\alpha + b[n+1, 1] \frac{\beta p}{3} \leq \alpha + \frac{\beta p}{3}. \end{aligned}$$

A 2.5. állítás, azaz Neveu [50] VII-3-9 állítása szerint egy ilyen martingál vagy konvergens 1 valószínűséggel, vagy $-\infty$ és $+\infty$ között oszcillál. Ez utóbbit az alulról korlátosság kizárja, így a szóban forgó martingál 1 valószínűséggel konvergens.

Ebből az következik, hogy $b[n, 1]W[n, j]$ konvergens majdnem mindenütt azon az alábbi eseményen: a j . csúcs súlya 1-nél nagyobb a k . lépés után. Már

láttuk, hogy a súlyok végtelenhez konvergálnak, így $k \rightarrow \infty$ esetén ezeknek a bővülő eseményeknek a limesze 1 valószínűségű. Ezért $b[n, 1]W[n, j]$ 1 valószínűséggel konvergens, és a (4.18) egyenlet szerint azt kapjuk, hogy a tétel állítása nemnegatív ζ_j -vel teljesül.

Tehát azt kell még belátnunk, hogy a ζ_j valószínűségi változó 1 valószínűséggel pozitív.

A bizonyítás további részében a hányadost tekintsük nullának, ha a számlálóban szereplő indikátor nulla. $n \geq k$ -ra az előző lemmához hasonló gondolatmenettel azt kapjuk, hogy

$$E \left(\frac{I[k, j]}{W[n+1, j] - 1} \middle| \mathcal{F}_n \right) = \left(\frac{\alpha W[n, j]}{n+1} + \frac{\beta p}{V_n} \right) \frac{I[k, j]}{W[n, j]} + \left[1 - \left(\frac{\alpha W[n, j]}{n+1} + \frac{\beta p}{V_n} \right) \right] \frac{I[k, j]}{W[n, j] - 1}.$$

Világos, hogy

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha W[n, j]}{n+1} + \frac{\beta p}{V_n} \right) \left(\frac{I[k, j]}{W[n, j]} - \frac{I[k, j]}{W[n, j] - 1} \right) &= \\ &= \left(\frac{\alpha W[n, j]}{n+1} + \frac{\beta p}{V_n} \right) I[k, j] \left(-\frac{1}{W[n, j](W[n, j] - 1)} \right) \leq \\ &\leq -\frac{\alpha I[k, j]}{(n+1)(W[n, j] - 1)}, \end{aligned}$$

és így

$$E \left(\frac{I[k, j]}{W[n+1, j] - 1} \middle| \mathcal{F}_n \right) \leq \frac{I[k, j]}{W[n, j] - 1} \left(1 - \frac{\alpha}{n+1} \right).$$

Ebből következik, hogy

$$\left(\frac{e_n I[k, j]}{W[n, j] - 1}, \mathcal{F}_n \right)$$

szupermartingál $n \geq j$ -re, ahol

$$e_n = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{\alpha}{i} \right)^{-1} = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)} \sim \Gamma(1-\alpha)n^\alpha.$$

Ez a szupermartingál nemnegatív, ezért a martingálkonvergencia-tétel szerint 1 valószínűséggel konvergens. Mivel $\lim_{k \rightarrow \infty} I[k, j] = 1$ teljesül 1 valószínűséggel, $\frac{e_n}{W[n, j] - 1}$ is 1 valószínűséggel konvergens $n \rightarrow \infty$ esetén. Ebből következik, hogy ζ_j pozitív 1 valószínűséggel. \square

4.3.2. Maximális súly

A maximális súly aszimptotikus viselkedését szeretnénk meghatározni. Az állítás az, hogy az éppen aktuális legnagyobb súly aszimptotikus növekedése lényegében megegyezik egy rögzített csúcs súlyának aszimptotikus viselkedésével: az előbbi is polinomiális, és a kitevő is megegyezik a 4.8. tételben szereplő $1 + \frac{1}{\alpha}$ -val. Ennek igazolásához felhasználjuk az előző szakaszban szereplő martingálokat, melyeket a rögzített csúcs súlyából származtattunk. A bizonyításban ezekből képzett szubmartingálokról látjuk be, hogy megfelelő p -re L^p -beliek, ebből már következni fog a konvergencia. Ehhez azonban szükség van az alábbi állításra, mely a csúcsok súlyának megfelelő momentumaiból számolt összeg várható értékére ad felső korlátot.

