

Végesméret-effektusok kétdimenziós kvantumtérelméletekben

A sine–Gordon-modell csavart, kétfrekvenciás és
szuperszimmetrikus változatainak vizsgálatával

DOKTORI ÉRTEKEZÉS

Wágner Ferenc

ELTE Elméleti Fizikai Tanszék

2009.

ELTE Fizika Doktori Iskola
(vezető: Horváth Zalán egyetemi tanár, akadémikus)

Részecskefizika és csillagászat program
(vezető: Csikor Ferenc egyetemi tanár)

Témavezetők: Palla László fiz. tud. dokt., egyetemi tanár
ELTE Elméleti Fizikai Tanszék
Bajnok Zoltán fiz. tud. kand., tudományos főmunkatárs
MTA Elméleti Fizikai Tanszéki Kutatócsoport
Takács Gábor MTA dokt., tudományos főmunkatárs
MTA Elméleti Fizikai Tanszéki Kutatócsoport

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke	v
Táblázatok jegyzéke	vi
Bevezetés	vii
1 A csavart sine–Gordon-modell	1
1.1 Röviden a sine–Gordon-modellről	1
1.2 Lagrange-függvény és szimmetriák	3
1.3 Operátortartalom	5
1.4 Csonkított konform tér	6
1.5 Többrészecske-állapotok véges térfogatban	7
1.5.1 Klasszikus megoldások végtelen térfogatban	8
1.5.2 Kvantumos részecskespektrum	9
1.5.3 Bethe–Yang-egyenletek	10
1.6 Exponenciális terek vákuum-várhatóértékei	14
1.6.1 Szimmetriák	14
1.6.2 Véges térfogatú viselkedés	15
1.6.3 Összevetés a TCSEA-eredményekkel	17
1.7 Összefoglalás	20
2 A kétfrekvenciás sine–Gordon-modell	21
2.1 A modell definíciója	21
2.2 Alapvető tulajdonságok	22
2.3 Klasszikus analízis	24
2.3.1 Vákuumfelhasadás	24
2.3.2 Szolitonbezárás	25
2.3.3 Lélegzőtömegek	26
2.3.4 Fázisátalakulás	27
2.4 Csonkított konform tér	27
2.4.1 Operátortartalom	27
2.4.2 Hamilton-operátor	28
2.5 Formfaktor-perturbációszámítás	30
2.5.1 Vákuumenergia-sűrűségek	31

2.5.2	Lélegzőtömegek	32
2.5.3	S-mátrix	33
2.6	Az eredmények összevetése	33
2.6.1	Mérési módszerek	33
2.6.2	Az $\alpha = \beta/2$ speciális eset	35
2.7	Szemiklasszikus formfaktorok	39
2.7.1	Szemiklasszikus tömegformulák	41
2.7.2	TCSA	43
2.7.3	Elméleti megfontolások	47
2.8	Fázisszerkezet	50
2.8.1	Landau–Ginzburg-analízis	51
2.8.2	Szignatúrák véges térfogatban	53
2.8.3	A kritikus pont keresése	58
2.8.4	A kritikus trajektória	59
2.8.5	Numerikus eredmények	62
2.9	Összefoglalás	64
3	A szuperszimmetrikus sine–Gordon-modell	67
3.1	Hatás és diszkrét szimmetriák	67
3.2	Spektrum és szórásamplitúdók	68
3.3	Kink- és vákuumszerkezet	69
3.3.1	Trikritikus Ising-modell	70
3.3.2	SUSY sine–Gordon-modell	72
3.3.3	Nagy térfogatú leírás	73
3.4	Perturbált konform térelmélet	73
3.4.1	A modell pCFT-keretben	73
3.4.2	Megmaradó áramok és a perturbáló potenciál	75
3.5	Csonkított konform tér	77
3.5.1	Alkalmazás a szuperszimmetrikus sine–Gordon-modellre	77
3.5.2	Összevetés a pCFT-eredményekkel	79
3.5.3	Nagyterfogatú spektrum	80
3.6	Összefoglalás	82
4	Az eredmények áttekintése	83
A	Csonkított konform állapotter közelítés	85
B	Formfaktor-perturbációs számítás	89
C	A szuperszimmetrikus sine–Gordon-modell perturbált konform térelméleti keretben	97
	Irodalomjegyzék	101

Ábrák jegyzéke

1.1.	A negyedik minimumánál azonosított potenciál	3
1.2.	Lélegzőtömegek a 2-csavart modellben	9
1.3.	Hiányzó antiszimmetrikus állapotok	12
1.4.	Kétkink-állapotok	13
1.5.	Háromkink-állapotok	14
1.6.	Vertexoperátorok vákuum-várhatóértékei	17
1.7.	$F_1^1(l)$ exponenciális lecsengése	18
1.8.	A szemiklasszikus és az egzakt vákuumértékek összehasonlítása	19
2.1.	Az $n = 2, m = 1$ potenciál	25
2.2.	A kétfrekvenciás sine–Gordon-modell spektruma η függvényében	36
2.3.	A valódi vákuum energiasűrűségének korrekciója	37
2.4.	A lélegzőtömegek korrekciói	38
2.5.	A tömegkorrekciók fázisfüggése	39
2.6.	A vákuum energiasűrűségének korrekciója $\hat{\mu}$ -ban	40
2.7.	A lélegzőtömegek korrekciói $\hat{\mu}$ -ban	40
2.8.	Lélegzőtömegek η függvényében	41
2.9.	Az RSOS ₃ modell vákuumszerkezete	49
2.10.	Másodrendű fázisátmenet a klasszikus potenciálban	51
2.11.	Elsőrendű fázisátmenet a potenciálban	54
2.12.	A kétfrekvenciás sine–Gordon-modell spektrumának fejlődése	57
2.13.	Kritikus TCSA-spektrumok	60
2.14.	Fázisdiagram	65
3.1.	A trikritikus Ising-modell kinkjeinek szomszédsági diagramja	70
3.2.	A szuperszimmetrikus Landau–Ginzburg-potenciál	71
3.3.	A SUSY sine–Gordon-modell kinkjeinek szomszédsági diagramja	72
3.4.	TCSA- és pCFT-energiaszintek összevetése	81
3.5.	Az IR TCSA-spektrum alsó állapotai	82
A.1.	Egy tipikus nyers TCSA-spektrum alsó 10 értéke	87

Táblázatok jegyzéke

2.1. Szemiklasszikus jóslatok az első lélegző tömegkorrekciójára	43
2.2. FFPT-jóslatok és TCSA-mérések az első lélegzők tömegeire ($\delta = 0$)	44
2.3. TCSA-mérések az első lélegzők tömegeire ($\delta = \pi/2$)	45
2.4. Tömegillesztések	46
2.5. TCSA-mérések az első lélegzők tömegeire ($r = 2.2$)	46
2.6. Tömegillesztések ($r = 2.2$)	47
2.7. Az Ising-modell első 8 állapotának skáladimenziója	59
2.8. Az első két gerjesztett állapot illesztése a kritikus spektrumban	62
3.1. Konform állapotok osztályozása	79
C.1. Vezető pCFT-energiakorrekciók	99

Bevezetés

A kvantumtérelméletek elméleti vizsgálatát technikai okokból többnyire végtelen térfogatban végezzük: a megoldáshoz vezető úton komoly segítséget jelenthet a határfeltételek hiánya vagy az egyszerű bázisválasztás lehetősége. A laboratóriumban viszont már nem engedhetjük meg magunknak tetszőlegesen nagy minták használatát, vagy lehet akár éppen az a célunk, hogy egy jelenséget kis méretekben, esetleg kifejezetten a rendszer méretének függvényében vizsgáljunk. Ezért gyakorlati szempontból rendkívül fontos, hogy a kvantumtérelméletek végesméret-effektusairól [1, 2] minél világosabb képünk legyen.

Bár távol eső területnek tűnik, mégis nagyon hasonló okokból játszanak fontos szerepet a véges térfogati effektusok a rácstérelméletben. Jelenleg a rácsok méretének oly mértékű növelése, mely lehetővé tenné például az S-mátrixok aszimptotikus állapotokon keresztüli direkt vizsgálatát, igen komoly technikai akadályokba ütközik. Kézenfekvő felhasználási területe tehát a rácstérelmélet az olyan módszereknek, melyek képesek — például — szórási amplitúdókat megadni valamilyen mennyiség térfogatfüggésének vizsgálata révén.

Egy $3 + 1$ dimenziós kölcsönható kvantumtérelmélet egzakt megoldásait általában még végtelen térfogatban sem tudjuk előállítani, jellemzően egyes mennyiségek perturbációs sorai vannak csak a kezünkben. Ez hátráltatja a végesméret-effektusok vizsgálatát, hiszen egyrészt kizárja látókörünkben a különösen érdekes nemperturbatív jelenségeket, másrészt biztos összehasonlítási alap híján megnehezíti a véges térfogatban kapott eredmények értelmezését. Ezért különösen alkalmas alanyai ezeknek a vizsgálatoknak a teljesen integrálható elméletek, melyek spektrumáról és szórási amplitúdóiról egzakt analitikus információkkal rendelkezünk.

Dolgozatomban a jól ismert *sine-Gordon-modell*, egy teljesen integrálható $1 + 1$ dimenziós kvantumtérelmélet különböző változatait vizsgálom. Az egyes változatok különféle megközelítéseket igényelnek, attól függően, hogy a szóban forgó deformáció teljesen integrálható marad-e (mint a csavart- vagy a szuperszimmetrikus modell esetében), hogy felfogható-e szóráselmélet perturbációjaként (mint a kétfrekvenciás modell), illetve, hogy véges vagy végtelen térfogatban végezzük-e a vizsgálatot. A különböző módszerek kombinált használatával nyert egységes kép részint bővíti a módszerek alkalmazhatóságára

vonatkozó tapasztalatainkat és igazol egyes korábbi sejtéseket, másrészt az érvényességi tartományok összekapcsolása révén új információkkal szolgál a már sokat vizsgált modellekről is.

A *csonkított konform állapotér közelítés* (TCSA) egy numerikus módszer perturbált konform térelméletek véges térfogatú spektrumának vizsgálatára. Nem igényli a perturbált modell integrálhatóságát, ezért a sine–Gordon-modell mindhárom vizsgált deformációjára alkalmazható, ám közelítő numerikus módszer lévén a kapott eredmények értelmezése különös körültekintést igényel.

Teljesen integrálható modellek véges térfogatú spektruma vizsgálható a végtelen térfogatú spektrumleírásból kiindulva is. Nagy térfogatban a tömeges részecskék lényegében mindig távol vannak egymástól, emiatt pontszerűnek tekinthetők és energiaszintjeik térfogatfüggése kvantummechanikai módszerekkel vizsgálható az egzakt S-mátrix ismeretében.

Nem integrálható modellekben hasonló eredmények *formfaktor-perturbációszámítással* (FFPT) kaphatók, ha a kérdéses modell valamilyen integrálható modell perturbációjának tekinthető. Esetünkben a kétfrekvenciás sine–Gordon-modell ilyen, sőt, két perturbatív tartománnyal is rendelkezik a potenciátagok szerepének felcserélhetősége révén. Mivel azonban a modell egy különösen érdekes vonása, a fázishatár jelenléte perturbatív módszerekkel nem vizsgálható, annak megtalálására egyetlen lehetőségünk a TCSA marad.

Az 1. fejezet témája a *csavart* sine–Gordon-modell, mely a hagyományos sine–Gordon-modelltől csak peremfeltételeiben tér el; célunk annak igazolása, hogy ez a deformáció nem rontja el a modell integrálhatóságát. Az integrálhatóságra alapozott intuitív képünkből kiindulva jóslatokat fogalmazunk meg az első néhány gerjesztés energiájának térfogatfüggésére, melyeket TCSA-val ellenőrzünk. Numerikus módszerünk alkalmasnak bizonyul az irodalomban fellelhető, exponenciális terek vákuumértékeit megadó egzakt formula alátámasztására is.

Ezek az eredmények keretet jelentenek a *kétfrekvenciás* sine–Gordon-modell vizsgálatához is. A 2. fejezetben előbb összevetjük az FFPT- és a TCSA szolgáltatta adatokat a perturbatív tartományokban, majd kiterjesztjük vizsgálatainkat a modell nemperturbatív jellegzetességének, a benne lezajló fázisátalakulásnak a leírására, melyet az Ising univerzalitási osztályba tartozónak találunk.

A 3. fejezetben a *szuperszimmetrikus* sine–Gordon-modellt tárgyaljuk. Először tisztázzuk kink- és vákuumszerkezetét, majd bemutatjuk, hogy az megfelel az egzakt S-mátrixra vonatkozó sejtéseknek. Ezután megadjuk a modell perturbált konform térelméleti leírását, majd az eredményeket összevetjük a TCSA-adatokkal. Bár ebben az esetben a TCSA divergenciákkal terhelt, a kvalitatív IR spektrum lehetőséget ad az alacsonyan fekvő állapotokat keltő UV operátorok azonosítására.

1. fejezet

A csavart sine–Gordon-modell

A teljesen integrálható 2 dimenziós kvantumtérelméletek fontos eszközei a nemperturbatív térelméleti jelenségek vizsgálatának, de meglehetősen ritkák. Ezért az olyan módosítások vagy deformációk, melyek egy integrálható elméletből egy másik integrálható elméletet állítanak elő, komoly érdeklődésre tartanak számot. Ilyen példák a konform térelméletek integrálható deformációi [3], illetve az integrálhatóságot őrző peremfeltétellel ellátott elméletek [4]. Ebben a fejezetben a sine–Gordon-modell egy másfajta integrálható módosítását vizsgáljuk, melyet először Swieca [5] említett, majd Klassen és Melzer [6] tárgyalt kissé részletesebben.

A klasszikus sine–Gordon-modell azon általánosításáról van szó, melyben a ϕ térváltozó periódusa a koszinuszos potenciálénak k -szorososa ($k \in \mathbb{N}$).¹ A sine–Gordon-modell minden olyan sajátossága, mely csak a ϕ tér lokális tulajdonságaitól függ (például integrálhatóság, magasabb spinű megmaradó mennyiségek), jellemző lesz a k -csavart modellre is. Emiatt meglehetősen világos intuitív képünk van a modell gerjesztéseiről (legalábbis végtelen térfogatban); ennek a képnek a véges térfogatban kapott eredményekkel való konzisztenciájának vizsgálata az 1.5.2. fejezet tárgya lesz.

1.1. Röviden a sine–Gordon-modellről

Számos érdekes tulajdonságának köszönhetően a sine–Gordon-modell már hosszú ideje fontos szerepet játszik a kvantumtérelméletek nemperturbatív elméleti vizsgálatában, illetve több konkrét fizikai rendszer leírására is alkalmas. Ide tartozik például az erősen korrelált elektronok töltéssűrűség-hullámainak terjedése 1+1 dimenzióban, a spinláncok statisztikus mechanikájának bizonyos kérdései, egyes nemlineáris optikai jelenségek, vagy a spinhullámok terjedése

¹Ez az eljárás bármilyen periodikus skalárpotenciállal rendelkező skalármezőn végrehajtható.

szuperfolyékony héliumban [7]. A modell Lagrange-sűrűségfüggvénye:

$$\mathcal{L}_{\text{SG}} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \mu \cos \beta \phi \quad \mu, \beta \in \mathbb{R}, \quad \mu \equiv \frac{m^2}{\beta^2}, \quad (1.1)$$

ahol a $\phi : \mathbb{R}^{1+1} \rightarrow S^1$ szögváltozó valós skalármező, melynek értékészlete a koszinuszos potenciál egy teljes periódusát foglalja magában: $0 \leq \phi < 2\pi/\beta$.

A sine–Gordon-modell teljesen integrálható mind a klasszikus-, mind a kvantumelméleti szinten, ennél fogva teljesen ismertnek tekinthető. (A klasszikus sine–Gordon-modell összefoglalása megtalálható például Rajaraman [8] könyvében.) Egzaktul ismerjük spektrumát, a benne előforduló részecskék tömegeit és szórásmátrixait [9]. Az eredményeket pusztán felsorolva:

- A klasszikus *vákuum* a potenciál minimumhelyének felel meg, azaz konstans $\phi_0 = 0$ alakú.
- A modell tartalmaz topologikus gerjesztéseket, a *szolitonokat* és antirészecskéiket. A klasszikus sztatikus szolitonmegoldás

$$\phi_{\text{szoliton}}(x, t) = \frac{4}{\beta} \arctg e^{m(x-x_0)}; \quad (1.2)$$

a mozgó megoldások ennek Lorentz-transzformációjával kaphatók meg. Az antirészecskét a $\phi \mapsto -\phi$ transzformáció állítja elő, tömege a szolitonéval egyenlő, amit a következőkben M -mel jelölünk.

- Vannak úgynevezett *lélegző* megoldások is:

$$B^{(v)}(x, t) = \frac{4}{\beta} \arctg \frac{\sin(mvt/\sqrt{1+v^2})}{v \operatorname{ch}(mx/\sqrt{1+v^2})}, \quad v \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

melyek szoliton-antiszoliton kötött állapotokként foghatók fel, tömegük ennek megfelelően 0 és $2M$ közé esik. A klasszikusan folytonos spektrumuk a kvantálás után diszkrétte válik [9, 10]:

$$m_l = 2M \sin \frac{p\pi l}{2}, \quad l = 1, 2, \dots < \frac{1}{p} \quad (1.4)$$

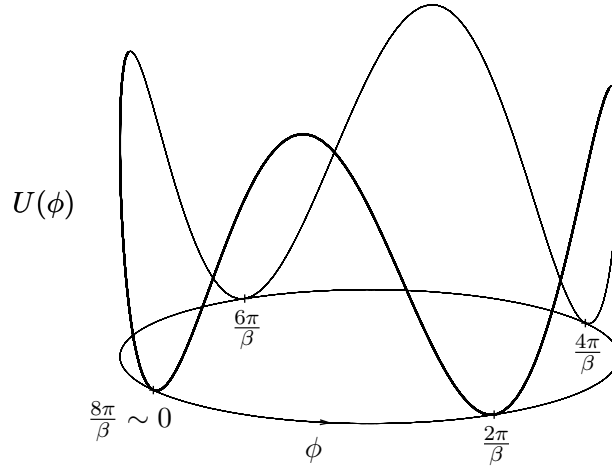
ahol

$$p = \frac{\beta^2}{8\pi - \beta^2}. \quad (1.5)$$

- A megoldásokat jellemzi a *topológiai töltésük*, melynek definíciója

$$Q = \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx, \quad (1.6)$$

azaz lényegében a megoldás körülfordulási számát adja meg. A szoliton topológiai töltése 1, az antiszolitoné -1 , a lélegzőké pedig 0.



1.1. ábra. A negyedik minimumánál azonosított potenciál

1.2. Lagrange-függvény és szimmetriák

Véges térfogatban a sine-Gordon-modell hatása:

$$\mathcal{A} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-L/2}^{L/2} dx \left(\frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi + \mu \cos \beta \phi \right) \quad (1.7)$$

A fent mondottak szerint a k -csavart sine-Gordon-modellt a hatásfucionál megváltoztatása nélkül, pusztán a ϕ szögváltozó értékészletének kiterjesztésével állítjuk elő, oly módon, hogy az egy helyett a koszinuszos potenciál k darab teljes periódusát foglalja magában:

$$\phi \sim \phi + \frac{2\pi}{\beta} k, \quad (1.8)$$

ami a következő kváziperiodikus határfeltétel kiadásával egyenértékű:

$$\phi(x + L, t) = \phi(x, t) + \frac{2\pi}{\beta} k q \quad q \in \mathbb{Z}. \quad (1.9)$$

A klasszikus alapállapotok a hagyományos sine-Gordon vákuum másolatai, a potenciál minden minimumhelyében egy (lásd az 1.1. ábrát):

$$\phi_n = \frac{2\pi}{\beta} n \quad n = 0, \dots, k - 1. \quad (1.10)$$

Végtelen térfogatban ($L = \infty$) minden más sine-Gordon megoldás szintűgy megoldása a k -csavart modellnek, lévén a mozgásegyenletek azonosak. De például a sztatikus szoliton megoldás, mely a sine-Gordon-modellben a $\phi \sim \phi + \frac{2\pi}{\beta}$

azonosítás miatt *ugyanabból* a vákuumból indul, mint amelybe érkezik, a k -csavart modellben *szomszédos* vákuumok között interpoláló *kinkké* válik. Véges térfogatban a peremfeltételek nemtriviális kiválasztási szabályokat rónak ki a kinkmegoldásokra, melyeket az 1.5 fejezetben részletesen is megvizsgálunk.

A végtelen térfogatú kvantumtérelméletben a fenti ϕ_n megoldások degenerált $|n\rangle$ vákuumállapotoknak felelnek meg, melyekre

$$\langle n | \phi(x, t) | n \rangle = \frac{2\pi}{\beta} n; \quad (1.11)$$

véges térfogatban ezeket az állapotokat az alagutazás összekeveri és megszünteti a degenerációt. Maga a hatás természetesen ebben az esetben is rendelkezik egy \mathbb{Z}_k szimmetriával, melynek T unitér generátorát a

$$T\phi(x, t)T^{-1} = \phi(x, t) - \frac{2\pi}{\beta} \quad (1.12)$$

módon definiálhatjuk. Ezzel a definícióval

$$T |n\rangle = |n + 1 \pmod k\rangle, \quad (1.13)$$

és a

$$H = \int_{-L/2}^{L/2} dx \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 - \mu \cos \beta \phi \right) \quad \pi(x, t) = \partial_t \phi(x, t) \quad (1.14)$$

Hamilton-operátor kommutál T -vel. T sajátvektorai a „Bloch-hullámok”:

$$|\vartheta_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{m=0}^{k-1} e^{im\vartheta_n} |m\rangle \quad \vartheta_n = \frac{2\pi}{k} n \quad (1.15)$$

$$T |\vartheta_n\rangle = e^{-i\vartheta_n} |\vartheta_n\rangle, \quad (1.16)$$

melyek a fentiek szerint H sajátállapotai is. Ezek az állapotok véges térfogatban is jól definiált sajátállapotok, így az (1.16) kifejezés inverzével általánosan definiálják a fenti $|n\rangle$ állapotokat:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{m=0}^{k-1} e^{-in\vartheta_m} |\vartheta_m\rangle. \quad (1.17)$$

Az (1.7) dinamika rendelkezik még egy \mathbb{Z}_2 szimmetriával is, melynek S generátora

$$S\phi(x, t)S^{-1} = -\phi(x, t) \quad S^\dagger = S^{-1} = S \quad (1.18)$$

módon definiálható. Hatása az alapállapotokon

$$S |n\rangle = |k - n\rangle = |-n\rangle \quad \text{illetve} \quad S |\vartheta_n\rangle = |-\vartheta_n\rangle = |\vartheta_{k-n}\rangle. \quad (1.19)$$

Az S és T transzformációk együtt egy \mathbb{D}_k diszkrét szimmetriacsoportot generálnak, melynek megjelenését a vákuumstruktúrában [11] részletesen tárgyalja.