4.2. lemma. *Minden $k \geq 0$ és $1 \leq m \leq n$ pozitív egészre legyen :*

$$S[m, n, k] = \sum_{j=m}^n E \left[b[n, k] \binom{W[n, j] + k - 1}{k} I[n, j] \right].$$

Ekkor

$$S[m, n, k] \leq C_k \sum_{j=m}^n j^{-k\alpha}$$

valamely C_k pozitív számmal teljesül minden $1 \leq m \leq n$ -re.

Bizonyítás. A bizonyítás k szerinti teljes indukcióval történik.

$k = 0$ esetén a binomiális együttható minden tagban 1, és a (4.14) egyenlet szerint

$$S[m, n, 0] = b[n, 0] \sum_{j=m}^n E(I[n, j]) = \sum_{j=m}^n P(W[n, j] \geq 1) \leq n - m + 1.$$

Tegyük fel, hogy $k - 1$ -re teljesül a lemma állítása. A 4.1. lemma szerint $Z[n, j, k, l]$ martingál n -ben rögzített j, k, l mellett, így várható értéke nem függ az időtől, azaz n -től. Martingálok különbsége is martingál, így ez akkor is fennáll, ha $I[l, j]$ -t $J[l, j]$ -re cseréljük. Ugyanis míg az előbbi annak indikátora, hogy a j . csúcs az l . lépésben létezik, az utóbbi annak indikátora,

hogy épp az l . lépésben születik meg. Tehát ha $S[m, n, k]$ -ban $I[n, j]$ -t felbontjuk, majd felhasználjuk a martingáltulajdonságot, az alábbihoz jutunk:

$$\begin{aligned}
S[m, n, k] &= \sum_{j=m}^n E \left(\sum_{\ell=j}^n b[n, k] \binom{W[n, j] + k - 1}{k} J[\ell, j] \right) = \\
&= \sum_{j=m}^n E \left(\sum_{\ell=j}^n (Z[n, k, j] + d[n, k, j]) J[\ell, j] \right) = \\
&= \sum_{j=m}^n E \left(\sum_{\ell=j}^n (Z[\ell, k, j] + d[n, k, j]) J[\ell, j] \right) = \\
&= E \left(\sum_{j=m}^n \sum_{\ell=j}^n (b[\ell, k] + d[n, k, j] - d[\ell, k, j]) J[\ell, j] \right).
\end{aligned}$$

Az első tagra könnyen adódik felső korlát, hiszen b monoton csökkenő rögzített k -ra a (4.12) definíció szerint. Vagyis $S[m, n, k] = S_1[m, n, k] + S_2[m, n, k]$, ahol

$$\begin{aligned}
S_1[m, n, k] &= E \left(\sum_{j=m}^n \sum_{\ell=j}^n b[\ell, k] J[\ell, j] \right) \leq \sum_{j=m}^n b[j, k] E \left(\sum_{\ell=j}^n J[\ell, j] \right) \leq \\
&\leq \sum_{j=m}^n b[j, k] = b_k \sum_{j=m}^n j^{-k\alpha} (1 + o(1)) \leq C'_k \sum_{j=m}^n j^{-k\alpha}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

A második tag pedig a következőképpen becsülhető felülről.

$$\begin{aligned}
S_2[m, n, k] &= E \left(\sum_{j=m}^n \sum_{\ell=j}^n (d[n, k, j] - d[\ell, k, j]) J[\ell, j] \right) = \\
&= E \left(\sum_{j=m}^n \sum_{\ell=j}^n \sum_{i=\ell}^{n-1} b[i+1, k] \frac{\beta p}{V_i} \binom{W[i, j] + k - 1}{k - 1} J[\ell, j] \right) = \\
&= E \left(\sum_{i=m}^{n-1} b[i+1, k] \frac{\beta p}{V_i} \sum_{j=m}^i \sum_{\ell=j}^i \binom{W[i, j] + k - 1}{k - 1} J[\ell, j] \right) = \\
&= E \sum_{i=m}^{n-1} \frac{b[i+1, k]}{b[i, k-1]} \frac{\beta p}{V_i} \times \\
&\quad \times \sum_{j=m}^i b[i, k-1] \binom{W[i, j] + k - 2}{k - 1} \frac{W[i, j] + k - 1}{W[i, j]} I[i, j].
\end{aligned}$$

Az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy ha az indikátor 1, akkor $W[i, j] \geq 1$.