1.3. Operátortartalom

Az (1.8) azonosítás következményeképpen a

$$V_m = \exp\left(i\beta\frac{m}{k}\phi\right) \quad m \in \mathbb{Z} \quad (1.20)$$

operátorok jól definiáltak és egymásra nézve lokálisak (vagyis korrelációs függvényük egyértékű) az elméletben. Normálásukat és normálrendezésüket úgy definiáljuk, hogy kétpontfüggvényeik

$$\langle V_m(x)V_{-m}(y) \rangle \rightarrow |x-y|^{-4\pi\beta^2 m^2/k^2} \quad \text{ha } |x-y| \rightarrow 0 \quad (1.21)$$

szerint viselkedjenek. Könnyen látható, hogy

$$TV_m T^{-1} = e^{-\frac{2\pi i}{k}m} V_m \quad \text{és} \quad SV_m S^{-1} = V_{-m}. \quad (1.22)$$

A korrelációs függvények rövid távolságú viselkedését egy $c = 1$ centrális töltésű konform térelmélet, a kompaktifikált szabad bozon elmélete írja le, melynek Lagrange-sűrűségfüggvénye

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi. \quad (1.23)$$

Hogy meghatározzuk a k -csavart sine–Gordon-modell teljes lokális operátorspektrumát, tekintsük most ezt az UV (vagyis rövid távolságú) határesetet! A χ tér egy r sugarú körön él, tehát

$$\chi \sim \chi + 2\pi r, \quad (1.24)$$

ahol az r kompaktifikációs sugarat az (1.8) azonosításnak megfelelően kell meghatározunk. Tekintetbe véve, hogy ϕ és χ normálása $\sqrt{4\pi}$ -vel eltér, az

$$r = \frac{\sqrt{4\pi}}{\beta} k \quad (1.25)$$

eredményt kapjuk. A vázolt elmélet $\widehat{U(1)}_L \times \widehat{U(1)}_R$ Kac–Moody-szimmetriával rendelkezik, primér terei a $\mathcal{V}_{n,m}$ *vertexoperátorok* [12]

$$\Delta_{n,m}^\pm = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{r} \pm \frac{mr}{2} \right)^2 \quad (1.26)$$

jobb-, illetve bal konform súlyokkal. n az impulzus-kvantumszám, m pedig az úgynevezett csavarodási szám. A fenti V_n lokális operátorok a $\mathcal{V}_{n,0}$ vertexoperátoroknak felelnek meg, a sine–Gordon potenciált pedig

$$:\cos \beta \phi: \equiv \frac{1}{2} (\mathcal{V}_{k,0} + \mathcal{V}_{-k,0}) \quad (1.27)$$

módon azonosíthatjuk.

Csak két maximális lokális operátoralgebra létezik a kompaktifikált szabad bozon elméletében [13]:

$$\mathcal{A}_b = \{\mathcal{V}_{n,m} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\} \quad (1.28a)$$

$$\mathcal{A}_f = \{\mathcal{V}_{n,m} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} + m/2\}. \quad (1.28b)$$

Az elsőben minden operátor bozonikus, míg a másodikban a páratlan m csavarodási számmal rendelkezők fermionok. Itt látjuk tehát a „sine–Gordon osztályú” elméletek teljes készletét, melyben a hagyományos sine–Gordon-modell az \mathcal{A}_b , a tömeges Thirring-modell pedig az \mathcal{A}_f választásnak felel meg, $k = 1$ mellett.

1.4. Csonkított konform tér

Elméleti megfontolásaink alátámasztására a *csonkított konform állapotter közelítést* (TCSA) fogjuk használni, melyről egy rövid általános bemutatás az A függelékben olvasható. Az alábbiak a k -csavart sine–Gordon-modellre való alkalmazást tárgyalják.

Az (1.14) Hamilton-operátort egy végtelen Hermitikus mátrixként reprezentálhatjuk, mely a $c = 1$ konform térelmélet \mathcal{A}_b operátoralgebrára épített állapotterén hat:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\mathcal{V}_{n,m} \in \mathcal{A}_b} \mathcal{F}_{n,m}, \quad (1.29)$$

ahol

$$\mathcal{F}_{n,m} = \text{span} \{a_{-k_1} \dots a_{-k_p} |\mathcal{V}_{n,m}\rangle : k_1, \dots, k_p \in \mathbb{Z}^+\} \quad (1.30)$$

a χ szabad bozontér negatív frekvenciájú módusaival a $\mathcal{V}_{n,m}$ legmagasabb súlyú állapotra épített Fock-tér.

A k -csavart elmélet potenciáljának (1.27) alakját írjuk be a TCSA Hamilton-operátor (A.7) kifejezésébe, a λ csatolási állandó szerepét pedig az (1.14)-beli μ játssza. Tömegegységként az M szolitontömeget választjuk, mely a μ csatolási állandóval a TBA módszerekkel meghatározott [14]

$$\mu = \kappa(\Delta) M^{2-2\Delta} \quad \kappa(\Delta) = \frac{2\Gamma(\Delta)}{\pi\Gamma(1-\Delta)} \left[\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2-2\Delta})}{2\Gamma(\frac{\Delta}{2-2\Delta})} \right]^{2-2\Delta} \quad (1.31)$$

összefüggésben áll (a hagyományos sine–Gordon-modellre vonatkozó relációt használjuk, mert a tömeghézag-összefüggés lokális tulajdonság, így a k -csavart modellben változatlan formában érvényes). Δ a — feltételeink szerint spintelen

— perturbáló operátor konform súlya: $\Delta = \bar{\Delta} = \frac{\beta^2}{8\pi}$. Az így előállított és a szolitontömeggel dimenziótlanított Hamilton-operátort az $l = ML$ dimenziótlan térfogattal kifejezve

$$\hat{H} = \frac{H}{M} = \frac{2\pi}{l} \left\{ H_{\text{CFT}} - \kappa(\Delta) \frac{l^{2-2\Delta}}{(2\pi)^{1-2\Delta}} \frac{1}{2} [\mathcal{V}_{k,0}(1,1) + \mathcal{V}_{-k,0}(1,1)] \right\}, \quad (1.32)$$

ahol a spinekre vonatkozó $\delta_{\Delta_a - \bar{\Delta}_a, \Delta_b - \bar{\Delta}_b}$ kifejezést elhagytuk, mert a perturbáló operátornak egyébként sincs mátrixeleme különböző spinű állapotok között. Ezt kihasználjuk akkor is, amikor a numerikus diagonalizálást a

$$\mathcal{H}_{\text{TCS}}(E_{\text{küszöb}}, s, q) = \{ |\Psi\rangle : \hat{Q}_k |\Psi\rangle = q |\Psi\rangle, (L_0 - \bar{L}_0) |\Psi\rangle = s |\Psi\rangle, H_{\text{CFT}} |\Psi\rangle \leq E_{\text{küszöb}} |\Psi\rangle \} \quad (1.33)$$

módon csonkított Hilbert-téren végezzük el, ahol a konform energia felső korlátozásán túl az állapotteret megszoríthattuk a konform spin és a topológiai töltés (\hat{Q}_k , a χ kompaktifikált bozon csavarodási száma, az (1.9)-beli q vagy (1.36)) rögzített értékére is, tekintve, hogy ezek kommutálnak az (1.32) Hamilton-operátorral.

Mivel a sine–Gordon-modell taszító tartományában ($p > 1$) a TCSA UV-divergens [15, 16], numerikus vizsgálatainkat a vonzó tartományra korlátozzuk. $E_{\text{küszöb}}$ értékét úgy választjuk, hogy az állapotok száma 10000 körül legyen, mert a rendelkezésünkre álló számítási kapacitás ezt engedi meg.

1.5. Többrészecske-állapotok véges térfogatban

A teljesen integrálható modellek véges térfogatú spektruma felhasználható az elmélet egzakt S-mátrix sejtéseinek tesztelésére. Például a periodikus háttérfeltételeket kielégítő többkink-állapotok energiaszintjei leírhatók a kink szórásmatrixainak segítségével [6], majd a kapott eredmények összevethetők a TCSA-módszerrel kapott véges térfogatú spektrummal. Végtelen térfogatban a tömeges részecskék lényegében mindig távol vannak egymástól (a szórások lezajlottával már csak távolodnak), így egy többrészecske-állapot energiája a benne található részecskék energiáinak összege. Véges térfogatban ehhez korrekciók adódnak, melyekért három különböző fizikai effektus felelős:

- Egy kinkelmélet degenerált vákuumai között *alagutazás* lehetséges, mivel a köztük levő potenciálgát nem végtelen magas. Az alagutazás amplitúdója insztantonmódszerrel számítható, melyből az effektus nagyságrendjére $\mathcal{O}(e^{-ML})$ -t kapunk, ahol L a térfogat, M pedig egy karakterisztikus tömeg, esetünkben a kvantumkinké.

- Kétféle *virtuális* effektus is befolyásolja a spektrumot: a vákuumpolarizáció és a virtuális részecskék közvetítette kölcsönhatások, de tömeges elméletekben mindkettő ismét csak $\mathcal{O}(e^{-ML})$ nagyságú korrekciót okoz.
- Véges térfogatban a részecskék nem távolodnak el, hanem folyamatosan *szóródnak* egymáson, így az energia-sajátállapotok nem az aszimptotikus állapotok, hanem a stacionárius szórásállapotok (vagyis az összetevők egymáson történő szóródására invariáns állapotok) lesznek. Az ebből eredő kvantálási feltételek (az úgynevezett Bethe–Yang-egyenletek) kifejezhetők az elmélet S-mátrixával, ha a részecskéket pontszerűeknek tekintjük. A fellépő korrekciók $\mathcal{O}(L^{-2})$ rendűek, azaz sokkal nagyobbak, mint az előző két pontban említettek, így ideálisak az S-mátrix ellenőrzésére.

1.5.1. Klasszikus megoldások végtelen térfogatban

Az 1.2 fejezetben említettek szerint a sine–Gordon-modell sztatikus szolitonmegoldása a k -csavart elméletben kinkké válik. Pontosabban ez annyit tesz, hogy a k -csavart modell klasszikus kinkmegoldásai (1.2) segítségével

$$K_{n,n+1}(x, t) = \phi_{\text{szoliton}}(x, t) + \frac{2n\pi}{\beta} \quad n = 0, \dots, k-1 \quad (1.34)$$

alakban írhatók fel, ahol K indexei a kink $x \rightarrow \pm\infty$ vákuumait jelölik és modulo k értendők. Ennek megfelelően k különböző egykink-megoldás áll előtünk, valamint az antikink, melyek a $\phi \rightarrow -\phi$ tükrözéssel kaphatók. Mivel egy többkink-megoldás felfogható vákuumok láncolataként is, a sine–Gordon szolitonokkal és antiszolitonokkal ellentétben nem helyezhetünk tetszőleges módon egymás mellé különféle (anti)egyikink-megoldásokat. A kvantumelméletben ez megszorításokat jelent majd a több részecskés Hilbert-térre.

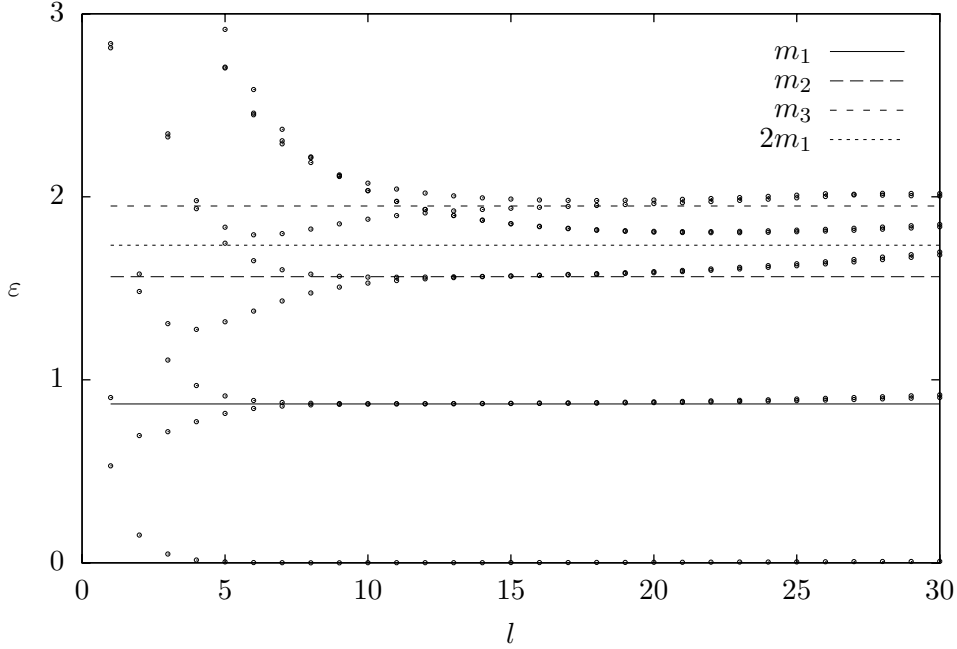
A k -csavart modellben lélegző megoldásból (1.3) is k különbözőt találunk, melyek a potenciál különböző minimumai körül oszcillálnak:

$$B_n^{(v)}(x, t) = B^{(v)}(x, t) + \frac{2n\pi}{\beta} \quad n = 0, \dots, k-1. \quad (1.35)$$

A k -csavart modellben a topológia töltés (1.6) definícióját korrigálnunk kell, hogy továbbra is azt számolja, hányszor járja körbe egy megoldás a ϕ térváltozó teljes — k -szorosra bővített — értékészletét:

$$Q_k = \frac{\beta}{2k\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x \phi \, dx. \quad (1.36)$$

Ez azzal jár, hogy az egykink-megoldások $1/k$ tört értékű topológiai töltéssel rendelkeznek, vagyis legalább k darab kinkre van szükségünk egész topológiai



1.2. ábra. Lélegzőtömegek a 2-csvart modellben ($p = \frac{2}{7}$, $s = 0$, $q = 0$)

töltésű megoldás előállításához. Az (1.9) kváziperiodikus peremfeltétel tehát kizárja az összes egykink-megoldást, de például a lélegzők kielégítik $q = 0$ mellett, illetve bármely egész topológia töltésű megoldás a töltésének megfelelő q -val, legalábbis közelítőleg, ha $L \gg M_{\text{kl}}^{-1}$, ahol $M_{\text{kl}} = 8m/\beta^2$ a klasszikus kinktömeg.

1.5.2. Kvantumos részecskespektrum

Integrálhatósága okán végtelen térfogatban a kvantált sine–Gordon-modell a klasszikus szoliton- és lélegzőmegoldásoknak megfelelő részecskéket tartalmaz. Mivel az integrálhatóság a modell lokális tulajdonságaiból fakad, arra számíthatunk, hogy ezek a részecskék a kvantált k -csavart modellben is jelen lesznek. Természetesen az klasszikus megoldásokról írtak mintájára a \mathbb{D}_k szimmetria megköveteli a részecskék többszöröződését, vagyis egyetlen szoliton és antiszoliton részecske helyett k darab degenerált kink (és ugyanennyi antikink) részecskére számíthatunk, valamint a k különböző vákuumhoz tartozó k készletnyi $B_n^{(l)}$ lélegző részecskére is, melyek m_l tömegeit változatlanul az (1.4) kifejezés adja meg, az n vákuumindextől függetlenül. Ezeket a várakozásokat igazolja az 1.2. ábra, ahol egymáson látjuk a lélegzőtömegek elméleti értékeit és a TCSA-ból kapott első kilenc $\varepsilon_i \equiv \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_0$ relatív energiaszintet. \mathcal{E}_0 a TCSA-vákuum dimenziótlán energiája (vagyis az (1.32)-beli \hat{H} legkisebb sajátértéke),

amely pont az $s = 0$, $q = 0$ szektorban (zérus összipulzus és topológia töltés) fekszik, de az ábráról lehasztunk, mert $\varepsilon_0 \equiv 0$ miatt végig az l tengelyen haladna. Az ábrán jól látszik a lélegző részecskék duplázódása, továbbá feltűnő, hogy az első három lélegzőnek megfelelő egyrészecske-állapotok sokkal gyorsabban tartanak a végtelen térfogatú értékükhöz, mint a két $B^{(1)}$ -et tartalmazó ($2m_1$ aszimptotikájú) kétrészecske-állapotok.² Ennek magyarázata, hogy a fejezet elején részletezett okokból az egyrészecske-állapotok energiái csak $\mathcal{O}(e^{-l})$ -es végesméret-korrekciót kapnak, míg a több részecske-állapotok $\mathcal{O}(l^{-2})$ -est a részecskék saját impulzusából és a kölcsönös szórásából eredően.

Jelöljük az n és m vákuumok között interpoláló θ rapiditású kink vagy antikink részecskét $K_{n,m}(\theta)$ -val, és a megengedett

$$K_{i,j}(\theta_1) + K_{j,m}(\theta_2) \rightarrow K_{i,n}(\theta_2) + K_{n,m}(\theta_1) \quad \theta_1 > \theta_2 \quad (1.37)$$

szórás amplitúdóját $S_{i,m}^{j,n}(\theta_1 - \theta_2)$ -vel! A k -csavart sine–Gordon-modell $K_{n,m}$ kinkjeire $|n - m| = 1 \pmod k$. Könnyen felírhatjuk ezen kink szórások S-mátrixát [6]: a \mathbb{Z}_k szimmetria, valamint az idő- és tértükrözési invariancia következményeként $S_{i,m}^{j,n}(\theta)$ a rapiditáson túl csak az indexek különbségeitől függ, vagyis egyenlő az n -független $S_{n,n+2}^{n+1,n+1}(\theta)$, $S_{n,n}^{n+1,n+1}(\theta)$ vagy $S_{n,n}^{n+1,n-1}(\theta)$ amplitúdók valamelyikével. Ezek mindegyike független továbbá ϕ globális tulajdonságaitól, így a hagyományos sine–Gordon-modell szoliton-szoliton-, szoliton-antiszoliton reflexiós-, illetve szoliton-antiszoliton transzmissziós amplitúdójával egyenlő. Vizsgálatainkhoz az $S_{ss}(\theta)$ szoliton-szoliton amplitúdó explicit alakjára lesz szükségünk [9]:

$$S_{n,n+2}^{n+1,n+1}(\theta) = S_{ss}(\theta) = -e^{i\delta(\theta)} \quad \delta(\theta) = \int_0^\infty \frac{d\omega \sin(\theta\omega) \operatorname{sh} \left[\frac{\pi}{2}\omega(p-1) \right]}{\omega \operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{2}\omega \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\pi}{2}\omega p \right)}. \quad (1.38)$$

Teljesen analóg érveléssel kapjuk, hogy a

$$B_n^{(m)}(\theta_1) + K_{n,n+1}(\theta_2) \rightarrow K_{n,n+1}(\theta_2) + B_{n+1}^{(m)}(\theta_1) \quad \theta_1 > \theta_2 \quad (1.39)$$

szórást leíró $S_n^{(m)}(\theta_1 - \theta_2)$ amplitúdó a sine–Gordon-modell $S_s^{(m)}(\theta_1 - \theta_2)$ szoliton-lélegző amplitúdójával egyenlő:

$$S_n^{(m)}(\theta) = S_s^{(m)}(\theta) = \frac{\operatorname{sh} \theta + i \cos \frac{\pi m p}{2}}{\operatorname{sh} \theta - i \cos \frac{\pi m p}{2}} \prod_{l=1}^{m-1} \frac{\sin^2 \left(\frac{m-2l}{2} \pi p - \frac{\pi}{4} + i \frac{\theta}{2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{m-2l}{2} \pi p - \frac{\pi}{4} - i \frac{\theta}{2} \right)}. \quad (1.40)$$

1.5.3. Bethe–Yang-egyenletek

Hogy elméleti jóslatainkat a TCSA-eredményekkel összevethessük, szükségünk van a több részecske-állapotok energiájának kifejezésére L függvényében.

²A vonalak emelkedése $l \gtrsim 20$ után a növekvő TCSA-hibák következménye.

Ez egzakt módon is megtehető [17, 18, 19, 20], de mi egy egyszerűbb közelítő módszert használunk, mely világos kapcsolatban áll a modell részecskespektromával. Az alábbiakban terjedelmi okokból csak a módszer elvi vázlata és az eredmények szerepelnek, a konkrét formulák levezetése fellelhető az irodalomban [11].

Integrálható elméletekben a részecskeszám megmaradó mennyiség, ezért van értelme adott részecskeszámú szórásállapotokról beszélni, ha $L \gg M^{-1}$, vagyis a részecskék többnyire távol vannak egymástól. A modell spektrumát természetesen a *stacionárius* szórásállapotok adják, vagyis az olyan állapotok, melyek invariánsak a bennük szereplő részecskék kölcsönös szóródására. Most tekintsünk N darab kinket tartalmazó stacionárius szórásállapotokat, melyek rapiditásaik $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_N\}$ halmazával jellemezhetők (integrálható elmélet-ről lévén szó, a rapiditások megmaradnak, bár a szórások az egyes részecskék rapiditásait természetesen cseréltetik). Egy stacionárius állapot kifejezhető a megengedett kinkállapotok

$$|K_{n_1, n_2}(\theta_1) K_{n_2, n_3}(\theta_2) \dots K_{n_N, n_1}(\theta_N)\rangle \quad \theta_1 > \theta_2 > \dots > \theta_N \quad (1.41)$$

d_N darab *in*-állapota, mint bázis szerint; a kifejtési együtthatókat jelöljük $\psi^{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta})$ -val ($\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$ multiindex, $\boldsymbol{\theta}$ itt már szintén rendezett).