Mivel $\frac{W[i, j] + k - 1}{W[i, j]} \leq k$, arra jutunk, hogy

$$\begin{aligned}
S_2[m, n, k] &\leq \\
&\leq k \sum_{i=m}^{n-1} \frac{b[i+1, k]}{b[i, k-1]} E \left(\frac{\beta p}{V_i} \sum_{j=m}^i b[i, k-1] \binom{W[i, j] + k - 2}{k - 1} I[i, j] \right).
\end{aligned}$$

Most használjuk a V_i aszimptotikájára vonatkozó (4.1) összefüggést. A $\{V_i < (p/2)i\}$ és $\{V_i \geq (p/2)i\}$ eseményeken külön adunk felső becslést. I továbbra is egy esemény indikátorát jelöli. A Chernoff-korlát szerint az előbbi esemény valószínűsége nem lehet több, mint $\exp(-\varepsilon i)$, ahol $\varepsilon > 0$ és csak p -től függ. Az indukciós feltevés szerint

$$\begin{aligned}
E \left(\frac{\beta p}{V_i} I \left(V_i \geq \frac{pi}{2} \right) \sum_{j=m}^i b[i, k-1] \binom{W[i, j] + k - 2}{k - 1} I[i, j] \right) &\leq \\
&\leq \frac{2\beta}{i} S[m, i, k-1] \leq 2\beta C_{k-1} \frac{1}{i} \sum_{j=m}^i j^{-(k-1)\alpha}.
\end{aligned}$$

A Hoeffding-féle exponenciális egyenlőtlenség szerint annak valószínűsége, hogy a csúcsok száma kicsi, felülről becsülhető: $P(V_i < (p/2)i) \leq e^{-\varepsilon i}$, ahol

$\varepsilon > 0$ csak p -től függ. Kezdetből $V_i \geq 3$, a csúcsok $W[i, j]$ súlya pedig lépésenként csak eggyel nőhet, így

$$\begin{aligned} E \left(\frac{\beta p}{V_i} I \left(V_i < \frac{pi}{2} \right) \sum_{j=m}^i b[i, k-1] \binom{W[i, j] + k - 2}{k-1} I[i, j] \right) &\leq \\ &\leq \frac{\beta p}{3} P \left(V_i < \frac{pi}{2} \right) \sum_{j=m}^i b[i, k-1] \binom{i + k - 2}{k-1} = \\ &= O \left(e^{-\varepsilon i} i^{-(k-1)\alpha} i^{k-1} i \right) = o \left(\frac{1}{i} \sum_{j=m}^i j^{-(k-1)\alpha} \right) \end{aligned}$$

m -ben egyenletesen. Végül a (4.14) egyenlet szerint

$$\frac{b[i+1, k]}{b[i, k-1]} = O(i^{-\alpha}).$$

Ezek alapján valamely C_k'' és C_k''' konstansokra

$$\begin{aligned} S_2[m, n, k] &\leq C_k'' \sum_{i=m}^n i^{-1-\alpha} \sum_{j=m}^i j^{-(k-1)\alpha} = C_k'' \sum_{j=m}^n j^{-(k-1)\alpha} \sum_{i=j}^n i^{-1-\alpha} \leq \\ &\leq C_k''' \sum_{j=m}^n j^{-k\alpha}. \quad (4.20) \end{aligned}$$

A (4.19) és (4.20). becslések adják az indukciós lépés bizonyítását. \square

A következő tételben igazoljuk, hogy a legnagyobb súly és egy rögzített csúcs fokszáma aszimptotikusan regulárisan növekszik, és a kitevők is megegyeznek.

Legyen $\mathcal{W}_n = \max\{W[n, j] : -2 \leq j \leq n\}$, azaz a csúcsokra vonatkozóan a legnagyobb súly n lépés után.

4.9. tétel. $\mathcal{W}_n \sim \mu n^\alpha$ teljesül 1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol $\mu = \sup\{\zeta_j : j \geq -2\}$ pozitív és véges valószínűségi változó, ζ_j pedig megegyezik a (4.17) egyenletben meghatározottal.