A kváziperiodikus határfeltétel miatt a $\psi^{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta})$ kifejtési együtthatók az

$$e^{iML \operatorname{sh} \theta_j} \sum_{\mathbf{n}} T_j(\boldsymbol{\theta})_{\mathbf{n}}^{\mathbf{m}} \psi^{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\theta}) = -\psi^{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}) \quad j = 1, \dots, N \quad (1.42)$$

egyenleteket elégítik ki, ahol

$$T_j(\boldsymbol{\theta})_{\mathbf{n}}^{\mathbf{m}} = \prod_{i=1}^N S_{m_i, n_{i+1}}^{n_i, m_{i+1}}(\theta_j - \theta_i) \quad (1.43)$$

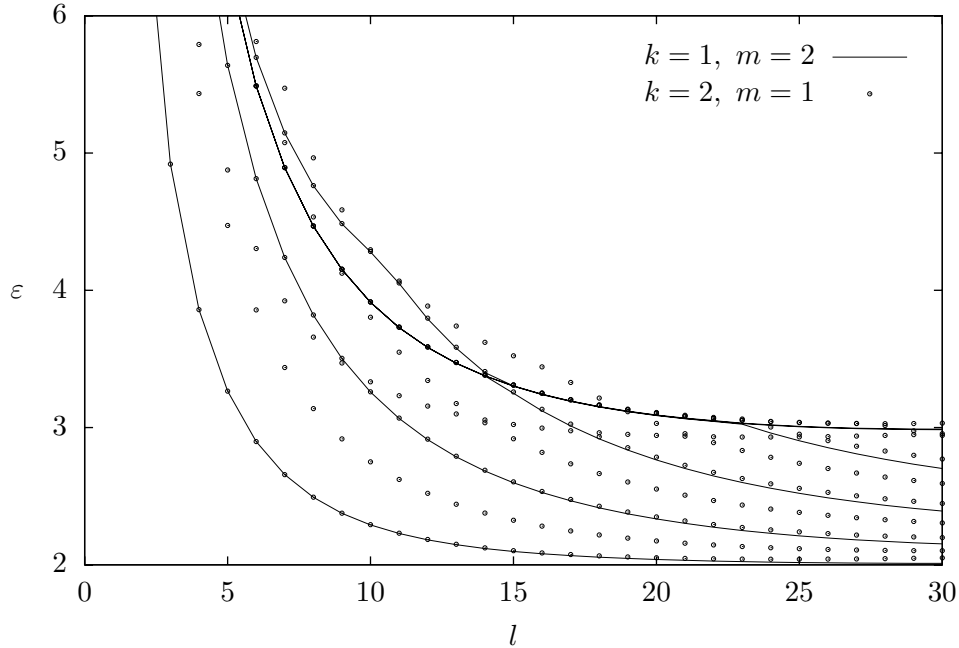
az *N-részecske transzfermátrix*. Rögzített L mellett az (1.42) egyenletrendszernek csak speciális $\boldsymbol{\theta}$ -ra van megoldása, és ezáltal megadja a keresett stacionárius szórásállapotokat, melyek teljes energiája és impulzusa

$$E = \sum_{j=1}^N M \operatorname{ch} \theta_j \quad P = \sum_{j=1}^N M \operatorname{sh} \theta_j \quad (1.44)$$

alakban írható fel. Megjegyzendő viszont, hogy míg P értéke minden véges térfogatra egzakt, addig E csak közelítést jelent, mert elhanyagoljuk az alagutazási- és a virtuális effektusokat.

A legegyszerűbb, két kinket tartalmazó stacionárius szórásállapotok dimenziótlanított energia-térfogat összefüggésére [11] alapján haladva az

$$(l, \varepsilon)(\theta) = \left(\frac{2\pi N - \delta(2\theta)}{\operatorname{sh} \theta}, 2 \operatorname{ch} \theta \right) \quad N \in \begin{cases} \mathbb{Z} + 1/2 & \text{szimm.} \\ \mathbb{Z} \setminus \{0\} & \text{antiszimm.} \end{cases} \quad (1.45)$$

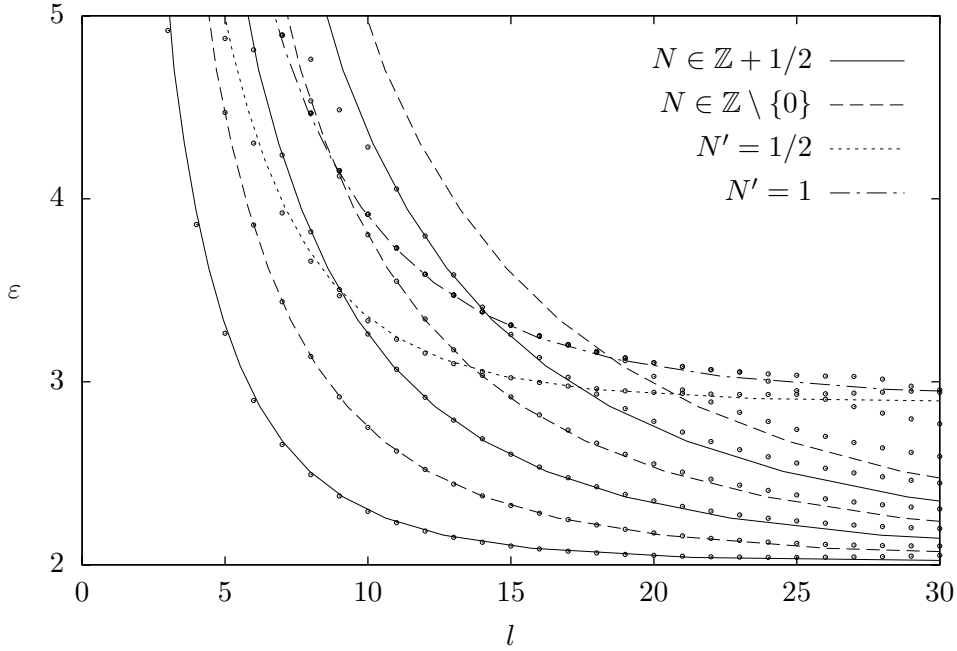


1.3. ábra. Hiányzó antiszimmetrikus állapotok ($p = \frac{2}{7}$, $s = 0$)

paraméteres kifejezést kapjuk szimmetrikus-, illetve antiszimmetrikus hullámfüggvény esetére. Ez utóbbi vonás rávilágít a 2-csavart sine-Gordon-modell 1 topológiai töltésű- és a csavaratlan sine-Gordon-modell 2 topológiai töltésű szektora közötti lényeges különbségre: a két kinkkel ellentétben a két szoliton hullámfüggvénye nem lehet antiszimmetrikus, lévén a szolitonok *azonos* bozonok. A szimmetrikus állapotok leírása viszont a két esetben ugyanazokra a formulákra vezet, így végeredményben a sine-Gordon-modell 2 topológiai töltésű szektora pontosan a csavart modell szimmetrikus kétkink-állapotaival azonos megjelenésű állapotokat tartalmaz, vagyis fele annyi állapotot, mint a csavart modell (1.3. ábra). (Ezen az ábrán kivételesen a folytonos vonalak is — interpolált — TCSA-adatokat jelölnek a könnyebb áttekinthetőség kedvéért.) Feltűnő módon minden második energiaszint csak a csavart modellben van jelen, és ez igaz a kétkink-állapotként nem értelmezhető (azokat elmetsző) szintekre is.³

Az 1.4. ábrán a folytonos vonalak már az (1.45) által paraméterezett görbék, míg a pontok továbbra is a 2-csavart modell 1 topológiai töltésű szektorának TCSA-adatai. Az imént említett, tiszta kétkink-állapotként nem értelmezhető vonalak nagy térfogatban $E \rightarrow 2M + m_1$ jellegű viselkedést mutatnak, ezért

³Az (1.45) paraméterezés nem engedi meg különböző N -ekhez tartozó vonalak kereszteződését.



1.4. ábra. Kétkink-állapotok

őket kézenfekvő két kinket és egy első lélegzőt tartalmazó állapotokként leírni. Az eltérő tömegek ($m_1 \neq M$) miatt erre a fent vázolt transzfermátrix módszer nem alkalmas, de közvetlen számolással a Bethe–Yang-egyenletek felírhatók [11], és végül a zérus összimpulzusú szektorban

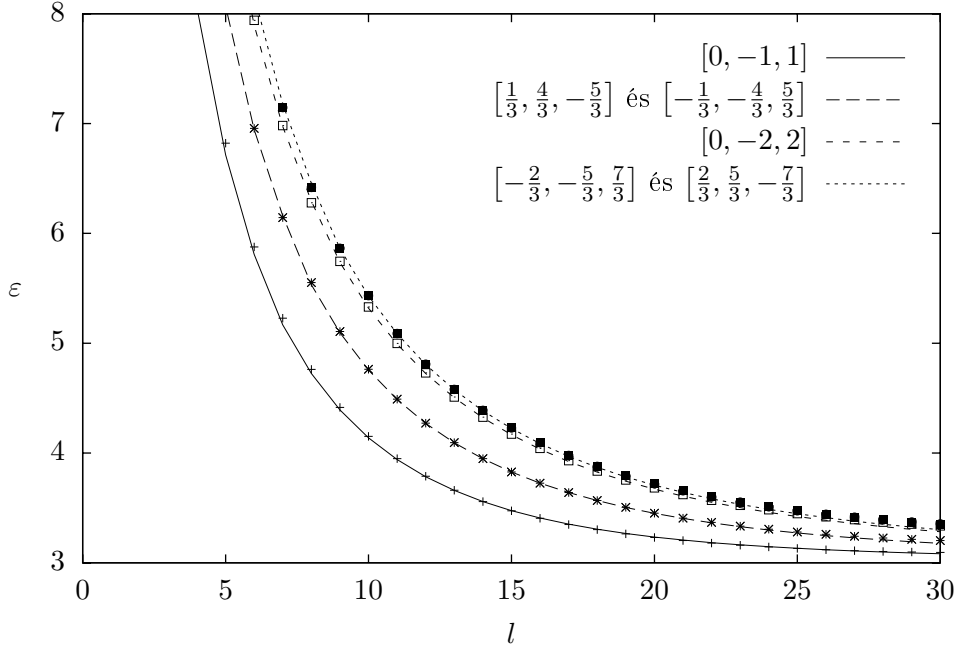
$$(l, \varepsilon)(\theta) = \left(\frac{2\pi N' - \delta(2\theta) - \alpha(\theta)}{\text{sh } \theta}, 2 \text{ch } \theta + \frac{m_1}{M} \right) \quad N' \in \begin{cases} \mathbb{Z} + 1/2 & \text{szimm.} \\ \mathbb{Z} \setminus \{0\} & \text{antisz.} \end{cases}$$

adódik az energiaszintek paraméteres kifejezésére. Az ebből kapott első két görbe már szerepel az 1.4. ábrán.

A 3-csavart modell 1 topológiai töltésű szektorában a transzfermátrix-módszer az

$$l \text{sh } \theta_i + \sum_{j \neq i}^3 \delta(\theta_i - \theta_j) = 2\pi \begin{cases} N_0^{(i)} \in \mathbb{Z} & \text{szimm.} \\ N_{\pm 1}^{(i)} \in \mathbb{Z} \pm 1/3 & \text{konjugált} \end{cases} \quad (1.46)$$

egyenletrendszerre vezet ($i = 1, 2, 3$ és $N_m^{(i)} \neq N_m^{(j)}$ ha $i \neq j$). A zérus összimpulzusú szimmetrikus állapotok $\theta_3 = -\theta_1$, $\theta_2 = 0$ speciális megoldásai itt is megadhatók paraméteres formában, de a többi esetben csak numerikus iteratív módszerrel kaphatjuk meg az energiaszintek térfogatfüggését. Az 1.5. ábrán látható, hogy a Bethe–Yang-egyenletek ismét kiválóan leírják a TCSA-adatokat, beleértve a konjugált megoldáspárok degenerációját is.



1.5. ábra. Háromkink-állapotok

1.6. Exponenciális terek vákuum-várhatóértékei

A sine-Gordon-modell exponenciális tereinek várható értékeire Lukyanov és Zamolodchikov adott explicit kifejezést [21]. Eredményük átültethető a csavart modellre is, és a TCSA-eredményekkel való összevetése ismét igazolja, hogy a sine-Gordon-modell lokális tulajdonságaiból fakadó állítások érvényesek maradnak a peremfeltétel megváltoztatása után is.

1.6.1. Szimmetriák

A k -csavart modellben a k darab vákuumállapotnak megfelelően a

$$\langle \vartheta_n | V_m | \vartheta_r \rangle$$

amplitúdók írják le az (1.20) szerint definiált exponenciális terek vákuum-várhatóérték-eit. Véges térfogatban a $|\vartheta_n\rangle$ vákuumállapotok degenerációja megszűnik ugyan, de a következő gondolatmenet ez nem befolyásolja.

T ismert hatásából a $|\vartheta_n\rangle$ állapotokon (1.16) és a V_m tereken (1.22) következik, hogy

$$\langle \vartheta_n | V_m | \vartheta_r \rangle = A_m^r \delta_{n,m+r} \quad \text{illetve} \quad \langle n | V_m | r \rangle = B_m^{r-n} e^{\frac{2\pi i}{k} mn}, \quad (1.47)$$

ahol (1.17) alapján bevezettük a

$$B_m^r = \langle 0 | V_m | r \rangle = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} e^{-\frac{2\pi i}{k} nr} A_m^n \quad (1.48)$$

jelölést. ϕ valósága miatt $V_m^\dagger = V_{-m}$, és ennél fogva

$$B_m^{r*} = e^{-\frac{2\pi i}{k} rm} B_{-m}^{-r}. \quad (1.49)$$

Másrészt az (1.19) transzformációs tulajdonságból következik, hogy

$$B_m^r = B_{-m}^{-r}, \quad (1.50)$$

ami lehetővé teszi, hogy B_m^r fázisát előjel erejéig meghatározzuk:

$$B_m^r = e^{\frac{\pi i}{k} rm} F_m^r, \quad \text{ahol } F_m^r \in \mathbb{R} \quad (1.51)$$

(F_m^r a négyzetgyökvonás kétértékűsége miatt már nem k -periodikus az r indexében, mint B_m^r volt). De még ezek az F_m^r valós amplitúdók sem mind függetlenek. Az UV szabad bozon szokásos (1.30) bázisában a $\mathcal{V}_{n,m}$ vertexoperátorok mátrixelemei valósak, és ennek következtében az (1.32) Hamilton-operátor valós szimmetrikus mátrixként reprezentálható, melynek sajátvektorai ismét csak valósak. Végeredményben tehát $\langle \vartheta_n | V_m | \vartheta_r \rangle \in \mathbb{R}$, azaz $A_m^r \in \mathbb{R}$, és emiatt

$$F_m^r = (-1)^m F_m^{k-r} \quad r = 1, \dots, k-1; \quad (1.52)$$

$F_m^0 = \langle 0 | V_m | 0 \rangle$ értékére nem kapunk feltételt. Az exponenciális terek vákuumvárhatóértékeit tehát az

$$F_m^r \quad r = 0, \dots, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \quad (1.53)$$

valós amplitúdókkal jellemezhetjük.

1.6.2. Véges térfogatú viselkedés

Az exponenciális tereket úgy normáljuk, hogy a nemeltűnő kétpontfüggvényeik rövid távolságú aszimptotikája

$$\langle 0 | e^{ia\phi(x)} e^{-ia\phi(y)} | 0 \rangle = \frac{1}{|x-y|^{2\Delta_a}} \quad (1.54)$$

legyen, ahol $\Delta_a = \frac{a^2}{8\pi}$ az $e^{ia\phi(x)}$ operátor konform súlya. Vezessük be a

$$\mathcal{G}(a) = \langle 0 | e^{ia\phi(x)} | 0 \rangle \quad (1.55)$$

jelölést; ekkor Lukyanov és Zamolodchikov [21] sejtése szerint⁴

$$\mathcal{G}(a) = \left[\frac{M\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{p+1}{p}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \right]^{\frac{a^2}{4\pi}} \times \exp \left\{ \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[\frac{\text{sh}^2\left(\frac{a\beta}{4\pi}t\right)}{2\text{sh}\left(\frac{p}{p+1}t\right)\text{sh}(t)\text{ch}\left(\frac{1}{p+1}t\right)} - \frac{a^2}{4\pi}e^{-2t} \right] \right\}, \quad (1.56)$$

amennyiben $\beta^2 < 8\pi$ és $|\Re a\beta| < 4\pi$; M a szolitontömeg.

Támaszkodva arra, hogy a ϕ tér lokális tulajdonságaitól függő mennyiségek nem változnak a peremfeltételek megváltozásával, $\mathcal{G}(a)$ -t azonosíthatjuk a végtelen térfogatban mért F_m^0 mennyiséggel:

$$\mathcal{G}\left(\frac{m\beta}{k}\right) = F_m^0, \quad \text{ha } l = ML = \infty. \quad (1.57)$$

TCSA-számításokból a $w = e^{\frac{2\pi}{L}(t+ix)}$ transzformációval a komplex síkra képezett $e^{ia\phi(w,\bar{w})}|_{|w|=1}$ operátor várható értékét tudjuk meghatározni a numerikus diagonalizálással kapott állapotokon l függvényében, azaz a síkon mért $A_m^n(l)$ -et. A $\mathcal{G}(a) = M^{2\Delta_a}g(a)$ dimenziótlanítás után

$$F_m^0(l) = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} A_m^n(l) = \left(\frac{l}{2\pi}\right)^{2\Delta_a} g(a)\mathcal{N}(l) \quad a = \frac{m\beta}{k} \quad (1.58)$$

módon hozhatók kapcsolatba a jósolt és a mérhető mennyiségek, ahol $\mathcal{N}(l) = 1 + \mathcal{O}(e^{-l})$ az alagutazási- és egyéb virtuális effektusokat tartalmazó végesméret-korrekciós faktor.

Az $F_m^{r \neq 0}$ amplitúdók végtelen térfogatban eltűnnek, mert a különböző $|n\rangle$ vákuumok a Hilbert-tér különböző szektoraiba esnek, melyek között lokális operátorok nem visznek át, így

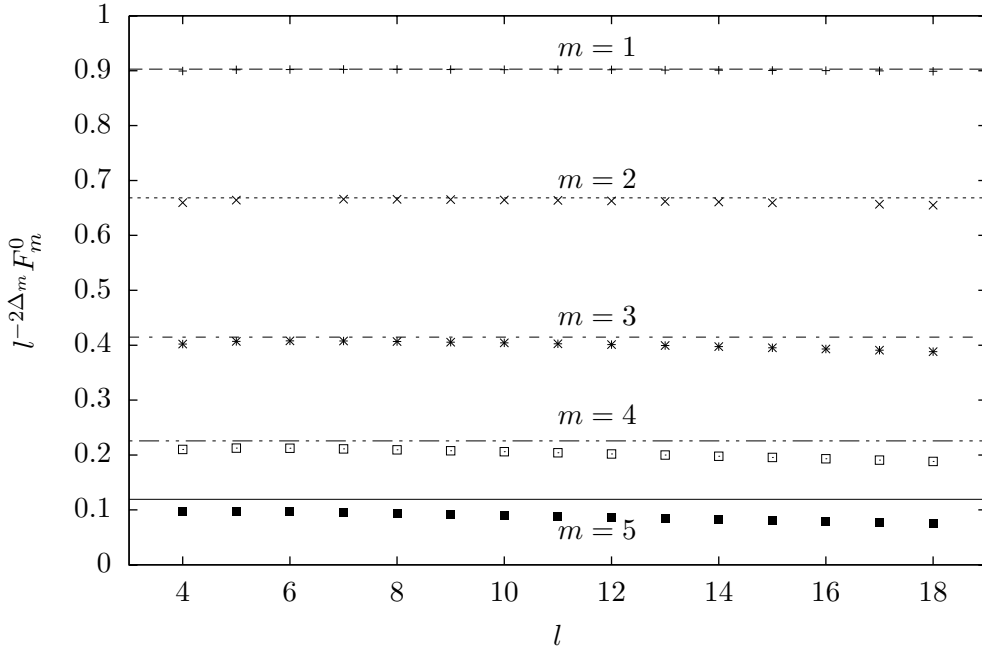
$$\langle 0 | V_m | r \neq 0 \rangle \rightarrow 0 \quad \text{ha } l \rightarrow \infty \quad (1.59)$$

Véges térfogatban az alagutazás szolgáltat nemeltűnő járulékot, mely insztantonmódszerrel számítható [11], nagy l esetén nagyságrendjére

$$\langle 0 | V_m | r \neq 0 \rangle = \mathcal{O}(e^{-l}) \quad (1.60)$$

adódik.

⁴A [21] cikkben a ϕ tér és a β csatolási állandó normálása a miénktől $\sqrt{8\pi}$ faktorialtér.



1.6. ábra. Vertexoperátorok vákuum-várhatóértékei

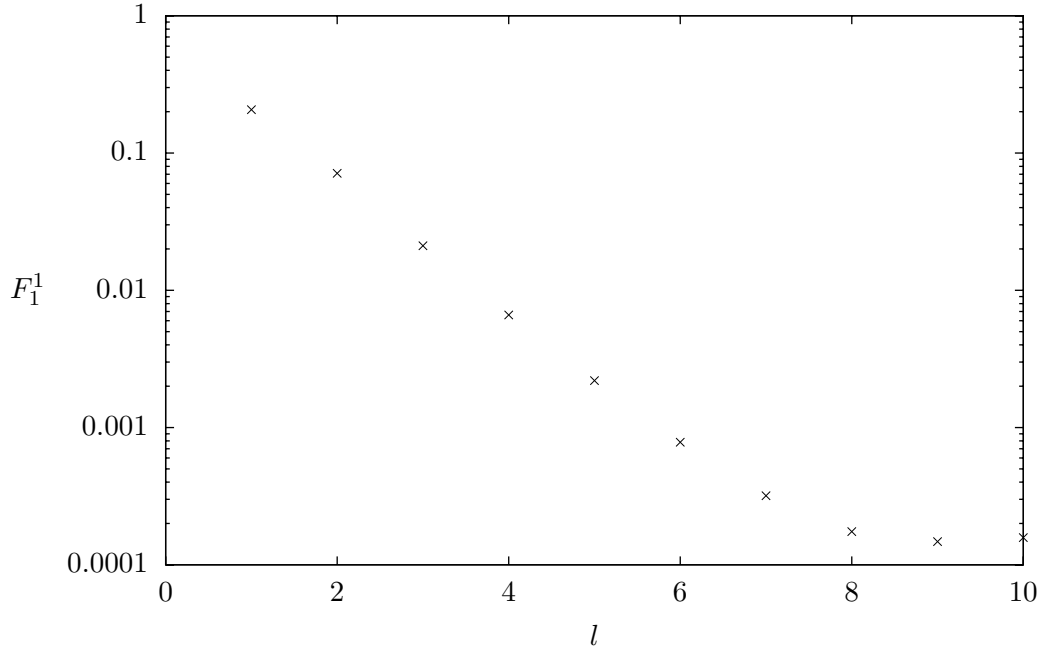
1.6.3. Összevetés a TCSA-eredményekkel

Az ellenőrzéseket $p = 2/7$ mellett a 3-csavart modellben végeztük el, ahol már öt vertexoperátor tesztelésére van mód, és a paraméterek minden esetben az (1.56) kifejezés érvényességi tartományába esnek. A felhasadt $|\vartheta_1\rangle, |\vartheta_2\rangle, |\vartheta_3\rangle$ állapotoknak megfelelő sajátvektorokból kiszámítottuk az $A_m^n(l)$ amplitúdókat ($m = 1, \dots, 5$), majd l függvényében ábrázoltuk az (1.58) átrendezéséből $\mathcal{N}(l)$ elhanyagolásával kapott

$$l^{-2\Delta_m} F_m^0(l) \approx (2\pi)^{-2\Delta_m} g \left(\frac{m\beta}{k} \right) \quad (1.61)$$

egyenlőség mindkét oldalát ($\Delta_m = \frac{m^2\beta^2}{8k^2\pi}$ a V_m operátor konform súlyát jelöli). A jobb oldal láthatóan térfogatfüggetlen, az 1.6. ábrán vízszintes egyenesek felelnek meg neki, míg a bal oldalt a TCSA-adatokból számított pontok reprezentálják. Kis m -ekre a mért értékek nagyon jól illeszkednek az elméleti jóslatra, nagyobbakra viszont következetesen a várt értékek alatt maradnak, ezért a finomabb analízis a TCSA-adatok extrapolálását igényli.

A 3-csavart modell azért is szerencsés választás, mert lehetővé teszi $F_m^1(l)$ vizsgálatát is. A mért értékek az 1.7. ábrán láthatóak, viselkedésük teljes összhangban áll a várt exponenciális lecsengéssel. Az $l \gtrsim 8$ fölötti kilaposodás a véges számábrázolási pontossággal magyarázható.

1.7. ábra. $F_1^1(l)$ exponenciális lecsengése

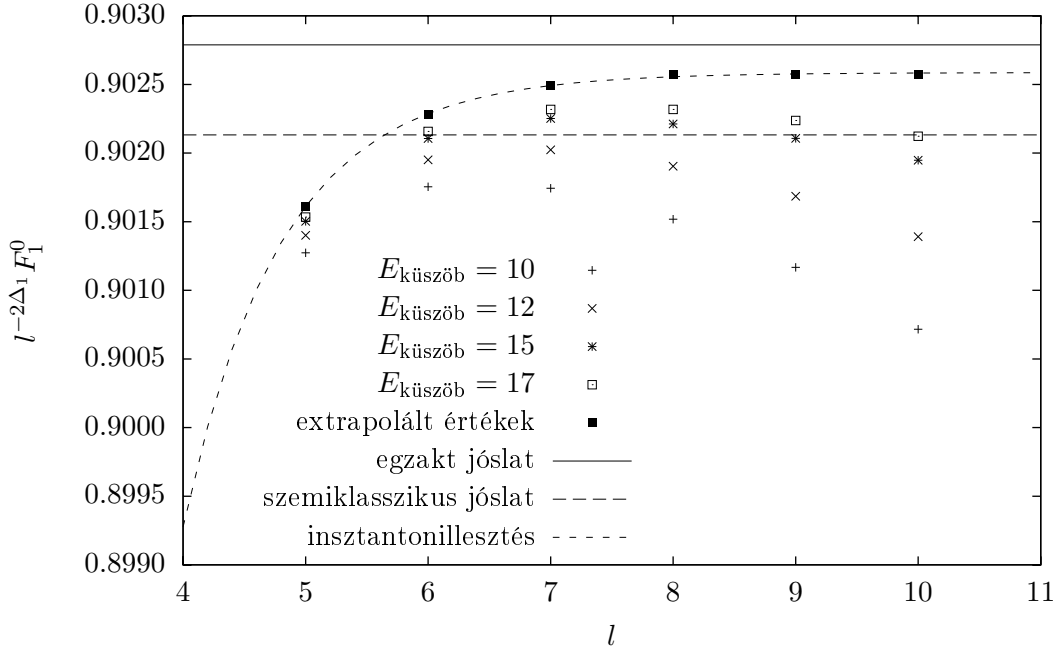
$\mathcal{G}(a)$ egzakt (1.56) kifejezése különféle — már ismert — határesetek közötti ügyes interpoláció eredménye [21]. Ezek egyike a szemiklasszikus határeset, és mivel numerikus vizsgálataink szintén a $p < 1$ tartományban történtek, feltehető a kérdés, hogy vajon különbséget tudnak-e tenni a szemiklasszikus és az egzakt formula között, konkrétan képesek-e az egzakt formulát igazolni a szemiklasszikus kifejezéssel szemben.

Ennek vizsgálata céljából az 1.8. ábrán kinagyítottuk az 1.6. ábra $m = 1$ vonalának környezetét, és rárajzoltuk a szemiklasszikus vákuumértéknek megfelelő vonalat, valamint több különböző $E_{\text{küszöb}}$ levágási energia mellett készült TCSA-mérés eredményét. Feltűnő, hogy bármely rögzített l esetén az adatok monoton nőnek $E_{\text{küszöb}}$ növelésével. A vákuumérték egzakt kifejezésének helyességét támasztja alá, hogy a TCSA-adatok egy tartományban határozottan meghaladják a szemiklasszikus számítással kapott értéket, miközben mindvégig az egzakt érték alatt maradnak. Hogy számszerűen is kifejezhessük ezt, a TCSA-adatok $E_{\text{küszöb}}$ -függésére minden l mellett numerikusan illesztettük az

$$a(l) \frac{E_{\text{küszöb}}^{2x_\beta} + c(l)}{E_{\text{küszöb}}^{2x_\beta} + b(l)} \quad x_\beta = 2 - 2\Delta_\beta \quad (1.62)$$

függvényt,⁵ és az 1.8. ábrán feltüntettük az $E_{\text{küszöb}} \rightarrow \infty$ extrapolált értékeket,

⁵Az illesztési formulát úgy választottuk, hogy monoton növekedést írjon le, $E_{\text{küszöb}}$ kite-



1.8. ábra. A szemiklasszikus és az egzakt vákuumértékek összehasonlítása

vagyis az $a(l)$ illesztési paraméter értékeit is. Az extrapolált értékek még inkább meghaladják a szemiklasszikus számítás eredményét (ami nem meglepő, hiszen az extrapolációs formulánk monoton), de továbbra is az egzakt érték alatt maradnak, miközben l függvényében is egyenletesebben növekvő viselkedést mutatnak (nagy l -ekre a TCSA-hibák ezt végül elrontják). Végül, felidézve az (1.58) felírásban szereplő $\mathcal{N}(l)$ végesméret-korrektíós faktort, az extrapolált pontokat ismét illesztettük az

$$A - B \frac{e^{-l}}{l} \quad (1.63)$$

függvényre, melyben az e^{-l} tényezőt az insztantonhatás, l^{-1} -t pedig a nullmódus nélküli fluktuációs determináns motiválja. Ez a függvény az extrapolált adatokat nagyon jól leírja, és bár az illesztésből kapott A érték még mindig kisebb a vákuumérték egzakt kifejezéséből kapottnál, a szemiklasszikustól jóval távolabb esik. Összefoglalásul kimondhatjuk, hogy adataink határozottan az egzakt formulát támogatják a szemiklasszikussal szemben, még ha számszerű ellenőrzéséhez nem is eléggé pontosak.

Fenti vizsgálatainkhoz hasonlók történtek már Virasoro-minimálmodellek $\Phi_{1,3}$ perturbációira [22]. Ezek a modellek a sine-Gordon-modell megszorítá-

vőjét pedig az motiválja, hogy $\mathcal{G}(a)$ elképzelt perturbált konform térelméleti (pCFT) kifejezésében az effektív kifejtési paraméter nem μ , hanem μ^2 lenne.

sai bizonyos racionális p értékek mellett, és ennek következtében lokális terek vákuum-várhatóértékeire (1.56) alapján speciális kifejezések vezethetők le. Az idézett munkával ellentétben azonban mi közvetlenül a (csavart) sine–Gordon-modellben végeztük el az összevetést.

A fenti eredmények további fontos vonatkozása, hogy a vákuum-várhatóértékeket megadó (1.56) sejtés levezethető egy másik, az ún. Liouville reflexiós faktorra vonatkozó sejtésből [23, 24]. Emiatt ellenőrzése közvetett módon támogatja az arra épülő megfontolásokat is.

1.7. Összefoglalás

Ebben a fejezetben a sine–Gordon-modell egy megváltoztatott peremfeltételű változatát vizsgáltuk véges térfogatban. Feltevésünk az volt, hogy a potenciál k periódus után történő azonosítása nem rontja el a sine–Gordon-modell integrálhatóságát, de a spektrumot jellegzetes módon megváltoztatja. Két nagyobb problémakört tekintettünk át, és a kapott eredmények egyöntetűen azt mutatják, hogy ez a feltevés helytálló. Először megmutattuk, hogy a k -függő degenerációk és a többrészecke-állapotok energiájának térfogatfüggése helyesen írható le a Klassen és Melzer által kifejlesztett [6] formalizmussal, miáltal áttételesen ellenőriztük az S-mátrixra vonatkozó sejtést is. Másodsorban megmértük az exponenciális terek várható értékét a k -csavart modell különböző vákuumaiban, és eredményeinkkel alátámasztottuk Lukyanov és Zamolodchikov [21] egzakt formuláját.

2. fejezet

A kétfrekvenciás sine–Gordon-modell

Az 1.1. fejezetben már említettük, hogy a sine–Gordon-modell, az integrálhatóságából fakadó elméleti érdekességén túl számos konkrét alkalmazásra is talált a fizika különböző területein, mint például az egydimenziós spinláncok kvantum-statisztikus mechanikája vagy a nemlineáris optika [25]. Az alkalmazások többségében azonban a sine–Gordon-modell csak közelítést jelent, mely a fizikai paraméterek terének kis tartományában érvényes csak; bizonyos jelenségek leírásához tovább periodikus potenciálok bevezetése szükséges. Példa erre a tömeges Schwinger-modell (azaz kétdimenziós kvantum-elektrodinamika) vagy az egyszerre hőmérsékleti- és mágneses operátorokkal is csatolt dupla Ising-modell, mely az Ashkin–Teller-modell egy általánosításának is tekinthető [25]. További példákkal szolgálnak az anizotróp mágneses folyadékokban terjedő spinhullámok és a rezonáns közegbe hatoló ultrarövid fényimpulzusok [26], vagy az egydimenziós Hubbard-modell [27].

Az így kapott modell elméleti szempontból is érdekes, mert az új potenciálg az integrálhatóság elrontása révén általánosabb viselkedést hoz magával, és ezáltal a *kétfrekvenciás* sine–Gordon-modell a nemperturbatív kvantumtérelméleti vizsgálatok realisztikusabb játékmodellje lehet, de mindeközben tanulmányozható és megérthető marad az integrálható elméletek körében kifejlesztett eszközökkel.

2.1. A modell definíciója

A kétfrekvenciás sine–Gordon-modellt az

$$\mathcal{A} = \int dt \int dx \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \mu \cos \beta \phi + \lambda \cos(\alpha \phi + \delta) \quad \phi : \mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.1)$$

hatással definiáljuk, ahol β és α a két frekvencia, δ a relatív fázis, λ és μ pedig dimenziós csatolási állandók, melyek egyikének nullára állításával a hagyományos sine–Gordon-modellt kapjuk vissza. Ennek megfelelően kvantumosan modellünk a $c = 1$ kompaktifikált szabad bozon dupla perturbációjának tekinthető; hatását

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{c=1} + \mathcal{A}_{\text{pert}} \quad (2.2)$$

alakban írva

$$\mathcal{A}_{c=1} = \frac{1}{2} \int dt \int dx \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \quad (2.3)$$

$$\mathcal{A}_{\text{pert}} = \frac{1}{2} \int dt \int dx (\mu V_\beta + \mu V_{-\beta} + \lambda e^{i\delta} V_\alpha + \lambda e^{-i\delta} V_{-\alpha}), \quad (2.4)$$

ahol a $V_\omega = e^{i\omega\phi}$ exponenciális terek (vertexoperátorok) az UV szabad bozon elmélet $\widehat{U(1)}_L \times \widehat{U(1)}_R$ Kac–Moody primér terei

$$\Delta_\omega = \frac{\omega^2}{8\pi} \quad (2.5)$$

jobb- és bal konform súlyokkal. A $\mu = 0$ modell M_α , és a $\lambda = 0$ modell M_β szolitontömegének segítségével a csatolási állandók

$$\mu = \kappa(\Delta_\beta) M_\beta^{2-2\Delta_\beta} \quad (2.6)$$

$$\lambda = \kappa(\Delta_\alpha) M_\alpha^{2-2\Delta_\alpha} \quad (2.7)$$

alakban dimenziótlaníthatók az (1.31) összefüggés alapján.

2.2. Alapvető tulajdonságok

A kétfrekvenciás sine–Gordon-modellről néhány alapvető megfigyelés már megtalálható az irodalomban [25], vizsgálatainkat ezek rövid felidézésével kezdjük.

- A perturbált konform térelméleti megfogalmazás közvetlen folyománya, hogy a perturbáló operátorok relevanciája megköveteli a

$$\beta^2 < 8\pi \quad \text{és} \quad \alpha^2 < 8\pi \quad (2.8)$$

feltételek kirovását.

- Továbbmenve, hogy renormálás után is kétfrekvenciás (nem pedig valamilyen többfrekvenciás) sine–Gordon-modellről beszélhessünk, minden divergencia eltüntethető kell legyen pusztán a μ és λ csatolási állandók

átdefiniálásával, további periodikus potenciálok hozzáadása nélkül. Ez a szigorú értelemben vett renormálhatóság fennáll, ha

$$\alpha\beta < 4\pi. \quad (2.9)$$

A továbbiakban mindig feltesszük a fenti egyenlőtlenségek teljesülését.

- A kétfrekvenciás modell nem integrálható, ami alátámasztható például azzal, hogy a *számlálóargumentum* [3] általános frekvencia- és csatolási állandó értékeknél nem biztosít magasabb spinű megmaradó mennyiségeket.
- A modell teljesen eltérő viselkedést mutat attól függően, hogy az α/β frekvenciaarány racionális vagy irracionális. Ha $\alpha/\beta = n/m$, ahol m és n relatív prím egészek, a $-\mu \cos \beta\phi - \lambda \cos(\alpha\phi + \delta)$ potenciál periodikus

$$\frac{2\pi n}{\beta} = \frac{2\pi m}{\alpha} \quad (2.10)$$

periódussal, és a ϕ térváltozó $2\pi/\beta$ alkalmas többszörösével történő eltolásával δ mindig átdefiniálható úgy, hogy

$$|\delta| \leq \frac{\pi}{n} \quad (2.11)$$

legyen. A potenciál periodicitásából következően a modell alapállapota végtelenszeresen degenerált és topologikus gerjesztéseket hordoz. $\lambda = 0$ esetben az elemi topologikus gerjesztés a megfelelő sine-Gordon-modell n -szoliton állapotába megy át, és hasonlóan, $\mu = 0$ esetén m -szoliton állapotba. A csatolások általános értékénél a szolitonok mintegy „bezáródnak” ezekbe az összetett objektumokba.

$\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$ esetén viszont a potenciál nem periodikus, nincsenek topologikus gerjesztések és az alapállapot nem degenerált [25]. (2.11) alapján az is valószínűsíthető, hogy δ ebben az esetben nem játszik szerepet a modell dinamikájában. Ez az eset már kvantummechanikai problémaként (helyfüggetlen ϕ mellett) is rendkívül bonyolult. Látni fogjuk továbbá, hogy a TCSA sem alkalmazható rá, mert tetszőleges levágási energia alatt végtelen sok állapotot tartalmaz. Egyéb nemperturbatív vizsgálati módszer hiányában a továbbiakban a racionális esetre korlátozódunk, bár a 2.5. fejezetben levezetett perturbatív eredmények érvényesek irracionális frekvenciaarány esetén is.

2.3. Klasszikus analízis

Tudván, hogy a sine–Gordon-modellre a kvantummechanikai szemiklasszikus közelítés egzakt eredményekkel szolgál [9], számíthatunk rá, hogy a kétfrekvenciás modellben is jól vezetí majd intuíciónkat a klasszikus potenciálkép. Ezért a kvantumelméleti vizsgálatok előtt levezetünk pár klasszikus formulát az $\alpha/\beta = 1/2$ legegyszerűbb esetben, vagyis

$$U(\phi) = -\mu \cos \beta\phi - \lambda \cos \left(\frac{\beta}{2}\phi + \delta \right) \quad (2.12)$$

potenciál mellett. Ekkor (2.10) $n = 2$ és $m = 1$ mellett a térváltozó

$$\phi \sim \phi + \frac{2\pi n}{\beta}l = \phi + \frac{4\pi}{\beta}l \quad l \in \mathbb{N} \quad (2.13)$$

azonosításait engedi meg, ahol $l \neq 1$ az 1. fejezetben tárgyaltakhoz hasonlóan *csavart* kétfrekvenciás modellekhez vezetne. Erre a komplikációra most nincs szükségünk, ezért $l = 1$ -et választunk, de mindazonáltal a csavart sine–Gordon-modell szerepet kap majd vizsgálatainkban, adott esetben mint a $\lambda = 0$ határesethez tartozó 2-csavart modell.¹

2.3.1. Vákuumfelhasadás

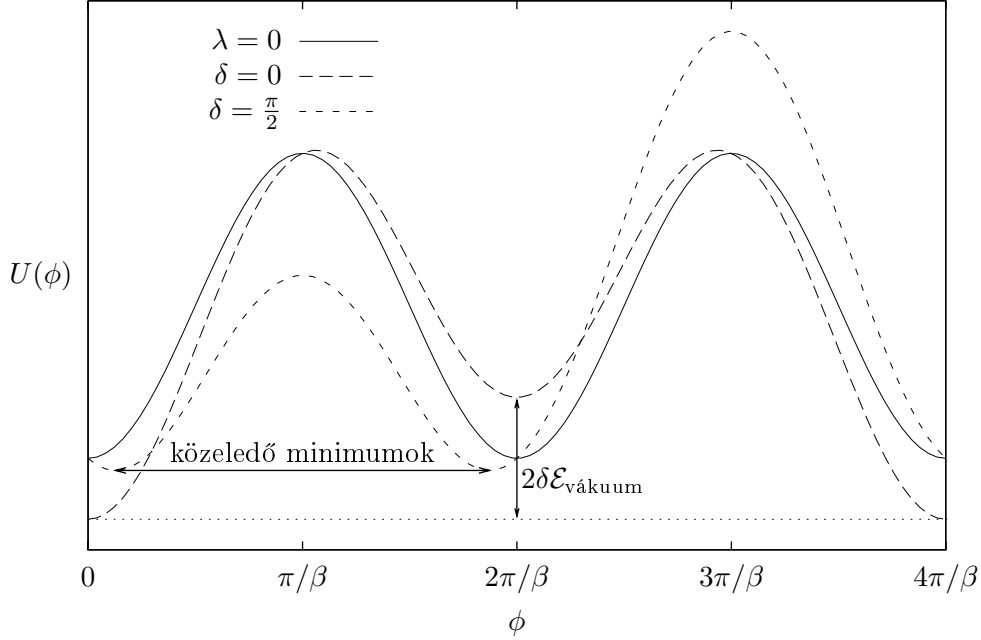
$\lambda = 0$ esetben tehát két degenerált vákuumunk van, melyek a 2.1. ábrán látható módon mozdulnak el $\lambda > 0$ és két jellegzetes δ választása esetén.

- Ha $\delta = 0$, a minimumok nem mozdulnak el a 0 és a $2\pi/\beta$ helyekről, ezért a fellépő különbség (2.12) második tagjának ezen helyeken vett helyettesítési értékeinek különbsége: $\lambda - (-\lambda) = 2\lambda$.
- Ha $\delta = \pi/2$, akkor a $\lambda < 4\mu$ feltétel mellett (vagyis amíg két minimum van) mindkét minimum ugyanazzal a $-\frac{\lambda^2}{8\mu}$ értékkel mozdul el, vagyis a különbség 0.
- Köztes δ értékek esetén az egyenletek nem oldhatók meg egzaktul; λ kicsinységét feltételezve első rendben a vákuumenergia-sűrűség megváltozására a

$$2\delta e_{\text{vákuum}} = 2\lambda \cos \delta \quad (2.14)$$

kifejezést kapjuk, mely határesetben előállítja az előző két eredményt.

¹A fenti azonosítást $l = 1$ mellett összevetve az (1.8) előírással a $k = n = 2$ csavarodási szám azonnal leolvasható.



2.1. ábra. Az $n = 2, m = 1$ potenciál

Már ebből a naiv analízisből is látszik, hogy tetszőlegesen kis λ perturbáció is minőségi változást idézhet elő a modell spektrumában. Ha az energia nullpontját a megszokott módon az alacsonyabban fekvő vákuumhoz rögzítjük, véges L térfogatban a magasabb vákuum $L2\delta e_{\text{vákuum}}$ energiával fog rendelkezni, végtelen térfogatban pedig eltűnik a spektrumból.

2.3.2. Szolitonbezárás

Mint fent említettük, a $\lambda = 0$ határesetben egy 2-csavart sine–Gordon-modell áll előttünk, melyben az 1.5.1. fejezetben tárgyaltak szerint a peremfeltétel páros sok kink jelenlétét engedi meg. Tekintsük most a

$$K_{1,2}(x_1)\bar{K}_{2,1}(x_2) \quad x_1 < x_2 \quad (2.15)$$

kink-antikink megoldást! Nagy térfogatban a kinkek általában messze vannak egymástól és (1.34) alakjuk lépcsős függvénnyel közelíthető. Ezek után azt látjuk, hogy a fenti megoldás $(-\infty, x_1)$ tartományában a térváltozó az első vákuumban ül, az (x_1, x_2) tartományban a másodikban, az (x_2, ∞) tartományban pedig ismét az elsőben. Amíg a két vákuum degenerált, addig ez egy 0 energiás konfiguráció a lépcsősfüggvény-közelítésben. Ha azonban a degeneráció megszűnik, ugyanennek a konfigurációnak $(x_2 - x_1)2\delta e_{\text{vákuum}}$ energiája lesz a fent

mondottak alapján. Pontosan ugyanez elmondható akkor is, ha a két részecskét megcseréljük: a csere a

$$\bar{K}_{1,2}(x_2)K_{2,1}(x_1) \quad x_2 < x_1 \quad (2.16)$$

konfigurációra vezet. Végeredményben azt látjuk, hogy a perturbáció bekapcsolásával a két részecske között

$$U(x) = |x|2\delta e_{\text{vákuum}} \quad x = x_1 - x_2 \quad (2.17)$$

lineáris potenciál indukálódott. A részletes tárgyalás [25] eredménye:

$$U_{\text{ss}}(x) = 2\lambda \cos \delta \sin^2 \left(\frac{\alpha}{\beta} \pi \right) \left[|x| - \text{tg } \delta \text{ctg} \left(\frac{\alpha}{\beta} \pi \right) x \right]. \quad (2.18)$$

A fenti $U_{\text{ss}}(x)$ potenciál a paraméterek értékétől függően lehet bezáró vagy nem bezáró. Az első tag (2.11) miatt sohasem taszító, tehát ha a második tag együtthatója abszolút értékben kisebb 1-nél, bezáró potenciált kapunk. $\delta = 0$ esetén mindig ez a helyzet, $\delta = \pi/2$ -nél soha. Ez megfelel a vákuumenergiák eltolódására kapott korábbi eredményeinknek: $\delta = \pi/2$ esetén a degeneráció megmarad, így a fenti érvelés nem alkalmazható.