Bizonyítás. $1 \leq m \leq n$ esetén legyen $M[m, n] = \max\{W[n, j] : -2 \leq j < m\}$. A (4.17) egyenletből következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} M[m, n] = \max\{\zeta_j : -2 \leq j < m\}$$

teljesül 1 valószínűséggel. Azt kell tehát belátni, hogy

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} (\mathcal{W}_n - M[m, n]) = 0. \quad (4.21)$$

A 4.1. lemma bizonyításában láttuk, hogy

$$b[n, k] \binom{W[n, j] + k - 1}{k} I[\ell, j], \quad n \geq \ell,$$

szubmartingál, így az alábbi folyamat is:

$$b[n, k] \binom{W[n, j] + k - 1}{k} = b[n, k] \binom{W[n, j] + k - 1}{k} I[n, j], \quad n \geq j.$$

Növekvő számú szubmartingál maximuma is szubmartingál, ezért

$$b[n, k] \binom{\mathcal{W}_n - M[m, n] + k - 1}{k}, \quad n \geq m,$$

is szubmartingál. Továbbá

$$E \left[b[n, k] \binom{\mathcal{W}_n - M[m, n] + k - 1}{k} \right] \leq S[m, n, k] \leq C_k \sum_{j=m}^n j^{-k\alpha} \quad (4.22)$$

a 4.2. lemma szerint. Mivel

$$\left([b[n, 1] (\mathcal{W}_n - M[m, n])] \right)^k \leq k! \frac{b[n, 1]^k}{b[n, k]} b[n, k] \binom{\mathcal{W}_n - M[m, n] + k - 1}{k}, \quad (4.23)$$

a $b[n, 1] (\mathcal{W}_n - M[m, n])$ nemnegatív szubmartingál L^k -ban korlátos minden $k\alpha > 1$ -re. Ezért 1 valószínűséggel és L^k -ban is konvergens minden $k \geq 1$ -re. Sőt a (4.22) és a (4.23) becslések szerint

$$E \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} (\mathcal{W}_n - M[m, n]) \right)^k \leq k! \frac{C_k}{b_k} \sum_{j=m}^{\infty} j^{-k\alpha}.$$

Így a Beppo Levi-féle monoton konvergenciatétel alkalmazható, és

$$E \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} (\mathcal{W}_n - M[m, n]) \right)^k = 0$$

ha $k > 1/\alpha$, amiből (4.21) következik. \square

4.3.3. Rögzített csúcs fokszáma

Egy csúcs súlya azt mutatta, hogy eddig hányszor vett részt kölcsönhatásban, a fokszáma pedig azt, hogy hány különböző másik csúcscsal lépett már kölcsönhatásba. Egy csúcs egy kölcsönhatáskor 0, 1 vagy 2 új csúcscsal is találkozhat, így a két mennyiség kapcsolata nem determinisztikus. Ezért vizsgáljuk külön egy rögzített csúcs fokszámának aszimptotikus viselkedését. Ez is regulárisan változó lesz, és a kitevő is megegyezik a súlyokra vonatkozóval.

Jelölje $D[n, j]$ a j . csúcs fokszámát n lépés után.

4.10. tétel. *Tetszőleges $j = 0, 1, \dots$ -re*

$$D[n, j] \sim \frac{\alpha_2}{\alpha} \zeta_j n^\alpha$$

teljesül 1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol a ζ_j pozitív valószínűségi változó megegyezik a (4.17)-ben meghatározottal.

Bizonyítás. Ha egy csúcs kölcsönhatásba lép, fokszáma kettővel, eggyel vagy nullával nőhet. Például új csúcs születése és egyenletes választás esetén biztosan eggyel nő. A többi esetet is hasonlóan kiszámolva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} E(I[k, j]D[n+1, j] \mid \mathcal{F}_n) &= I[k, j] \left(D[n, j] + pr \frac{2W[n, j]}{3(n+1)} + \right. \\ &\quad \left. + p(1-r) \frac{2V_n - D[n, j] - 2}{\binom{V_n}{2}} + 3(1-p)(1-q) \frac{V_n - D[n, j] - 1}{\binom{V_n}{2}} \right) = \\ &= I[k, j] \left(D[n, j] + \alpha_2 \frac{W[n, j]}{n+1} + R_n \right), \quad (4.24) \end{aligned}$$

ha $k \leq n$, ahol $0 \leq R_n \leq \frac{2p\beta}{V_n}$.