2.3.3. Lélegzőtömegek

Az elemi sine–Gordon-tér az első lélegző kvantumterével azonosítható [9], így annak tömegét a klasszikus potenciálképben definiálhatjuk a potenciálmínimumban számított második derivált négyzetgyökével. A magasabb lélegzők tömegeire hasonló becslés nem áll rendelkezésünkre.

- Ha $\delta = 0$, a tömegkorrekció kizárólag (2.12) második tagjából adódik: $\delta m^2 = \pm \lambda \beta^2 / 4$ a két minimumban.
- Ha $\delta = \pi/2$, akkor azonos $\delta m^2 = -\lambda^2 \frac{\beta^2}{16\mu}$ másodrendű korrekciókat kapunk a minimumok szimmetriája miatt.
- Általános δ értékekre $\lambda/\mu \ll 1$ feltételezésével második rendig a

$$\delta m^2 = \lambda \frac{\beta^2}{4} \cos \delta - \lambda^2 \frac{\beta^2}{16\mu} \sin^2 \delta \quad (2.19)$$

eredményt kapjuk, mely összhangban áll az előző két speciális esettel.

2.3.4. Fázisátalakulás

A 2.3.1. fejezetben a vákuumfelhasadás vizsgálatakor már említésre került, hogy $\delta = \pi/2$ mellett klasszikusan $\lambda < 4\mu$ a feltétele annak, hogy a λ növelésével egymáshoz közeledő két minimum (2.1. ábra) még ne érjen össze. $\lambda = 4\mu$ -nél a két minimum éppen egybeesik, vagyis a köztük levő púp kisimul; matematikailag ez a második derivált nullává válását jelenti a minimum helyén. Ez viszont a 2.3.3. fejezetben elmondottak alapján az első lélegző tömegének nullává válásával egyenértékű. Két dolgot látunk tehát: a vákuumszerkezet átalakulását (hiszen kettő helyett λ további növelésével már csak egy minimuma marad a (2.12) potenciálnak) és a korrelációs hossz végtelenné válását (tömegtelen részecske megjelenése tipikusan ennek felel meg). Ezek *másodrendű fázisátalakulás* végbemenetelére utaló jelek.

Kicsit többet is mondhatunk ennél, tekintettel arra, hogy a fázisátalakulás közelében a potenciál közelítőleg

$$A\phi^2 + B\phi^4 \quad (2.20)$$

alakú. Tudjuk ugyanis, hogy a ϕ^4 -elmélet fázisátalakulása az Ising univerzalizációs osztályba tartozik, tehát a kétfrekvenciás sine–Gordon-modellben is ilyen várhatunk maximális $\delta = \pi/n$ esetén, mert ekkor a perturbáció szimmetrikus: két szomszédos vákuumot degeneráltan hagy [25].

2.4. Csonkított konform tér

A TCSA kétfrekvenciás sine–Gordon-modellre való alkalmazásakor nagyban támaszkodhatunk az 1.3–1.4. fejezetekben leírtakra, hiszen bármely potenciáltag kikapcsolásával egy-egy csavart sine–Gordon-modell áll elénk, vagy másképpen: a (2.3) $c = 1$ szabad bozon elméletet most duplán perturbáljuk, két különböző frekvenciájú, de azonos típusú periodikus potenciállal.

2.4.1. Operátortartalom

A legelső szempont, hogy a $V_{\pm\alpha}$ és $V_{\pm\beta}$ perturbáló operátorok a kiinduló $c = 1$ elméletben lokális operátoroknak feleljenek meg. A (2.3) szabad tagnak megfelelő (1.23) kompaktifikált szabad bozon elméletének operátorspektrumát a $\mathcal{V}_{n,m}$ vertexoperátorok konform családjai alkotják; a primér terek konform súlyait az (1.26) adja meg. A kompaktifikációs sugárra (2.10) valamint ϕ és χ eltérő normálásának figyelembevételével

$$r = k \frac{\sqrt{4\pi n}}{\beta} = k \frac{\sqrt{4\pi m}}{\alpha} \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.21)$$

adódik, ahol k az 1. fejezetben tárgyalt csavarodási szám lenne, ezúttal a kétfrekvenciás sine–Gordon-modellre vonatkoztatva. Az ebből eredő jelenségek vizsgálata nem célunk, ezért $k = 1$ -et választunk, ami a

$$\phi \sim \phi + \frac{2\pi n}{\beta} = \phi + \frac{2\pi m}{\alpha} \quad (2.22)$$

(egy periódus után történő) azonosításnak felel meg. A $\lambda = 0$ határesetben ennek ellenére egy n -csavart, a $\mu = 0$ határesetben pedig egy m -csavart sine–Gordon-modellt kapunk vissza, ami fontos szerepet játszik a kétfrekvenciás modell dinamikájában. Végeredményben tehát a perturbáló operátorainkat

$$V_{\pm\beta} \equiv \mathcal{V}_{\pm n,0} \quad V_{\pm\alpha} \equiv \mathcal{V}_{\pm m,0} \quad (2.23)$$

módon azonosíthatjuk. Ezzel egyúttal letettük a garast az (1.28a) bozonikus operátorrács használata mellett is; ez teljesen elégséges a vákuumszektor vizsgálatához, ezért a fermionikus választást a továbbiakban nem tárgyaljuk. A Hilbert-teret ugyanúgy az (1.30) Fock-terekből építjük fel, mint a k -csavart modell esetében.

Itt érdemes megjegyezni, hogy az irracionális frekvenciaarány esete felfogható $n, m \rightarrow \infty$ határesetként is. Ekkor a kétfrekvenciás modell Hilbert-tere egy nem kompaktifikált UV szabad bozoné (hiszen $r \rightarrow \infty$), amit folytonosan sok $\mathcal{V}_{\omega,0}$ ($\omega \in \mathbb{R}$) primér tér épít fel, $\Delta_{\omega}^{\pm} = \omega^2/2$ konform súlyokkal. Ebből következően a TCSA nem alkalmazható rá, mert tetszőleges energiakorlát alatt folytonosan végtelen sok állapot található a Hilbert-térben.

2.4.2. Hamilton-operátor

A rendszert véges térfogatban, egy L kerületű hengeren vizsgáljuk, vagyis a (2.22) azonosításnak megfelelően a

$$\phi(x + L) = \phi(x) + \frac{2\pi n}{\beta} q \quad q \in \mathbb{Z} \quad (2.24)$$

kváziperiodikus határfeltételt rójuk ki rá. A q csavarodási szám, ami az elmélet különböző szektorait címkézi, a teljes perturbált CFT egy megmaradó topológiai töltése. A következőekben vizsgált problémákról minden szükséges információt tartalmaz, és ezért számunkra elegendő a $q = 0$ szektor vizsgálata. A vákuumot tartalmazó szektorban továbbá minden állapot $L_0 - \bar{L}_0$ Lorentz-spinje is nulla.

A numerikus számításokhoz szükséges, hogy egységet válasszuk, melyben az energiákat és a távolságokat mérni kívánjuk. Két természetes választás is adódik: az M_{α} és az M_{β} szolitontömeg. Mindkettő egyformán rossz választás, ha közös numerikus keretben kívánjuk kezelni a teljes paramétertartományt,

hiszen csak egy-egy határesetben jelentenek természetes egységet, a másokban szingulárisak. Célszerűbb bevezetni az

$$M = \frac{M_\beta \mu^{x_\alpha} + M_\alpha \lambda^{x_\beta}}{\mu^{x_\alpha} + \lambda^{x_\beta}} \quad x_\omega = 2 - 2\Delta_\omega \quad (2.25)$$

interpoláló tömegskálát és a csatolási állandók

$$\eta = \frac{\lambda^{x_\beta}}{\mu^{x_\alpha} + \lambda^{x_\beta}} \in [0; 1] \quad (2.26)$$

dimenziótlan kombinációját. E paraméterezés előnye, hogy M simán megy át az $\eta = 0$ és $\eta = 1$ határeseteknek megfelelő csavart sine–Gordon-modellek M_β és M_α tömegskálái között, és a paramétertartomány mindkét végén természetes skálát jelent. Bevezetve a

$$D = \frac{(1 - \eta)^{1 + \frac{1}{x_\alpha x_\beta}}}{\kappa(\Delta_\beta)^{1/x_\beta}} + \frac{\eta^{1 + \frac{1}{x_\alpha x_\beta}}}{\kappa(\Delta_\alpha)^{1/x_\alpha}} \quad (2.27)$$

jelölést, a csatolási állandók

$$\mu = \frac{M^{x_\beta} (1 - \eta)^{1/x_\alpha}}{D^{x_\beta}} \quad \lambda = \frac{M^{x_\alpha} \eta^{1/x_\beta}}{D^{x_\alpha}} \quad (2.28)$$

alakban dimenziótlaníthatók, és a dimenziótlan Hamilton-operátor a

$$\hat{H} = \frac{H}{M} = \frac{2\pi}{l} \left\{ H_{\text{CFT}} + \frac{(1 - \eta)^{1/x_\alpha}}{2(2\pi)^{x_\beta - 1}} \left(\frac{l}{D} \right)^{x_\beta} [\mathcal{V}_{n,0}(1, 1) + \mathcal{V}_{-n,0}(1, 1)] + \right. \\ \left. + \frac{\eta^{1/x_\beta}}{2(2\pi)^{x_\alpha - 1}} \left(\frac{l}{D} \right)^{x_\alpha} [e^{i\delta} \mathcal{V}_{m,0}(1, 1) + e^{-i\delta} \mathcal{V}_{-m,0}(1, 1)] \right\} \quad (2.29)$$

alakot veszi fel, ahol $l = ML$ a dimenziótlan térfogat. \hat{H} valamilyen Ψ állapothoz tartozó sajátértékét, mint a térfogat függvényét $\mathcal{E}_\Psi(l)$ -lel jelöljük, vagyis $E_\Psi(L) = M\mathcal{E}_\Psi(ML)$. Ez többnyire pusztán sorszámozást fog jelenteni:

$$\mathcal{E}_0(l) \leq \mathcal{E}_1(l) \leq \mathcal{E}_2(l) \leq \dots \quad (2.30)$$

A rövidesen következő perturbatív formulák természetes módon a perturbálatlan elmélet (valamelyik csavart sine–Gordon-modell) tömegskálájával fogalmazhatók meg, ezért a TCSA-eredményekkel való összevetésük előtt kompenzálni kell a tömegegységek különbségét. Ez a (2.25) egységválasztás valamelyes hátránya, de ne felejtjük el, hogy csak az egyik oldalon tudnánk eltüntetni ezt a problémát, a másikon mindenképpen átskálázásra vagy másik numerikus program használatára lenne szükség. Tapasztalataink szerint bőven ellensúlyozza ezt a kis kényelmetlenséget, hogy a teljes η intervallumot egyetlen programmal tudjuk letapogatni, ezáltal adataink mindig egyöntetű módon használhatók, és a számítások során nem bukkannak fel „nagy” számok, melyek numerikus instabilitásokat okozhatnának.

2.5. Formfaktor-perturbációszámítás

Numerikus TCSA-eredményeinket *formfaktor-perturbációszámításból* [28] származó analitikus formulákkal fogjuk összevetni. Ha a kétféle megközelítés eredményei a közös érvényességi tartományukban összhangban vannak, az egyrészt számításaink ellenőrzéséül szolgál, másrészt lehetővé teszi ez egyes módszerek pontosságának felmérését, miáltal megfelelően értékelhetjük azokat az eredményeket is, melyeket pusztán az egyik módszer alkalmazásával kaptunk. A módszer bemutatása a B appendixben olvasható, alább csak a szükséges konkrét formulák bevezetésére szorítkozunk. Az áttekinthetőség érdekében a kvantumelméleti várható értékek jelöléséből **elhagyjuk** az appendixben még szereplő 0 indexeket.

A kétfrekvenciás sine–Gordon-modell a két koszinuszos potenciálg tag szerepének felcserélhetősége miatt két perturbatív tartománnyal rendelkezik. A következő számolásokban az α frekvenciájú tagot tekintjük perturbációnak, de a ϕ térváltozó alkalmas eltolásával és a δ fázistolás átdefiniálásával eredményeinkből egyszerűen megkaphatók a másik tartományban használható formulák is.

A (B.16) felbontásban \mathcal{A}_{CFT} a $c = 1$ szabad bozon elmélet, melyből a $\Phi(x) = : \cos \beta \phi :$ integrálható perturbációval egy csavart sine–Gordon-modellt állítunk elő. Ezt perturbáljuk tovább (B.1) mintájára a $\Psi(x) = : \cos(\alpha \phi + \delta) :$ operátorral (a konform térelméleti vertexoperátorok nyelvén mindez (2.4) hozzáadását jelenti). Ez a második perturbáció már a nem integrálható kétfrekvenciás elméletre vezet, de a formfaktor-perturbációszámítás alkalmazásának feltételei adottak, mert a kiinduló — M_β szolitontömegű — modell szükséges formfaktorai kiszámíthatóak.

A (B.14) formulából (B.11) és (B.12) teljesülését megkövetelve a

$$\delta e_{\text{vákuum}} = \lambda \langle 0 | \Psi | 0 \rangle \quad (2.31)$$

$$\delta M_{ba}^2 = 2\lambda F_{ba}^\Psi(i\pi, 0) \delta_{m_a, m_b} \quad (2.32)$$

kifejezéseket kapjuk λ rendben² az ellentagokra [28], feltéve, hogy az eredeti tömegmátrix

$$M_{ba}^2 = m_a^2 \delta_{a,b} \quad (2.33)$$

alakú volt. Ezek felhasználásával felírható az S-mátrix-korrekción is, csak arra kell vigyázni, hogy a részecsketömegek megváltozása miatt a rapiditásokat is transzformálni kell az impulzus állandónak tartásához. Látjuk, hogy az ellentagok kiesnek a „nemösszefüggő tagokkal”, és végeredményben a

$$\delta S_{ab}^{cd}(\theta) = -i\lambda \frac{F_{\bar{c}dab}^\Psi(i\pi, \theta + i\pi, 0, \theta)}{m_a m_b \text{sh } \theta} \quad \theta = \theta_a - \theta_b \quad (2.34)$$

²Magasabb rendekben a formfaktor-perturbációszámítás technikai és koncepcionális szempontból is problémás a fellépő UV divergenciák miatt [29].

általános formulát kapjuk.

2.5.1. Vákuumenergia-sűrűségek

Az 1.2. fejezetben láttuk, hogy az \mathcal{A}_0 n -csavart modell (igazítva (1.11) jelölésein) n darab

$$\langle k | \phi(x) | k \rangle = \frac{2\pi}{\beta} k \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (2.35)$$

tulajdonságú vákuummal rendelkezik, és a különböző vákuumok között lokális operátornak nincs mátrixeleme. Ezért minden egyes $|k\rangle$ vákuumállapotra külön-külön alkalmazhatók a perturbatív formulák, és ez igaz a hozzájuk tartozó gerjesztett állapotokra, például a rájuk épülő lélegzőkre is.

Az 1.6.1. fejezetben tárgyaltak, és különösen (1.47) alapján írhatjuk, hogy

$$\langle k | V_\alpha | k \rangle = e^{\frac{2\pi i \alpha}{\beta} k} \langle 0 | V_\alpha | 0 \rangle = e^{\frac{2\pi i \alpha}{\beta} k} \mathcal{G}(\alpha), \quad (2.36)$$

amiből (2.31) általánosításával a $|k\rangle$ vákuum energiakorrekciójára (2.4) miatt

$$\delta e_k = -\lambda \mathcal{G}(\alpha) \cos\left(\frac{2\pi\alpha}{\beta} k + \delta\right) \quad (2.37)$$

adódik. Látható, hogy az \mathcal{A} kétfrekvenciás modellnek csak egy stabil vákuuma marad, a magasabban fekvők metastabil, bomló állapotokká válnak.

Megjegyzendő, hogy hasonló eredmény kapható az

$$U(\phi) = -\mu \cos \beta \phi - \lambda \cos(\alpha \phi + \delta) \quad (2.38)$$

klasszikus potenciál viselkedésének vizsgálatából is. $\lambda = 0$ mellett a potenciál a

$$\phi_k^{(0)} = \frac{2\pi k}{\beta} \quad \text{helyeken} \quad U(\phi_k^{(0)}) = -\mu \quad (2.39)$$

minimumokkal rendelkezik. Kis λ mellett a minimumhelyek

$$\phi_k = \phi_k^{(0)} + \delta \phi_k \quad \delta \phi_k = -\lambda \frac{\alpha}{\mu \beta^2} \sin\left(\frac{2\pi\alpha}{\beta} k + \delta\right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (2.40)$$

eltolódást szenvednek, és az új minimumhelyeken a potenciál értéke

$$U(\phi_k) = -\mu - \lambda \cos\left(\frac{2\pi\alpha}{\beta} k + \delta\right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (2.41)$$

lesz. A klasszikus vákuumenergia-korrekciónak tehát

$$\delta e_k^{\text{klasszikus}} = -\lambda \cos\left(\frac{2\pi\alpha}{\beta} k + \delta\right), \quad (2.42)$$

ami egyrészt visszaadja a (2.14) kifejezést az ott tárgyalt speciális esetben, másrészt pontosan (2.37) klasszikus határesetre, hiszen $\mathcal{G}(\alpha)$ explicit (1.56) alakjából könnyen megmutatható, hogy $\mathcal{G}(\alpha) \rightarrow 1$ ha $\beta \rightarrow 0$, miközben α/β rögzített.

2.5.2. Lélegzőtömegek

Az első és a második lélegző m_1 , illetve m_2 tömegének korrekcióit számoljuk. (1.4) alapján írhatjuk, hogy

$$\delta m_l = \frac{\delta m_l^2}{2m_l} = \frac{\delta m_l^2}{2M_\beta \sin \frac{p\pi l}{2}}, \quad (2.43)$$

ahol M_β továbbra is a perturbálatlan ($\lambda = 0$) elmélet szolitontömege. Valójában az 1.5.2. fejezetben mondottak szerint minden lélegzőtípusból n példány létezik, melyek tömegdegenerációját a perturbáció bekapcsolása megszünteti. A $|k\rangle$ vákuum fölötti lélegzők tömegkorrekcióit $\delta m_l^{(k)}$ -val jelölve (B.25) és (B.35) behelyettesítése után (2.32) a

$$\delta m_1^{(k)} = \frac{\lambda \mathcal{G}(\alpha) \mathcal{N}}{M_\beta} \cos\left(\frac{2\pi\alpha}{\beta}k + \delta\right) \frac{\sin^2\left(p\pi\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\sin^2\left(\frac{p\pi}{2}\right)} \exp\left\{-\frac{1}{\pi} \int_0^{p\pi} dt \frac{t}{\sin t}\right\} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \delta m_2^{(k)} &= \frac{\lambda \mathcal{G}(\alpha) \mathcal{N}^2}{M_\beta} \cos\left(\frac{2\pi\alpha}{\beta}k + \delta\right) \frac{\sin^2\left(p\pi\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\cos(p\pi) \sin^2\left(\frac{p\pi}{2}\right)} \times \\ &\times \left[2 \cos^2\left(\frac{p\pi}{2}\right) - \sin^2\left(p\pi\frac{\alpha}{\beta}\right)\right] \exp\left\{-\frac{2}{\pi} \int_0^{p\pi} dt \frac{t}{\sin t}\right\} \end{aligned} \quad (2.45)$$

formulákba megy át (\mathcal{N} -t (B.28) definiálja).

Az első lélegző tömegére szemiklasszikus számítás is végezhető. Mint már említettük, az első lélegző a sine–Gordon-modell ϕ elemi skalárterével azonosítható, és így tömege megkapható a (2.38) potenciálnak a minimumhelyén vett második deriváltjából. Konkréten a

$$m_1^{(k)} = \sqrt{\mu}\beta + \lambda \frac{\alpha^2}{2\sqrt{\mu}\beta} \cos\left(\frac{2\pi\alpha}{\beta}k + \delta\right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (2.46)$$

kifejezést kapjuk, ami megegyezik (2.45) $\beta \rightarrow 0$ klasszikus határesetével, ha figyelembe vesszük, hogy

$$M_\beta^{\text{klasszikus}} = \frac{8\sqrt{\mu}}{\beta}, \quad (2.47)$$

és $\mathcal{N} \rightarrow 1$ ha $\beta \rightarrow 0$.

2.5.3. S-mátrix

A B_1 - B_1 -szórás amplitúdójának elsőrendű korrekcióját is kiszámíthatjuk (2.34) és (B.26) segítségével. Az eredmény

$$\begin{aligned} \delta S_{11}^{(k)}(\theta) = & i \frac{\lambda \mathcal{G}(\alpha) \mathcal{N}^2}{M_\beta^2} \cos\left(\frac{2\pi\alpha}{\beta} k + \delta\right) S_{11}(\theta) \frac{4 \cos^2\left(\frac{p\pi}{2}\right) \sin^2\left(p\pi \frac{\alpha}{\beta}\right)}{\sin^2\left(\frac{p\pi}{2}\right)} \times \\ & \times \left(\frac{\sin^2\left(p\pi \frac{\alpha}{\beta}\right)}{\sin^2(p\pi)} - \frac{1}{\operatorname{ch} \theta + 1} \right) \frac{\operatorname{sh} \theta}{\operatorname{sh}^2 \theta + \sin^2(p\pi)}, \quad (2.48) \end{aligned}$$

ahol $S_{11}(\theta)$ a (B.33) által adott sine-Gordon B_1 - B_1 -amplitúdó. Sajnos azonban ez a korrekció túl kicsi ahhoz, hogy TCSA-mérésekkel vizsgálni tudjuk.

2.6. Az eredmények összevetése

A TCSA a (2.29) dimenziótlan Hamilton-operátor nagyság szerint rendezett \mathcal{E}_i sajátértékeit adja meg az $l = ML$ dimenziótlan térfogat függvényében; a dimenziótlanításhoz mi a (2.25) interpoláló tömegegységet választottuk. Az FFPT-eredmények viszont M_β -val (illetve a másik perturbatív tartományban M_α -val) vannak kifejezve, így a TCSA-eredményekkel való összehasonlításuknál figyelembe kell vennünk e „mértékegységválasztás” különbözőségét. A hánycosusok (1.31), (2.27) és (2.28) felhasználásával

$$\frac{M_\beta}{M} = \frac{(1 - \eta)^{\frac{1}{x_\alpha x_\beta}}}{D \kappa(\Delta_\beta)^{1/x_\beta}} \quad (2.49)$$

módon fejezhető ki.