Legyen $\xi_n = I[k, j](D[n, j] - D[n-1, j])$, ekkor $0 \leq \xi_n \leq 2$. Így a 2.4. állításból és a (4.17) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i \leq n} \xi_i \sim \sum_{i \leq n} E(\xi_i \mid \mathcal{F}_{i-1}) = \sum_{i \leq n} \left(\alpha_2 \frac{W[i-1, j]}{i} + R_{i-1} \right) \sim \frac{\alpha_2}{\alpha} \zeta_j n^\alpha$$

a $\{W[k, j] \geq 1\}$ eseményen majdnem mindenütt. Ezért $D[n, j] \sim \frac{\alpha_2}{\alpha} \zeta_j n^\alpha$ is teljesül majdnem mindenütt ezen az eseményen. Mivel $\lim_{k \rightarrow \infty} W[k, j] = \infty$, azt kapjuk, hogy

$$P\left(\bigcup_k \{W[k, j] \geq 1\}\right) = 1,$$

amiből az állítás adódik. \square

4.3.4. Maximális fokszám

A 4.9. és 4.10. tételekből azonnal adódik, hogy a maximális súly aszimptotikája is regulárisan változó ugyanolyan kitevővel, mint a maximális súly, másrészt szintén szuprémumként kapható az egyes csúcsok fokszámához tartozó határértékekből.

4.11. tétel. *Legyen \mathcal{D}_n a legnagyobb fokszám a gráfban n lépés után. Ekkor*

$$\mathcal{D}_n \sim \frac{\alpha_2}{\alpha} \mu n^\alpha$$

teljesül 1 valószínűséggel $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol μ a 4.9. tételben meghatározott pozitív valószínűségi változó.

Bizonyítás. Nyilvánvalóan $D[n, j] \leq 2W[n, j]$, hiszen ha egy csúcs súlya eggyel nő, fokszáma legfeljebb kettővel. Ezért

$$\begin{aligned} \max\{D[n, j] : -2 \leq j < m\} &\leq \mathcal{D}_n \leq \\ &\leq \max\{D[n, j] : -2 \leq j < m\} + \max\{2W[n, j] : m \leq j \leq n\}. \end{aligned}$$

Mindkét oldalt $n^{-\alpha}$ -val szorozva és n -nel végtelenhez tartva

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2}{\alpha} \max\{\zeta_j : -2 \leq j < m\} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} \mathcal{D}_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} \mathcal{D}_n \leq \\ &\leq \frac{\alpha_2}{\alpha} \max\{\zeta_j : -2 \leq j < m\} + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha} (\mathcal{W}_n - M[m, n]). \end{aligned}$$

A (4.21) szerint mindkét oldal határértéke $\mu\alpha_2/\alpha$, ha $m \rightarrow \infty$. \square

Irodalomjegyzék

- [1] W. Aiello, F. Chung, and L. Lu. A random graph model for power law graphs. *Proc. ACM STOC*, pages 171–180, 2000.
- [2] Á. Backhausz. Limit distribution of degrees in random family trees. *Electron. Commun. Probab.*, 16:29–37, 2011.
- [3] Á. Backhausz. Local degree distributions: examples and counterexamples. *Period. Math. Hungar.*, 16:1465–1488, 2011.
- [4] Á. Backhausz and T. F. Móri. Asymptotics of a renewal-like recursion and an integral equation. arxiv:1104.1027v4 [math.ca].
- [5] Á. Backhausz and T. F. Móri. A random model of publication activity. arxiv:1104.1026v4 [math.pr].
- [6] Á. Backhausz and T. F. Móri. Local degree distribution in scale free random graphs. *Electron. J. Probab.*, 16:1465–1488, 2011.
- [7] Á. Backhausz and T. F. Móri. A random graph model based on 3-interactions. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 36:41–52, 2012.
- [8] A-L. Barabási and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439):509–512, 1999.
- [9] G. Bebek, P. Berenbrink, C. Cooper, T. Friedetzky, J. Nadeau, and S. C. Sahinalp. The degree distribution of the generalized duplication model. *Theoret. Comput. Sci.*, 369(1-3):239–249, 2006.

- [10] I. Benjamini and O. Schramm. Recurrence of distributional limits of finite planar graphs. *Electron. J. Probab.*, 6:no. 23, 13 pp., 2001.
- [11] N. H. Bingham, C. M. Goldie, and J. L. Teugels. *Regular variation*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [12] R. Bojanić and E. Seneta. Slowly varying functions and asymptotic relations. *J. Math. Anal. Appl.*, 34:302–315, 1971.
- [13] B. Bollobás. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *European J. Combin.*, 1(4):311–316, 1980.
- [14] B. Bollobás. *Random graphs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [15] B. Bollobás, S. Janson, and O. Riordan. The phase transition in inhomogeneous random graphs. *Random Structures Algorithms*, 31(1):3–122, 2007.
- [16] B. Bollobás, R. Kozma, and D. Miklós (eds.). *Handbook of large-scale random networks*. Springer, Berlin, 2009.
- [17] B. Bollobás, O. Riordan, J. Spencer, and G. Tusnády. The degree sequence of a scale-free random graph process. *Random Structures Algorithms*, 18(3):279–290, 2001.
- [18] T. Britton, M. Deijfen, and A. Martin-Löf. Generating simple random graphs with prescribed degree distribution. *J. Stat. Phys.*, 124(6):1377–1397, 2006.
- [19] D. S. Callaway, J. E. Hopcroft, J. M. Kleinberg, M. E. J. Newman, and S. H. Strogatz. Are randomly grown graphs really random? *Phsy. Rev. E*, 64:041902, 2001.
- [20] C. Cooper and A. Frieze. A general model of web graphs. *Random Structures Algorithms*, 22(3):311–335, 2003.

- [21] V. Csiszár, P. Hussami, J. Komlós, T. F. Móri, L. Rejtő, and G. Tusnády. When the degree sequence is a sufficient statistic. *Acta Math. Hungar.*, 134:45–53, 2012.
- [22] M. Deijfen, H. van den Esker, R. van der Hofstad, and G. Hooghiemstra. A preferential attachment model with random initial degrees. *Ark. Mat.*, 47(1):41–72, 2009.
- [23] S. Dereich and P. Mörters. Random networks with sublinear preferential attachment: degree evolutions. *Electron. J. Probab.*, 14:no. 43, 1222–1267, 2009.
- [24] L. Devroye and H-K. Hwang. Width and mode of the profile for some random trees of logarithmic height. *Ann. Appl. Probab.*, 16(2):886–918, 2006.
- [25] M. Drmota. *Random trees*. Springer, Vienna, 2009.
- [26] R. Durrett. *Random graph dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [27] P. Erdős and A. Rényi. On random graphs. I. *Publ. Math. Debrecen*, 6:290–297, 1959.
- [28] P. Erdős and A. Rényi. On the evolution of random graphs. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, 5:17–61, 1960.
- [29] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II*. Second edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.
- [30] M. Fuchs, H-K. Hwang, and R. Neininger. Profiles of random trees: limit theorems for random recursive trees and binary search trees. *Algorithmica*, 46(3-4):367–407, 2006.
- [31] J. Galambos and E. Seneta. Regularly varying sequences. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 41:110–116, 1973.
- [32] E. N. Gilbert. Random graphs. *Ann. Math. Statist.*, 30:1141–1144, 1959.