2.6.1. Mérési módszerek

Vákuumenergia-sűrűség

Numerikus eredményeink azt mutatják, hogy a vákuumenergia viszonylag széles L -tartományban jól mutatja az

$$E_{\text{vákuum}} = e_{\text{vákuum}} L \quad (2.50)$$

lineáris viselkedést, mint az például az A.1. ábrán is látható. Emiatt a dimenziótlan $e_{\text{vákuum}}/M^2$ vákuumenergia-sűrűség könnyen és kielégítő pontossággal mérhető, ha $\mathcal{E}_{\text{vákuum}}(l_0)/l_0$ -lal definiáljuk egy alkalmasan választott (linearitási

tartományba eső, jellemzően 14 és 20 közötti) l_0 helyen. A vákuumenergia-sűrűség dimenzióatlanított megváltozását így

$$\frac{\delta e_{\text{vákuum}}}{M_\beta^2} = \frac{\mathcal{E}_{\text{vákuum}}(l_0)}{l_0} \frac{M^2}{M_\beta^2} - \frac{e_{\text{vákuum}}^{\eta=0}}{M_\beta^2} \quad (2.51)$$

módon fejezhetjük ki, ahol $e_{\text{vákuum}}^{\eta=0}$ a perturbálatlan $\eta = 0$ elméletben mért vákuumenergia-sűrűség. Utóbbi egzakt

$$\frac{e_{\text{vákuum}}^{\eta=0}}{M_\beta^2} = -\frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{p\pi}{2} \quad (2.52)$$

kifejezése ugyan ismert, de annak TCSA-eredményekkel való összevetése már megtörtént [11], most viszont a mért érték használata segít kiejteni a TCSA *levágási hibáinak* egy részét.

Lélegzőtömegek

Tudjuk, hogy egy 0 impulzusú és m_Ψ tömegű Ψ állapot vákuumhoz viszonyított energiája véges térfogatban

$$E_\Psi(L) - E_{\text{vákuum}}(L) = m_\Psi + \mathcal{O}(e^{-ML}) \quad (2.53)$$

alakú, ahol M az elmélet valamilyen jellemző tömegskálája. Mivel a (2.25) interpoláló tömeg az $\eta = 0$ és $\eta = 1$ pontokban megegyezik a valódi skálával, köztük pedig η változásával folytonosan interpolál, tekinthetjük a kétfrekvenciás sine–Gordon-modell karakterisztikus skálájának. Ezért tömegmérésre a legegyszerűbb módszer, ha meghatározzuk a kérdéses állapot vákuumhoz képesti energiáját egy — az $E_\Psi(L) - E_{\text{vákuum}}(L) \approx$ konstans, vagyis a *skálázó tartományba* eső — alkalmas térfogatértéknél. Természetesen l_0 elég nagy kell legyen ahhoz, hogy a végesméret-effektusok már ne befolyásolják számottevően az energiakülönbséget, de túl nagy sem lehet, különben a TCSA-hibák meghamisítják az eredményt. Így tehát a lélegzők dimenzióatlanított tömegkorrekcióit

$$\frac{\delta m_i}{M_\beta} = [\mathcal{E}_i(l_0) - \mathcal{E}_{\text{vákuum}}(l_0)] \frac{M}{M_\beta} - \frac{m_i^{\eta=0}}{M_\beta} \quad (2.54)$$

módon nyerjük ki a spektrumból, ahol l_0 a fenti alkalmas térfogat, $\mathcal{E}_i(l_0)$ a kérdéses lélegzőállapothoz tartozó sajátérték, $m_i^{\eta=0}$ pedig az $\eta = 0$ -nál mért lélegzőtömeg. Ismét, bár az $m_i^{\eta=0}/M_\beta$ arányok analitikusan ismertek (1.4), a mért értéket használjuk a numerikus hibák lehetőség szerinti kiejtése céljából.

2.6.2. Az $\alpha = \beta/2$ speciális eset

A TCSA-adatok és az elsőrendű FFPT-eredmények összehasonlítását az $\alpha/\beta = 1/2$ frekvenciaarány mellett mutatjuk be. Részint, mert ez a legegyszerűbb választás ($n = 2$, $m = 1$ -nek felel meg), részint pedig mert ezt a modellt fogjuk a későbbiekben részletesebb nemperturbatív vizsgálatnak alávetni. A néhány bevezető klasszikus megfontolást felvonultató 2.3. fejezetben már szerepelt a potenciál speciális (2.12) alakja és periódusa, valamint, hogy ezekből következően az $\eta = 0$ határeset egy β frekvenciájú $n = 2$ -csavart sine–Gordon-modell, míg az $\eta = 1$ határesetben egy $\beta/2$ frekvenciájú $m = 1$ -csavart (azaz hagyományos, csavaratlan) sine–Gordon-modellt találunk.

Az 1.5.2. fejezetben írtak szerint a 2-csavart modell vákuumszektorában minden állapot lényegében kétszer szerepel, a két vákuumnak megfelelően. Végtelen térfogatban ezek az állapotpárok degeneráltak, de véges L térfogatban a degeneráció megszűnik a vákuumok közötti alagutazás miatt. Az ebből eredő felhasadás $\mathcal{O}(e^{-L})$ nagyságú, vagyis nagy térfogatban exponenciálisan kicsi; a perturbáció bekapcsolása viszont teljesen megszünteti a degenerációt és az állapotok felét *instabillá* teszi az alább bemutatásra kerülő módon.

Vizsgáljuk a $\delta = 0$ esetet! λ bekapcsolásával a kiinduló 2-csavart sine–Gordon-modell két alapállapota különböző energiasűrűségre tesz szert, miáltal az alapállapotok felhasadása vezető rendben L -ben lineáris lesz. (2.37) alapján λ -ban első rendig

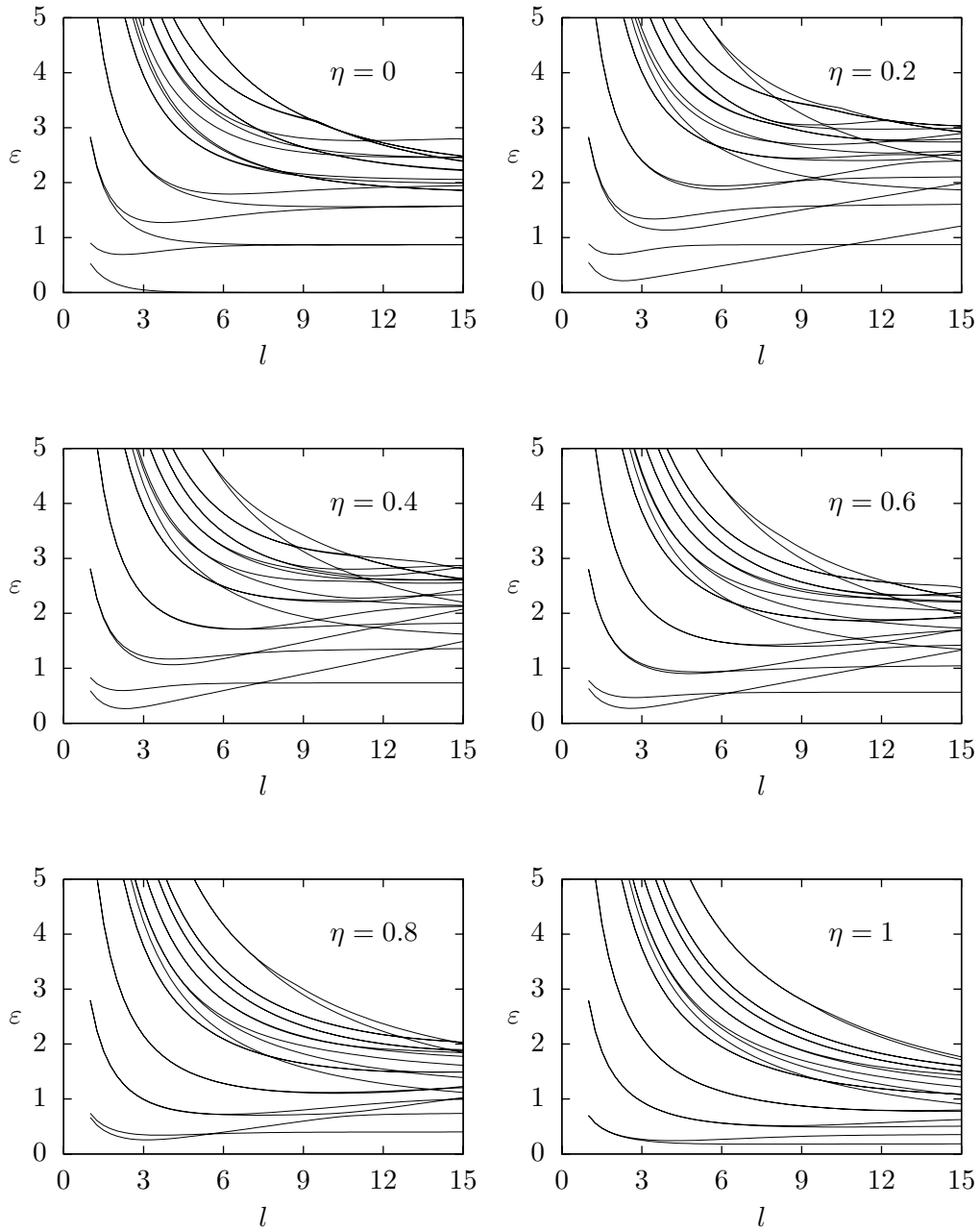
$$E_1(L) - E_0(L) = 2\lambda\mathcal{G}(\beta/2)L + \dots, \quad (2.55)$$

ahol $E_{0,1}(L)$ a két alapállapot Casimir-energiája, a ki nem írt tagok pedig a térfogattal exponenciálisan lecsengő járulékok.

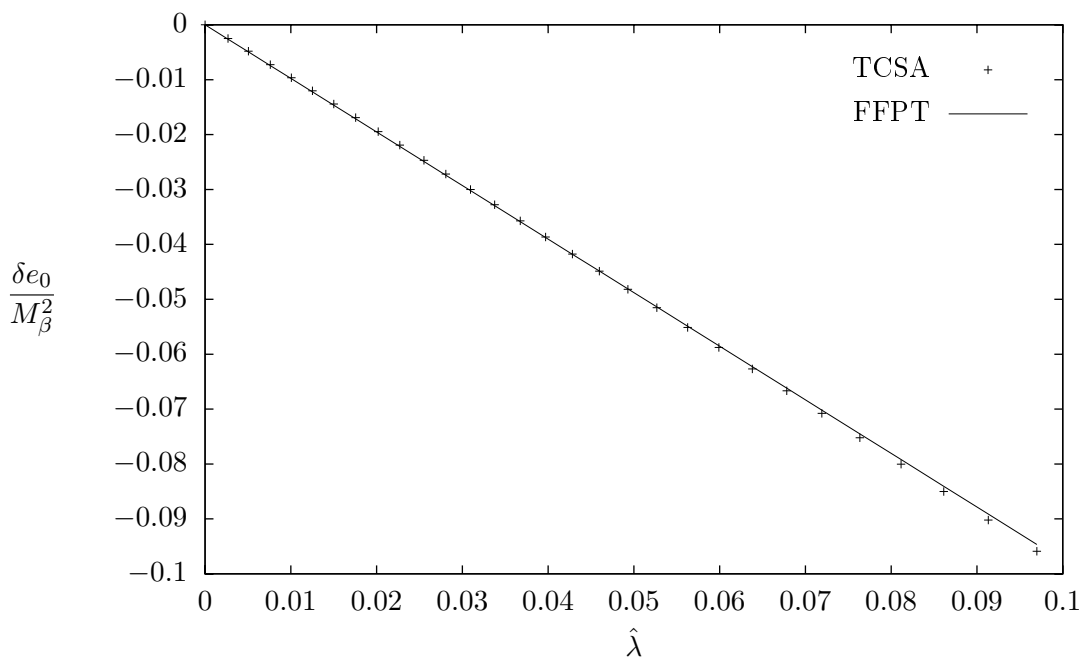
Megjegyzendő, hogy a magasabb „alapállapot” nem aszimptotikus állapota a rendszernek. A 2.2. ábrán látható a modell spektruma több különböző η érték mellett. Kis η értékeknél az aszimptotikus (nagy térfogatú) meredekség szerint elkülöníthető a vonalak két csoportja. Az emelkedő vonalak azonban valójában nem folytonosak, mert a látszólagos kereszteződések közelebből megnézve szintelkerüléseknek bizonyulnak, vagyis ezeknek a vonalaknak nem feleltethetőek meg aszimptotikus állapotok. Ez a viselkedés a metastabil, bomló állapotok jellegzetes sajátossága [28, 30]. A TCSA-vonalak között a metastabil állapot „platók” sorozataként jelenik meg, melyek folytonos vonallá válnának a $\lambda \rightarrow 0$ határesetben. Ugyanez áll azon gerjesztésekre is, melyek a perturbálatlan elmélet destabilizálódó vákuumai fölött fekszenek: végtelen térfogatban a rendszer Hilbert-teréből ezek az állapotok mind eltűnnek, csak a perturbálás után is valódi vákuumként funkcionáló állapot családja marad a spektrumban.

Ha a platók eléggé hosszúak, megmérhetjük meredekségüket (vagyis a metastabil alapállapot energiasűrűségét) és szintkülönbségeiket (mely az arra épülő instabil részecskék tömegeit adja meg). Ezáltal a (2.37) δe_k és a (2.44-2.45)

2. A KÉTFREKVENCIÁS SINE-GORDON-MODELL



2.2. ábra. A kétfrekvenciás sine-Gordon-modell spektruma különböző η értékek mellett (az első 20 $\varepsilon_i = \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_0$ relatív energiaszint; $\alpha = \frac{\beta}{2}$, $p = \frac{2}{7}$, $\delta = 0$)



2.3. ábra. A valódi vákuum energiasűrűségének korrekciója ($\alpha = \frac{\beta}{2}$, $p = \frac{2}{7}$, $\delta = 0$)

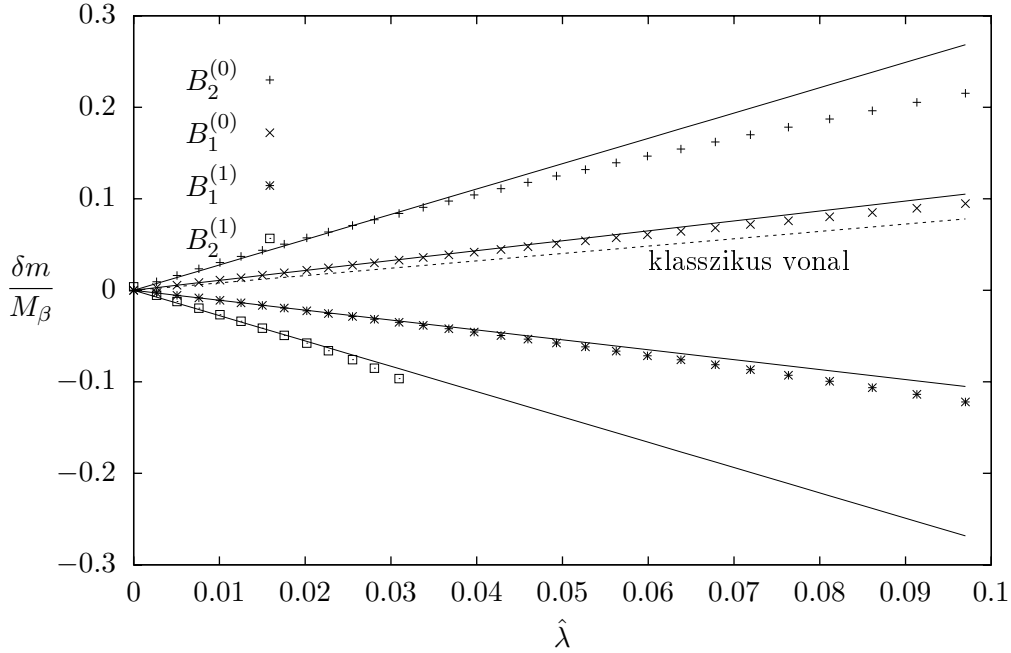
$\delta m_{1,2}^{(k)}$ perturbatív kifejezésekkel összehasonlítható adatokat nyerünk. Hasonló felfogás működik a kísérleti részecskefizikában is: akkor beszélhetünk egy instabil részecske különféle tulajdonságairól (például a tömegéről), ha a részecske elég hosszú életű ahhoz, hogy az adott tulajdonságát kellő pontossággal mérhessük.

Az $\eta = 1$ végpontban található csavaratlan, $\beta/2$ frekvenciájú sine–Gordon-modell csak egyetlen vákuummal rendelkezik, de sok lélegzővel, mert mélyebben van a vonzó paramétertartományban: $p_{\beta/2} = 1/17$. A kezdeti emelkedés után tehát a platók meredeksége újra csökkenni kezd, és $\eta = 1$ elérésével a szintek átrendeződése befejeződik az „érkező” modellnek megfelelően. A (2.25) interpoláló egységválasztásnak köszönhetően a Hamilton-operátor végig simán változik η -val, és az $\eta = 1$ grafikonon közvetlenül be is tudjuk azonosítani a $\beta/2$ frekvenciájú sine–Gordon-modell első néhány lélegzőtömegét.

Lássuk most az FFPT eredményeket! A

$$\hat{\lambda} = \lambda M_\beta^{-x_\alpha} \quad (2.56)$$

dimenziótlán csatolási állandót bevezetve már csupa dimenziótlán mennyiséget tudunk szerepeltetni a 2.3. ábrán. Feltűnően jó az egyezés a TCSA-adatok és az elsőrendű FFPT-jóslat között egy meglehetősen hosszú tartományon: $\hat{\lambda} = 0.1$ a szóban forgó frekvenciák mellett $\eta \approx 0.442$ -nek felel meg.



2.4. ábra. A lélegzőtömegek korrekciói ($\alpha = \frac{\beta}{2}$, $p = \frac{2}{7}$, $\delta = 0$)

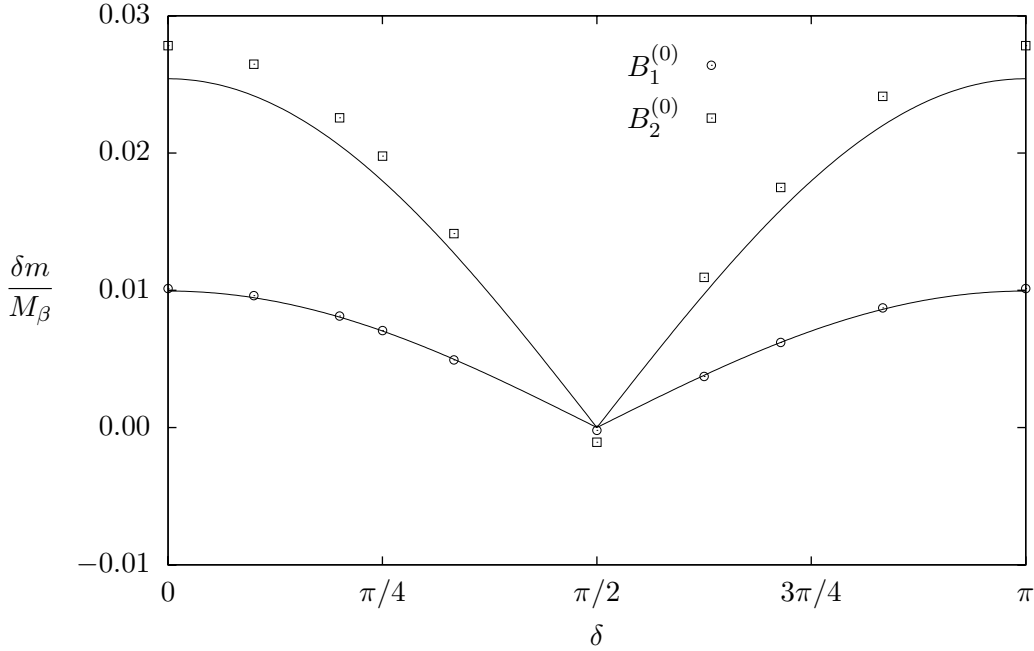
A 2.4. ábrán az első két lélegzőpár tömegkorrekcióit gyűjtöttük össze, valamint a TCSA-adatokon és az FFPT-jóslatokon túl felrajzoltuk még $\delta m_1^{(0)}$ klasszikus becslését is (2.46) alapján. Az instabil állapotok nagyjából stabil párjukkal azonos tartományban követik az elsőrendű jóslatokat, de tömegkorrekciójuk párjukénak ellentettje, ahogy formuláink jósolják. Látható továbbá, hogy a klasszikus közelítés határozottan alábecsli az első lélegző tömegkorrekcióját.

A 2.5. ábra az első két (valódi vákuum feletti) lélegző tömegkorrekcióját mutatja be δ függvényében $\hat{\lambda} \approx 0.01$ mellett. Ez a tömegkorrekció mindig pozitív, mert a (2.11) fundamentális tartományból kilépve — azaz $\delta > \pi/2$ -nél — a két lélegzőpár szerepet cserél. A második lélegzőnél a TCSA- és FFPT-értékek különbsége csak az energiatengely átskálázása miatt feltűnően nagy; figyelemre méltó viszont, hogy az első lélegző pontjai még ekkora nagyításnál is vonalvastagságon belül az elsőrendű jóslat vonalára esnek.