- [33] R. Gouet. Martingale functional central limit theorems for a generalized Pólya urn. *Ann. Probab.*, 21(3):1624–1639, 1993.
- [34] W. Hoeffding. Probability inequalities for sums of bounded random variables. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 58:13–30, 1963.
- [35] N. L. Johnson and S. Kotz. *Urn models and their application*. John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1977.
- [36] J. H. Jordan. Randomised reproducing graphs. *Electron. J. Probab.*, 16(57):1549–1562, 2011.
- [37] Zs. Katona. Width of a scale-free tree. *J. Appl. Probab.*, 42(3):839–850, 2005.
- [38] Zs. Katona. Levels of a scale-free tree. *Random Structures Algorithms*, 29(2):194–207, 2006.
- [39] Zs. Katona and T. F. Móri. A new class of scale free random graphs. *Statist. Probab. Lett.*, 76(15):1587–1593, 2006.
- [40] L. Lovász and B. Szegedy. Limits of dense graph sequences. *J. Combin. Theory Ser. B*, 96(6):933–957, 2006.
- [41] H. M. Mahmoud. *Pólya urn models*. CRC Press, 2009.
- [42] M. Molloy and B. Reed. A critical point for random graphs with a given degree sequence. volume 6, pages 161–179, 1995.
- [43] M. Molloy and B. Reed. The size of the giant component of a random graph with a given degree sequence. *Combin. Probab. Comput.*, 7(3):295–305, 1998.
- [44] T. F. Móri. On random trees. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 39(1-2):143–155, 2002.
- [45] T. F. Móri. The maximum degree of the Barabási-Albert random tree. *Combin. Probab. Comput.*, 14(3):339–348, 2005.

- [46] T. F. Móri. A surprising property of the Barabási–Albert random tree. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 43(2):265–273, 2006.
- [47] T. F. Móri. Degree distribution nearby the origin of a preferential attachment graph. *Electron. Commun. Probab.*, 12:276–282, 2007.
- [48] T. F. Móri. On a 2-parameter class of scale-free random graphs. *Acta Math. Hungar.*, 114(1-2):37–48, 2007.
- [49] T. F. Móri. Random multitrees. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 47:59–80, 2010.
- [50] J. Neveu. *Discrete-parameter martingales*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1975.
- [51] M. Newman, A-L. Barabási, and D. J. Watts (eds.). *The structure and dynamics of networks*. Princeton University Press, 2006.
- [52] M. E. J. Newman. *Networks*. Oxford University Press, 2010.
- [53] M. E. J. Newman, S. Strogatz, and D. Watts. Random graphs with arbitrary degree distribution and their application. *Phys. Rev. E*, 64(026118):1–17, 2000.
- [54] R. Pastor-Satorras, E. Smith, and R. V. Solé. Evolving protein interaction networks through gene duplication. *J. Theoret. Biol.*, 222(2):199–210, 2003.
- [55] V. V. Petrov. *Sums of independent random variables*. Springer-Verlag, New York, 1975.
- [56] B. Pittel. Note on the heights of random recursive trees and random m -ary search trees. *Random Structures Algorithms*, 5(2):337–347, 1994.
- [57] D. J. de S. Price. A general theory of bibliometric and other cumulative advantage processes. *J. Amer. Soc. Inform. Sci.*, 27 (5):292–306, 1976.
- [58] H. Prodinger and F. J. Urbanek. On monotone functions of tree structures. *Discrete Appl. Math.*, 5(2):223–239, 1983.

- [59] B. Ráth and L. Szakács. Multigraph limit of the dense configuration model and the preferential attachment graph. *Acta Math. Hungar.*, 136(3):196–221, 2012.
- [60] A. Rudas and B. Tóth. Random tree growth with branching processes – a survey. In *Handbook of large-scale random networks*, pages 171–202. Springer, Berlin, 2009.
- [61] A. Rudas, B. Tóth, and B. Valkó. Random trees and general branching processes. *Random Structures Algorithms*, 31(2):186–202, 2007.
- [62] H. A. Simon. On a class of skew distribution functions. *Biometrika*, 42:425–440, 1955.
- [63] R. T. Smythe and H. M. Mahmoud. A survey of recursive trees. *Teor. ĽmovĽr. Mat. Stat.*, 51:1–29, 1994.
- [64] A. Sridharan, Yong Gao, Kui Wu, and J. Nastos. Statistical behavior of embeddedness and communities of overlapping cliques in online social networks. *INFOCOM, 2011 Proceedings IEEE*, pages 546–550, 2011.
- [65] J. Szymański. On a nonuniform random recursive tree. In *Random graphs '85 (Poznań, 1985)*, pages 297–306. North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [66] M. A. Tapia and B. R. Myers. Generation of concave node-weighted trees. *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-14:229–230, 1967.
- [67] R. van der Hofstad. *Random Graphs and Complex Networks*. Előkészületben. <http://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCN.pdf>.
- [68] G. U. Yule. A mathematical theory of evolution, based on the conclusions of Dr. J. C. Willis, F.R.S. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. B.*, 213:402–410, 1925.

Összefoglalás

Különböző véletlen gráfmodellek aszimptotikus viselkedését vizsgáltuk többféle szempontból. A modellekben közös volt a skálafüggetlenség: a d fokú csúcsok aránya 1 valószínűséggel konvergál valamely pozitív c_d számhoz, amint a csúcsok száma végtelenhez tart, továbbá $c_d d^\gamma$ határértéke pozitív $d \rightarrow \infty$ esetén valamely $\gamma > 0$ számra.

A 2. fejezetben elégséges feltételt adtunk arra, hogy egy időben véletlenül fejlődő, lépésenként egy új csúccsal bővülő gráfsorozatban regulárisan növekvő méretű, de véletlenül választható csúcshalmazban az adott fokú csúcsok aránya 1 valószínűséggel konvergáljon, a fokszámot az egész gráfban számolva. Itt sem a modell fejlődését, sem a kiválasztás módját nem kellett pontosan megadni, a kapott eredmények modellfüggetlenek. Megmutattuk, hogy a kiválasztásra vonatkozó feltételek nem hagyhatók el teljesen, és több, részben korábban ismert, részben új példát is adtunk a tétel alkalmazására.

A 3. fejezetben egyszerű, lineáris súlyozású fát vizsgáltunk, ebben egy kijelölt helyre kerülő csúcs fokszámának aszimptotikus viselkedését vizsgáltuk urnamodellek segítségével. Ez a csúcs lehet például a gyökér k . gyermeke, vagy a gyökér k . gyermekének l . gyermeke, stb. Megmutattuk, hogy ha ennek a csúcsnak a fokszámát az összes csúcs számának megfelelő hatványával osztjuk, akkor a kapott sorozat 1 valószínűséggel konvergens.

A 4. fejezetben olyan modellt javasoltunk, melyben az egyes lépéseknél nem csak a régebbi csúcsok fokszáma számított, hanem azt is figyelembe vettük, hogy mely csúcsok hányszor léptek korábban kölcsönhatásba. Így egy csúcsra két véletlenül növekvő mennyiség is jellemző: összesen hányszor vett részt kölcsönhatásban, illetve hány különböző másik csúccsal szerepelt együtt. Mindkét szempontból bizonyítottunk skálafüggetlenséget a súly és fokszám együttes aszimptotikus eloszlásán keresztül, továbbá rögzített csúcs súlyának és fokszámának, illetve a maximális súlynak és fokszámnak aszimptotikus viselkedését is leírtuk.

A bizonyításokban főként martingálelméleti eszközöket használtunk, ezek skálafüggetlen véletlen gráfokra vonatkozó alkalmazásait mutattuk be.

Summary

We investigated the asymptotic behaviour of several random graph models. These models had in common the so called scale free property. That is, the ratio of vertices of degree d in the randomly evolving graph sequence converges to a constant $c_d > 0$ almost surely as the number of vertices tend to infinity; moreover, $c_d d^\gamma$ has a positive and finite limit as $d \rightarrow \infty$ for some $\gamma > 0$.

In Chapter 2 we gave sufficient conditions for the following. The ratio of vertices of a given degree counted in a set of selected vertices, whose size is regularly growing, is convergent almost surely. These results are valid for a wider family of models; we do not need to know neither the model, nor the method of selection exactly. We showed that the conditions on the method of selection may not be totally omitted. We gave several applications.

In Chapter 3 we examined a simple random tree with linear weights. We investigated the asymptotic behaviour of the degree of a vertex in a given position, e.g., the k th child of the root, or the k th child of the j th child of the root, etc. We proved that the degree of this vertex divided by an appropriate power of the total number of vertices is convergent almost surely. The distribution of the random variable in the limit is equal to the distribution of the product of some simpler and independent random variables.

In Chapter 4 we proposed a new random graph model, whose dynamics were driven by interactions of three vertices. At each step not only the degrees of old vertices were taken into account, but the number of common interactions as well. We assigned two quantities to every vertex. The weight was the number of interactions that the vertex had taken part in; while the degree was the number of different vertices that it had interacted with. We proved the scale free property both for degrees and weights, using the asymptotic joint distribution. Moreover, we described the asymptotic behaviour of the degree and weight of a given vertex and the maximal weight and maximal vertex as well.

The proofs are based on the methods of martingale theory.