A másik perturbatív tartományban ugyanígy összevethetjük a TCSA segítségével kapott adatokat a μ csatolási állandóra vonatkoztatott FFPT-eredményekkel. Ott természetesen M_α egységeket használunk, a vízszintes tengelyen pedig a

$$\hat{\mu} = \mu M_\alpha^{-x_\beta} \quad (2.57)$$

dimenziótlantított csatolási állandó szerepel. A vákuumenergia-korrekció a 2.6.,



2.5. ábra. A tömegkorrekciók fázisfüggése ($\alpha = \frac{\beta}{2}$, $p = \frac{2}{7}$, $\eta = 0.02$)

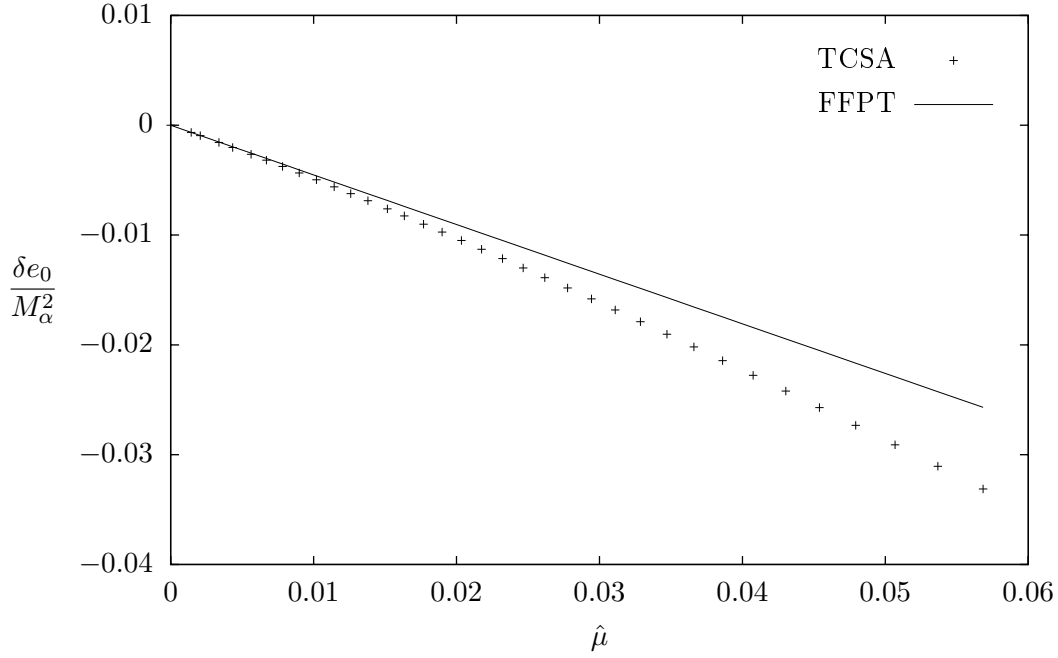
a lélegzőtömegek korrekciója a 2.7. ábrán látható. Megállapítható, hogy a mért és az elsőrendű perturbációs számítással jóslott értékek kezdeti nagyon jó egyezése itt lényegesen hamarabb romlik el. Magukat a lélegzőtömegeket ábrázolhatjuk η függvényében is, akár a teljes $\eta \in [0, 1]$ intervallumon, ha az M interpoláló tömeg egységet használjuk. Az így készült 2.8. ábrán az elsőrendű perturbációs számítás jóslatai természetesen már nem egyenesek.

Összefoglalásképpen megállapíthatjuk, hogy a kétfrekvenciás sine–Gordon-modellre a TCSA- és az FFPT módszer egyaránt sikerrel alkalmazható, és a perturbatív tartományokban mindkettő azonos eredményekre vezet. Erre a megerősítésre különösen azért volt nagy szükségünk, mert a 2.8. fejezetben a fázisátalakulás vizsgálatához TCSA-t fogunk alkalmazni olyan paraméterértékek mellett, melyeknél független ellenőrző módszer — néhány szemiklasszikus és kvalitatív megfontolástól eltekintve — nem áll rendelkezésünkre.

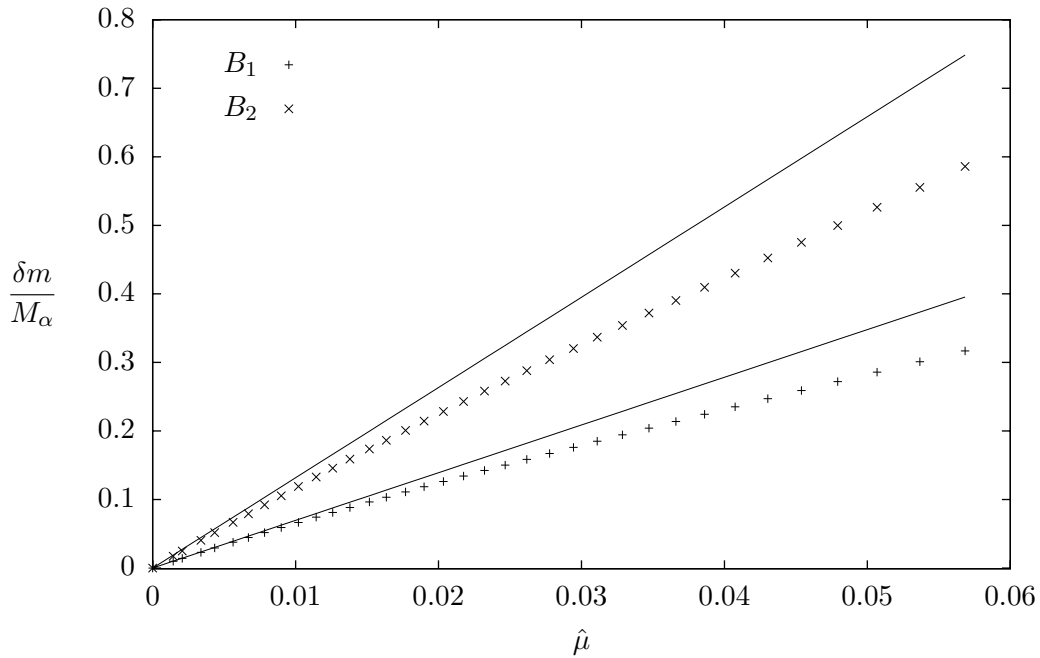
2.7. Szemiklasszikus formfaktorok

Az előző fejezet eredményeinek [31] publikálása után jelent meg az irodalomban a kétfrekvenciás sine–Gordon-modell tömegspektrumának egy független vizsgálata [32], mely a Goldstone és Jackiw által kifejlesztett szemiklasszikus szoliton-formfaktor technikát [33] használva a lélegzőtömegek korrekcióira fen-

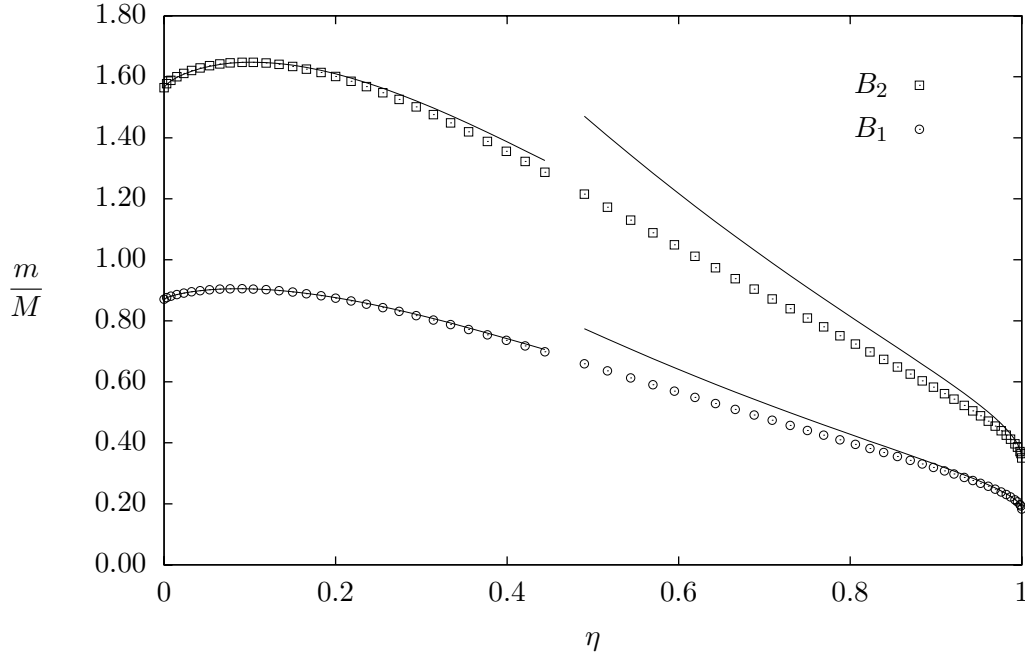
2. A KÉTFREKVENCIÁS SINE-GORDON-MODELL



2.6. ábra. A vákuum energiasűrűségének korrekciója $\hat{\mu}$ -ban ($\alpha = \frac{\beta}{2}$, $p = \frac{2}{7}$, $\delta = 0$)



2.7. ábra. A lélegzőtömegek korrekciói $\hat{\mu}$ -ban ($\alpha = \frac{\beta}{2}$, $p = \frac{2}{7}$, $\delta = 0$)



2.8. ábra. Lélegzőtömegek η függvényében ($\alpha = \frac{\beta}{2}$, $p = \frac{2}{7}$, $\delta = 0$)

tebb FFTT-vel kapott (2.44) eredménynek határozottan ellentmond. A TCSA elvben alkalmas a kérdés eldöntésére, de ehhez az eddigieknél nagyobb pontosság (több állapot, magasabb $E_{\text{küszöb}}$) és finomabb analízis szükséges [34].

2.7.1. Szemiklasszikus tömegformulák

A klasszikus kétfrekvenciás modellt most [32] nyomán az

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \mu_0 \cos \beta \phi - \lambda_0 \cos \left(\frac{\beta}{2} \phi + \delta \right) \quad (2.58)$$

Lagrange-sűrűséggel definiáljuk (látható, hogy $\alpha = \beta/2$ választás történt). $\lambda_0 = 0$ esetén visszkapjuk a hagyományos sine-Gordon-modellt, melynek spektruma az

$$M_0 = \frac{8\sqrt{\mu_0}}{\beta} \quad (2.59)$$

tömegű szolitonból és antiszolonból, valamint folytonosan sok lélegzőmegoldásból áll, melyek tömege

$$m = 2M_0 \sin \frac{\pi\omega}{2} \quad 0 < \omega < 1; \quad (2.60)$$

ez a folytonos spektrum a kvantálás után diszkrétte válik az (1.4) által megadott m_n tömegekkel. Az (1.31) kvantumelméleti tömegformula a $\beta \rightarrow 0$ határesetben a (2.59) szerinti

$$\mu \sim \frac{\beta^2}{64} M^2 \quad (2.61)$$

szemiklasszikus aszimptotikával rendelkezik, ezért μ -t μ_0 -lal azonosíthatjuk ebben a határesetben.

A kétfrekvenciás modell $\alpha = \beta/2$ miatt természetesen most is a térváltozó

$$\phi \sim \phi + \frac{4\pi}{\beta} \quad (2.62)$$

azonosítását követeli meg, tehát a 2.3. fejezethez hasonlóan ismét egy 2-csavart modell keretei között dolgozunk, két első lélegzővel a spektrumban. A [32] vizsgálat ezek tömegeire $\delta = \pi/2$ mellett az

$$m_n^{(L,S)} = m_n \pm 2\pi \frac{\lambda_0 \beta}{\sqrt{\mu_0}} \left[\frac{1}{\beta^2} \sin \left(n \frac{\beta^2}{16} \right) - \frac{n}{16} \cos \left(n \frac{\beta^2}{16} \right) \right] + \mathcal{O}(\lambda_0^2) \quad (2.63)$$

jóslattal szolgál, ahol L és S az m_n szint „hosszú” (long) és „rövid” (short) lélegzőre történő felhasadására utal. Láthatóan egy λ_0 -ban lineáris korrekcióról van szó, míg (2.44) ugyanebben az esetben $\cos \delta = 0$ miatt eltűnő lineáris korrekciót ad.

A (2.59) szolitontömeg felhasználásával a fenti kifejezés vezető rendig a

$$\frac{\delta m_n^{(L,S)}}{M_0} = \pm 16\pi \frac{\lambda_0}{M_0^2} \left[\frac{1}{\beta^2} \sin \left(n \frac{\beta^2}{16} \right) - \frac{n}{16} \cos \left(n \frac{\beta^2}{16} \right) \right] = \pm \frac{\pi n^3 \beta^4}{768} \frac{\lambda_0}{M_0^2} + \mathcal{O}(\beta^8) \quad (2.64)$$

alakba írható, ami a

$$\hat{\lambda}_0 = \frac{\lambda_0}{M_0^2} \quad (2.65)$$

dimenzióatlanított csatolási állandóval

$$\frac{\delta m_n^{(L,S)}}{M_0} = \pm \frac{\pi n^3 \beta^4}{768} \hat{\lambda}_0 + \mathcal{O}(\beta^8) \quad (2.66)$$

módon fejezhető ki. A kvantumelmélet dimenzióatlan csatolása

$$\hat{\lambda} = \lambda M^{-x_{\beta/2}} \quad x_{\beta/2} = 2 - \frac{\beta^2}{16\pi}, \quad (2.67)$$

de a szemiklasszikus határesetben $\hat{\lambda}_0$ -tól ez csak β^2 magasabb hatványaiban tér el. Emiatt a klasszikus és a kvantumos tömegrelációk közötti eltérést beolvaszthatjuk a magasabb rendű korrekciós tagokba, vagyis a (2.66) formulát

β	$\frac{ \delta m_1^{(L,S)} }{M}$
$\frac{\sqrt{4\pi}}{2.5}$	$0.0165\hat{\lambda} + \dots$
$\frac{\sqrt{4\pi}}{2.2}$	$0.0276\hat{\lambda} + \dots$

2.1. táblázat. Szemiklasszikus jóslatok az első lélegző tömegkorrekciójára

β -ban vezető rendig használhatjuk a kvantumos modellben is M_0 M -re és $\hat{\lambda}_0$ $\hat{\lambda}$ -ra cserélése után:

$$\frac{\delta m_n^{(L,S)}}{M} = \pm \frac{\pi n^3 \beta^4}{768} \hat{\lambda} + \mathcal{O}(\beta^6). \quad (2.68)$$

Vizsgálatainkat az első lélegzőre ($n = 1$) fogjuk elvégezni a 2.1. táblázatban látható csatolásoknál.

2.7.2. TCSA

A TCSA pontosságát két módon növeljük, hogy teljesítse a jelen vizsgálat támasztotta igényeket. Egyrészt kisebb β értékek mellett dolgozunk, ami gyorsabb konvergenciát eredményez, így azonos $E_{\text{vákuum}}$ használata is nagyobb pontosságú tömegmérésre ad lehetőséget. Másrészt a modell paritásaszimmetriájának megfelelően felbontjuk a Hilbert-teret két független altérre, melyek között a lokális operátoroknak nincs mátrixelemük, így függetlenül végezhetjük el bennük a Hamilton-operátor diagonalizálását.

Előzetes tesztelés

A $\delta = 0$ esetben a potenciál (és ezáltal a teljes modell is) $\phi \leftrightarrow -\phi$ szimmetriával rendelkezik, ennek megfelelően tudjuk felosztani a Hilbert-teret páros- és páratlan szektorra. Ennek első lépése, hogy új bázist választunk, melyet határozott paritású elemek alkotnak. Ez a Hamilton-operátor sajátértékeit természetesen nem befolyásolja, csak a sajátvektorok felbontási együtthatóit, és ezt az új algoritmus fejlesztése közben ellenőriztük is. A második lépésben a két szektor diagonalizálását már függetlenül végezzük el, de összefésülés után továbbra is a régi sajátértékeket kell látnunk. Ezen tesztek elvégzése után joggal bízunk abban, hogy $E_{\text{küszöb}}$ magasabbra emelése után akár 18000 állapotra is helyes eredményeket szolgáltat a programunk. Független megerősítésként szolgál az is, hogy $\hat{\lambda} = 0$ mellett elvégezve az összehasonlítást az egzakt S-mátrix-elmélet jóslataival, a levágási hibák határán belül visszakapjuk a várt energiaértékeket.

2. A KÉTFREKVENCIÁS SINE–GORDON-MODELL

$\hat{\lambda}$	$m_1^{(1)}$ (TCSA)	$m_1^{(2)}$ (TCSA)	$m_1^{(1)}$ (FFPT)	$m_1^{(2)}$ (FFPT)	$m_1^{(1)} - m_1^{(2)}$ (TCSA)	$m_1^{(1)} - m_1^{(2)}$ (FFPT)
0	0.27230	0.27231	0.27233	0.27233	-0.00001	0
0.001	0.27325	0.27136	0.27328	0.27138	0.00019	0.00020
0.002	0.27420	0.27039	0.27424	0.27042	0.00381	0.00380
0.003	0.27514	0.26942	0.27519	0.26947	0.00572	0.00572
0.004	0.27610	0.26847	0.27615	0.26851	0.00763	0.00764
0.005	0.27702	0.26749	0.27710	0.26756	0.00953	0.00954
0.006	0.27796	0.26652	0.27805	0.26661	0.01144	0.01144
0.007	0.27888	0.26553	0.27901	0.26565	0.01335	0.01336
0.008	0.27982	0.26455	0.27996	0.26470	0.01527	0.01526

2.2. táblázat. FFPT-jóslatok és TCSA-mérések az első lélegzők tömegeire (minden értéket a szolitontömeeggel dimenziótlanítottunk, $\beta = \frac{\sqrt{4\pi}}{2.5}$, $\delta = 0$)

A vákuumok a páros, az első lélegzők pedig a páratlan szektorban találhatóak. A perturbáció bekapcsolása után a két vákuum energiasűrűsége eltérővé válik, ennél fogva különböző meredekségű TCSA-vonalak tartoznak hozzájuk (és a rájuk épülő lélegzőkhöz) a skálázó tartományban. λ előjelének megváltoztatása a két állapotcsalád szerepét megcseréli:

$$m_1^{(1,2)}(-\lambda) = m_1^{(2,1)}(\lambda). \quad (2.69)$$

A csatolás $\beta = \sqrt{4\pi}/2.5$ -es értékénél a (2.44) FFPT-formula

$$\frac{\delta m_1^{(1,2)}}{M} = \pm 0.95393 \hat{\lambda} \quad (2.70)$$

első rendű tömegkorrekciót jósol, a TCSA-adatok kiértékelését pedig most is a 2.6.1. fejezetben írtak alapján végezzük. Az eredményeket a 2.2. táblázat tartalmazza. A mért tömegértékek nagyon szépen követik a formfaktor-perturbációs számítás első rendű jóslatát, de a csatolási állandó növelésével nőnek az eltérések is. Kézenfekvő feltételezés, hogy ezek a magasabb rendű korrekcióknak tudhatók be, ezért tekintsük a tömegkülönbséget, melyből (2.69) miatt a páros rendű korrekciók kiesnek! Az egyezés valóban sokkal jobb, a mért tömegkülönbségek az FFPT-jóslattal a TCSA becsült hibáján³ belül megegyeznek a teljes vizsgált $\hat{\lambda}$ intervallumon. A mérési eredményekre történő illesztéssel a (2.70)-beli együttható értékére a

$$0.95441 \pm 0.00032 \quad (2.71)$$

³A TCSA-hiba az energiaszintek $E_{\text{küszöb}}$ -függéséből és a vonalak skálázó tartománybeli „laposságából” becsülhető.

$\hat{\lambda}$	m_1^+	m_1^-	$m_1^+ - m_1^-$ (TCSA)	$m_1^+ - m_1^-$ (2.66)
0	0.27230	0.27231	-0.00001	0
± 0.010	0.27154	0.27154	0	0.00033
± 0.015	0.27059	0.27057	0.00002	0.00050
± 0.020	0.26925	0.26925	0	0.00066
± 0.025	0.26750	0.26746	-0.00004	0.00083
± 0.030	0.26536	0.26530	0.00006	0.00099
± 0.035	0.26276	0.26274	0.00002	0.00116
± 0.040	0.25975	0.25971	0.00004	0.00132
± 0.045	0.25625	0.25624	0.00001	0.00149
± 0.050	0.25236	0.25229	0.00007	0.00165

2.3. táblázat. TCSA-mérések az első lélegzők tömegeire (minden értéket a szolitontömeeggel dimenzióatlanítottunk, $\beta = \frac{\sqrt{4\pi}}{2.5}$, $\delta = \frac{\pi}{2}$)

intervallum adódik, melyen az FFPT jóslat éppen csak éppen hogy kívül esik.

Képet kapunk a kvantumos effektusok nagyságáról, ha a fenti eredményeket összevetjük a (2.14) klasszikus becsléssel. Utóbbiban a lélegzőtömeg-korrekciók együtthatója ± 1 , melyhez a kvantumos effektusok 0.05 nagyságrendű járulékot adnak, amit a TCSA 1%-os pontossággal képes is megmérni.

Szimmetrikus potenciál

$\delta = \pi/2$ esetén a projekcióhoz a

$$\phi \leftrightarrow \frac{2\pi}{\beta} - \phi \quad (2.72)$$

szimmetriát használhatjuk fel. A páros- (+) és a páratlan (−) szektorban is egy-egy vákuumot találunk, a hozzájuk tartozó lélegzőkkel, melyek tömegeire β előző szakaszban használt értéke mellett most a 2.3. táblázatban látható értékeket kapjuk. Egyik szektor spektruma sem változik $\hat{\lambda}$ előjelének megfordításával, vagyis az m_1^\pm tömegek $\hat{\lambda}$ páros függvényei. Mind ez a tény, mind a 2.3. táblázat adatai *kizárják* a 2.1. táblázat szerinti mértékű lineáris korrekció létezését.

Hogy számszerűsítsük is ezt az eredményt, a $\hat{\lambda} \in [-0.05, 0.05]$ tartományban mért tömegértékekre illesszük az

$$m_1^\pm = m_1 + a^\pm \hat{\lambda} + b^\pm \hat{\lambda}^2 + c^\pm \hat{\lambda}^3 + d^\pm \hat{\lambda}^4 \quad (2.73)$$

függvényt! Az illesztések eredményei a 2.4. táblázatban láthatók. Összehasonlításképpen, a 2.1. táblázat első sora $a^\pm = \pm 0.01654$ -et jósol, mely két nagyságrenddel meghaladja az illesztések bizonytalanságát. Mivel a vizsgált paraméter-

2. A KÉTFREKVENCIÁS SINE-GORDON-MODELL

$a^+ = 0 \pm 0.00010$	$a^- = 0 \pm 0.000054$
$b^+ = -7.606 \pm 0.018$	$b^- = -7.625 \pm 0.011$
$c^+ = 0 \pm 0.054$	$c^- = 0 \pm 0.033$
$d^+ = -152.4 \pm 6.9$	$d^- = -149.5 \pm 4.4$

2.4. táblázat. Tömegillesztések $\beta = \frac{\sqrt{4\pi}}{2.5}$ és $\delta = \frac{\pi}{2}$ mellett

$\hat{\lambda}$	m_1^+	m_1^-	$m_1^+ - m_1^-$ (TCSA)	$m_1^+ - m_1^-$ (2.66)
0	0.36002	0.35986	0.00016	0
0.010	0.35940	0.35927	0.00013	0.00055
0.015	0.35864	0.35853	0.00011	0.00083
0.020	0.35758	0.35747	0.00011	0.00110
0.025	0.35622	0.35611	0.00011	0.00137
0.030	0.35449	0.35444	0.00005	0.00165
0.035	0.35248	0.35242	0.00006	0.00193
0.040	0.35011	0.35011	0	0.00220
0.045	0.34747	0.34751	-0.00004	0.00248
0.050	0.34443	0.34445	-0.00002	0.00276

2.5. táblázat. TCSA-mérések az első lélegzők tömegeire ($\beta = \frac{\sqrt{4\pi}}{2.2}$, $\delta = \frac{\pi}{2}$)

értékek mélyen a szemiklasszikus tartományba esnek, a magasabb rendű kvantumkorrekciók sem magyarázhatnak ekkora különbséget: az előző szakaszban láttuk, hogy a mindössze néhány százalékos szinten mozognak. Végeredményben kijelenthetjük, hogy a (2.66) kifejtés nem érvényes β^4 rendig, és ennél fogva [32] minden további erre épülő következtetése megkérdőjeleződik. A következő fejezetben elméleti megfontolásokkal is alátámasztjuk ezt.

A lélegzőtömegek vizsgálatát elvégeztük a csatolás némileg nagyobb, $\beta = \sqrt{4\pi}/2.2$ értékénél is. Még ez a modell is 9 lélegzővel rendelkezik, vagyis szintén mélyen szemiklasszikus; a tömegkorrekció FFPT-, illetve klasszikus jóslatát összevetve a kvantumos effektusokra ismét néhány százalék adódik mindössze. A nagyobb β azt is jelenti, hogy a TCSA lassabban konvergál, de a pontossága még így is elég a fentihez hasonló analízis végrehajtására, mint azt a 2.5. táblázatban felsorolt mérési eredmények, valamint azok illesztései (a 2.6. táblázat) mutatják. A 2.1. táblázat második sora $a^\pm = \pm 0.02758$ -at jósol a tömegkorrekció együttthatójára, melyet az illesztések ismét két nagyságrenddel kizárnak.

$a^+ = 0 \pm 0.00008$	$a^- = 0 \pm 0.0002$
$b^+ = -6.076 \pm 0.017$	$b^- = -5.966 \pm 0.021$
$c^+ = 0 \pm 0.053$	$c^- = 0 \pm 0.11$
$d^+ = -63.3 \pm 6.5$	$d^- = -77.3 \pm 8.6$

2.6. táblázat. Tömegillesztések $\beta = \frac{\sqrt{4\pi}}{2.2}$ és $\delta = \frac{\pi}{2}$ mellett

2.7.3. Elméleti megfontolások

A levezetés gyenge pontjai

Miután bemutattuk, hogy a TCSEA-adatok határozottan ellentmondanak a szemiklasszikus vizsgálat eredményének, felmerül a kérdés, hogy elméleti szempontból milyen kifogások emelhetők a [32] levezetés ellen. A probléma az, hogy a (2.66) vezető tagja β^4 rendű, de a hozzá vezető eljárás nem érvényes eddig a rendig. A lélegzőtömegeket ugyanis a szemiklasszikus szoliton-formfaktor pólusának tulajdonságaiból határozza meg, de nem veszi figyelembe a formfaktorhoz és a szoliton-tömeghez adódó kvantumkorrekciókat. β^2 rendig viszont ez helyes eljárás, és abban a rendben a formula valóban helyes eredményt: eltűnő lineáris korrekciót jósol a lélegzőtömegekhez.

Ejtsünk pár szót a $\delta = 0$ esetre levezetett

$$\delta m_n^\pm = \pm \frac{\beta \lambda_0}{8\sqrt{\mu_0}} \left[\left(1 - \ln \frac{\lambda_0}{16\mu_0} \right) \frac{32}{\beta^2} \sin \left(n \frac{\beta^2}{32} \right) + n \ln \frac{\lambda_0}{16\mu_0} \cos \left(n \frac{\beta^2}{32} \right) \right] + \mathcal{O}(\lambda_0^2) \quad (2.74)$$

formuláról is, mely β -ban hatványsorba fejtve a

$$\frac{\delta m_n^\pm}{M_0} = \left[n - \beta^4 \frac{n^3}{6144} \left(1 + \ln \frac{\lambda_0^2}{256\mu_0^2} \right) + \mathcal{O}(\beta^6) \right] \frac{\lambda_0}{M_0^2} + \mathcal{O}(\lambda_0^2) \quad (2.75)$$

alakot veszi fel! Ez előállítja a

$$\frac{\delta m_n^\pm}{M_0} = n \frac{\lambda_0}{M_0^2} + \mathcal{O}(\lambda_0^2) \quad (2.76)$$

klasszikus határesetet, de a β^4 rendű tag megint csak nem megbízható a fent részletezett okokból, illetve ebben a formulában β^2 rendű tag is generálódik, ha a klasszikus λ_0 és M_0 paramétereket a λ pCFT-csatolásra és az M kvantum szoliton-tömegre cseréljük. A (2.44) FFPT-eredmény kifejtése szintén szolgáltat tagokat az összes β^2 rendben, de ezek a fentiek miatt nem összehasonlíthatóak a (2.75) szemiklasszikus formulával.

Van azonban egy súlyosabb probléma is (2.75) alakjával: a logaritmikus λ_0 -függés arra utal, hogy noha a tömegek $\lambda_0 \rightarrow 0$ határértéke az elvárt, a $\lambda_0 \neq 0$ eset nem kezelhető a $\lambda_0 = 0$ modell perturbációjaként. A perturbált konform térelméleti- vagy az FFPT-megközelítés eközben gyökeresen eltérő viselkedést mutat. A pCFT λ -ban és μ -ben sor alakú eredményeket állít elő, melyek minden rendben UV divergenciától mentesek, ha $\beta^2 < 4\pi$. Nem látunk módot arra, hogy logaritmikus λ -függés jelenhessen meg ebben a tartományban; még a sor μ -ben történő részleges felösszegzése is csak az együtthatók μ -függését tudja nemanalitikussá tenni. Másrészt ez a részleges felösszegzés éppen a formfaktor-perturbációs számítás használatával lenne egyenértékű, mely — mint láttuk — logaritmikus tag nélküli elsőrendű korrekciót jósol, és kitűnően egyezik a TCSA-mérések eredményeivel. Ezek a megfontolások ismételtén aláhúzzák, hogy (2.75) β^4 rendű tagja (mely a logaritmikus együtthatót tartalmazza) nem következetes számolás eredménye: a TCSA-mérésekkel történő összehasonlítás megkívánná a λ_0 és M_0 renormálásakor fellépő hurokjárulékok rendről-rendre történő szisztematikus győelembevételét.

Ennek elvégzése természetesen nem jelentené azt, hogy könnyű lenne mérésekkel meggyőzően kizárni egy esetleges β^4 rendű $\lambda \ln \lambda$ korrekció létezését, hiszen az nehezen tudnánk különválasztani a már β^0 rendben is jelen levő λ rendű járulékoktól. Mindazonáltal a jelen mérések FFPT-eredményekkel való egyezése feltűnően jó, a tömegkorrekció együtthatója 0.05% bizonytalansággal mérhető, és a TCSA további pontosítására maradtak még lehetőségeink, például a nagyobb számítási kapacitás igénybevétele vagy az eredmények 1.6.3. fejezetben bemutatotthoz hasonló extrapolációja.

Kibővített lélegzőspektrum

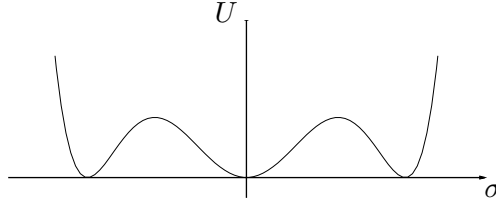
A pusztán számításán túl [32] intuitív elméleti magyarázattal is alátámasztja a lineáris tömegkorrekció létezését $\delta = \pi/2$ mellett. A következő bekezdésben röviden vázoljuk a gondolatmenetet.

Ismert, hogy a sine–Gordon lélegzők a szoliton-antiszoliton szórásamplitúdóban megjelenő kötött állapotokként bukkannak fel, váltakozó C-paritással:⁴ $B_n^{(-1)^n}$. A szerzők állítása szerint ez a sine–Gordon-modell egy nagyon különleges sajátossága, mely tehát csak $\lambda = 0$ esetén áll fenn; egyéb esetben léteznek ezen lélegzők „rossz” C-paritású $B_n^{(-1)^{n+1}}$ párjai is, de azok lecsatolódnak a modellről, azaz hármass csatolásai

$$f_{s\bar{s}}^{B_n^{(-1)^{n+1}}} = 0 \tag{2.77}$$

tulajdonságúak. Ebből következően minden n -re csak egy pólus jelenik meg az $s\bar{s}$ csatornában (váltakozó paritással), hiszen a másik reziduum eltűnik. To-

⁴A töltéskonjugáció szoliton \leftrightarrow antiszoliton cserét jelent.



2.9. ábra. Az RSOS₃ modell vákuumszerkezete

vábbmenve megmutatják, hogy ezen B_n^\pm lélegződublettek figyelembevételével egy módosított formfaktor-perturbációs számítás *ad* lineáris korrekciót a lélegzőtömegekhez, mégpedig a dublett tagjainak azonos nagyságút de ellentétes előjelűt, egybecsengően a (2.64) szemiklasszikus eredményükkel. Egy k -csavart modellben tehát, ahol a térváltozó azonosítása k periódus után —

$$\phi \sim \phi + \frac{2\pi}{\beta}k \quad (2.78)$$

szerint — történik, minden lélegzőből $2k$ példányt jósolnak, melyek fele lecsatolódik a modelltől.

Ezzel az elképzeléssel azonban súlyos problémák vannak. A sine–Gordon-modell spektruma már számos alapos TCSA-vizsgálat tárgya volt, de a fenti hipotetikus „rossz” paritású állapotok sehol sem bukkantak fel, pedig a Hilbert-tér az UV határesetet képező konform térelmélet minden kinematikailag megengedett állapotát tartalmazta (eltekintve a véges energialevágástól, ami azonban ilyen típusú „intelligens” válogatásért nem tehető felelőssé). Ha β -t a $\beta = \sqrt{4\pi}$ szabadfermion-ponttól csökkenteni kezdjük, a TCSA-spektrumon szépen követhető a lélegzőállapotok megjelenése. Az $s\bar{s}$ állapotokat azonosítani tudjuk energiájuk térfogatfüggése alapján az 1.5.3. fejezetben már alkalmazott eljárással, a paritásukat is beleértve. Mikor β átlépi az n -edik lélegző megjelenéséhez tartozó küszöböt, pontosan egy (illetve a k -csavart modellben k) $(-1)^n$ C-paritású korábbi $s\bar{s}$ -állapot kerül aszimptotikusan a $2M$ energiahatár alá, bármiféle extra állapot társasága nélkül (M a szolitontömeg).

Egy lehetséges kibúvó természetesen akad: gondolhatunk arra, hogy a TCSA által használt kváziperiodikus peremfeltétel zárja ki a spektrumból a szóban forgó állapotokat, az összes lélegzőállapotnak csak a felét hagyva meg. De még ha így lenne is, a mért tömegértékeknek a valódi λ -függést kell tükrözniük, ezért az a tény, hogy a numerikus eredményeink nagyon erősen a lineáris korrekció létezése ellen szólnak, erős érv marad az idézett hipotézis ellenében.

[32] felvet továbbá egy lehetséges analógiát az RSOS₃ modellel (ami a trikritikus Ising-modell faktorizált szóráselmélete) a lélegzőállapotok duplázódásának magyarázatára. A potenciál három minimummal rendelkezik, mint azt a 2.9. ábra illusztrálja. A középső minimumnak megfelelő vákuumállapot felett

a bootstrap-eljárás két „lélegzőt” mutat ki, melyek értelmezhetők a középső vákuumból valamelyik szélsőbe menő kink és az onnan visszatérő antikink kötött állapotaiként. A sine–Gordon-analógia abban állna, hogy bár a sine–Gordon potenciál periodikus, így végtelen sok minimummal rendelkezik, de mindegyik minimumnak két szomszédja van, akár csak az RSOS₃ középső minimumának.

Ez a felvetés azonban figyelmen kívül hagyja, hogy a sine–Gordon-modellben a térváltozó

$$\phi \sim \phi + \frac{2\pi}{\beta} \quad (2.79)$$

azonosítása miatt a potenciálnak valójában csak egyetlen minimuma van, és a spektrumban emiatt egyetlen jól definiált vákuumállapot. Emiatt itt nincs értelme a „két szomszédos minimumról” beszélni, mint az RSOS₃ modell esetében, melynek három minimuma három külön energiaszintként jelentkezik a véges térfogatú spektrumban (a térfogat növelésével a felhasadás exponenciálisan csökken). Ezzel szemben a sine–Gordon-modell a nagy térfogatú határesetben is határozottan egyetlen vákuummal rendelkezik, illetve a k -csavart modell k darab (egy körön elrendezhető) vákuummal. Ezek a TCSA-spektrumban is megjelennek, például az 1.2. ábrán látható, amint a második vákuum exponenciálisan hozzásimul a valódi vákuumot képviselő vízszintes tengelyhez.

Összefoglalásképpen megállapíthatjuk, hogy az idézett, extra lélegzőállapotokat jósló elméleti megfontolások nem megalapozottak,⁵ a numerikus vizsgálataink pedig azt mutatják, hogy a modell dinamikája nagy pontossággal leírható az szokásos formfaktor-perturbációszámítással, bármiféle módosítás nélkül.

2.8. Fázisszerkezet

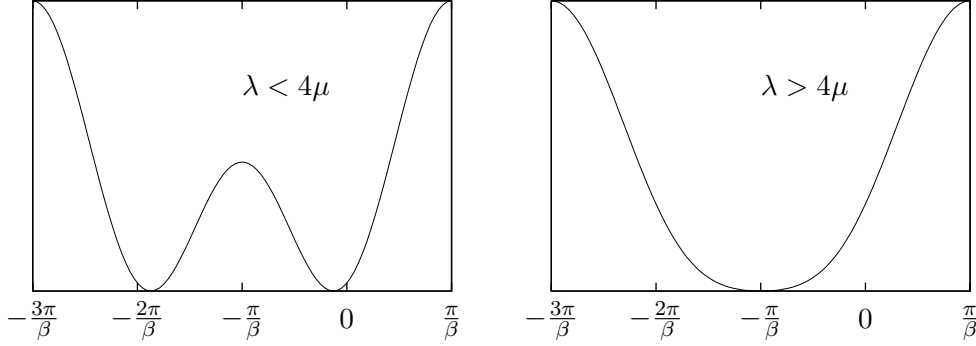
Láttuk tehát, hogy $\eta = 0$ -nál az $\alpha = \beta/2$ frekvenciaarányú kétfrekvenciás sine–Gordon-modell két degenerált vákuummal rendelkezik, míg $\eta = 1$ -nél egyetlen alapállapota van. Ez arra utal, hogy valahol az intervallum belsejében fázisátalakulás játszódhat le. Általános paraméterértékeknél azonban a degeneráció $\eta > 0$ esetén azonnal megszűnik, vagyis az $\eta = 0$ pont ebben az értelemben egyedülálló. A 2.6.2. fejezetben láttuk viszont, hogy ha δ -t fundamentális tartomány végén, adott esetben

$$\delta = \frac{\pi}{2} \quad (2.80)$$

értékűnek választjuk, a (2.37) első rendű vákuumenergia-korrekciónak eltűnik.

A alábbiakban amellett érvelünk, hogy a vákuumok energiakülönbsége minden esetben 0 marad, és egy $\eta = \eta_{\text{kritikus}}$ értéknél másodrendű fázisátalakulás

⁵Később a szerző maga is elismerte, hogy ez a konklúziója hibás volt [35].



2.10. ábra. Másodrendű fázisátmenet a klasszikus potenciálban

következik be a modellben. Mivel a vákuumenergia-korrekción minden perturbatív járuléka eltűnik, az átmenet teljes egészében a nemperturbatív tartományba esik, ahol nincs módunkban formfaktor-perturbációs számítást alkalmazni.

2.8.1. Landau–Ginzburg-analízis

[25] nyomán vizsgálatainkat a (2.12) klasszikus potenciál $\delta = \pi/2$ esetre specializált

$$U(\phi) = -\mu \cos \beta\phi + \lambda \sin\left(\frac{\beta}{2}\phi\right) \quad (2.81)$$

alakjával kezdjük. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a μ és λ csatolások pozitívak, valamint a potenciál $4\pi/\beta$ periódusa miatt ϕ fundamentális tartományát

$$-\frac{3\pi}{\beta} \leq \phi < \frac{\pi}{\beta} \quad (2.82)$$

módon választhatjuk. A fenti potenciál rendelkezik a

$$\phi \leftrightarrow -\frac{2\pi}{\beta} - \phi \quad (2.83)$$

diszkrét \mathbb{Z}_2 szimmetriával, és elemi függvényvizsgálattal megállapítható, hogy a $\lambda = 4\mu$ pontban a 2.10. ábra szerinti, másodrendű fázisátalakulásra jellemző viselkedést mutat. Mivel μ és λ klasszikus dimenziói $x_\beta = x_\alpha = 2$, a (2.26) definíció az

$$\eta = \frac{\lambda^2}{\mu^2 + \lambda^2} \quad (2.84)$$

alakra egyszerűsödik, és a fázisátalakulási pont helyére az

$$\eta_{\text{kritikus}}(\beta = 0) = \frac{16}{17} \quad (2.85)$$

klasszikus értéket kapjuk.

A (2.83) \mathbb{Z}_2 szimmetria fényében akár ki is mondhatnánk, hogy a kétfrekvenciás sine–Gordon-modell fázisátalakulása Ising univerzalitási osztályú, de kvantumelméleti szinten nem árt kissé óvatosabbnak lennünk [27]. A problémát $U(\phi)$ renormálódása jelenti: a fázisszerkezet meghatározásához nem a klasszikus, hanem a kvantum-effektívpotenciált kell alapul vennünk. A periodicitás és a \mathbb{Z}_2 szimmetria azonban erősen megszorítja a renormálás során esetleg fellépő új potenciáltkag alakját: a szóba jöhető

$$\cos(r\beta\phi) \quad r \in \mathbb{Z} \quad \text{illetve} \quad (2.86)$$

$$\sin(r\beta\phi) \quad r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \quad (2.87)$$

tagok konform súlyai

$$\Delta_r^\pm = \frac{r^2\beta^2}{8\pi} \quad (2.88)$$

szerint nőnek, vagyis az új tagok r növekedtével egyre kevésbé relevánsak.

Tekintsük most közelebbről az első két lehetséges új tagot! A korábbi [27] vizsgálatok szerint a $\sin\left(\frac{3\beta}{2}\phi\right)$ tagnak nincs hatása a fázisátmenet jellegére, csak a kritikus pont helyét változtatja. A $\cos(2\beta\phi)$ tag viszont — mely $\beta^2 < 2\pi$ esetén releváns perturbáló operátor — az együttthatójától függően a másodrendű fázisátalakulást elsőrendűvé tudja változtatni. Ezen két új tag figyelembevételével az effektív potenciál az

$$U_{\text{eff}}(\phi) = -\mu \cos \beta\phi + \lambda \sin \frac{\beta}{2}\phi + \kappa \sin \frac{3\beta}{2}\phi + \nu \cos 2\beta\phi \quad (2.89)$$

alakot ölti, melyben κ -t és ν -t a modell dinamikája határozza meg μ és λ függvényében, de kifejezésük jelenleg nem ismert. A másodrendű fázisátalakulás létezésének feltételei

$$U_{\text{eff}}''(\phi)\Big|_{\phi=-\frac{\pi}{\beta}} = 0 \quad U_{\text{eff}}^{(4)}(\phi)\Big|_{\phi=-\frac{\pi}{\beta}} > 0, \quad (2.90)$$

mert a \mathbb{Z}_2 -szimmetrikus minimum $\phi = -\pi/\beta$ -nál található. Ezekből az együttthatókra a

$$-4\mu + \lambda - 9\kappa - 16\nu = 0 \quad 16\mu - \lambda + 81\kappa + 256\nu > 0 \quad (2.91)$$

explicit feltételek adódnak. $\kappa = \nu = 0$ mellett visszakapjuk, hogy a klasszikus potenciálban $\lambda = 4\mu$ a fázisátmenet helye, és hogy a negyedik derivált valóban pozitív (hiszen feltettük, hogy μ és λ pozitívak).

Tegyük most úgy, mintha κ és ν független paraméterek lennének, és változtassuk λ -t! A kritikus pont helye az első feltételből

$$\lambda_{\text{kritikus}} = 4\mu + 9\kappa + 16\nu, \quad (2.92)$$

miből következően a másodrendűség feltétele

$$\mu + 6\kappa + 20\nu > 0. \quad (2.93)$$

Három következtetést vonhatunk le ebből:

- A paramétertérben bőven marad hely másodrendű fázisátalakulás számára az effektív potenciálban megjelenő magasabb frekvenciájú tagok mellett is.
- A $\sin\left(\frac{3\beta}{2}\phi\right)$ tag is megváltoztathatja a fázisátmenet rendjét, ha elég nagy κ együtthatóval bukkan fel, mint az a 2.11. ábrán látható. Rögzítsük a $\kappa = -2/5\mu$ és $\nu = 0$ paramétereket, majd kezdjük el λ -t 0-ról növelni! Kezdetben csak a két, \mathbb{Z}_2 szimmetriát spontán sértő vákuumunk van. $\lambda = 3/5\mu$ -nél metastabil állapotként megjelenik a szimmetriaőrző vákuum, majd $\lambda = 13/8\mu$ elérésekor degenerálttá válik a szimmetriasértő vákuumokkal: ez az elsőrendű fázisátalakulás úgynevezett *koegzisztencia* pontja. $\lambda > 13/8\mu$ -re a szimmetrikus vákuum válik az igazi alapállapottá, és végül a két metastabil vákuumállapot $\lambda = 61/30\mu$ értéknél teljesen eltűnik.
- További, magasabb rendű deriváltak is eltűnhetnek a fázisátalakulási pontban, trikritikus, sőt, tetrakritikus pontok megjelenéséhez vezetve. Még magasabb frekvenciájú potenciátagok tetszőleges rendű multikritikus pontok fellépését is lehetővé teszik [36].⁶

Természetesen, mint fentebb említettük, a kétfrekvenciás sine–Gordon-modellben ezen magasabb frekvenciájú tagok együtthatóit a dinamika határozza meg, vagyis a modell a periodicitást és a \mathbb{Z}_2 szimmetriát tiszteletben tartó effektív hatás paramétereinek terében egy rögzített felületen mozoghat csak. Mivel a fázisátmenet pontja perturbatív technikákkal elérhetetlen, a pontosabb vizsgálathoz nemperturbatív módszerekhez kell folyamodnunk. A $\beta = 4\pi$ (azaz $p = 1$) speciális esetben az általánosított Ashkin–Teller-modellre képezéssel már sikerült a másodrendű fázisátalakulás létezését bebizonyítani [27]. Az általános $0 < p < 1$ esetben viszont, mivel a modell nem integrálható, az egyetlen alkalmazható eljárás a TCSA marad.⁷

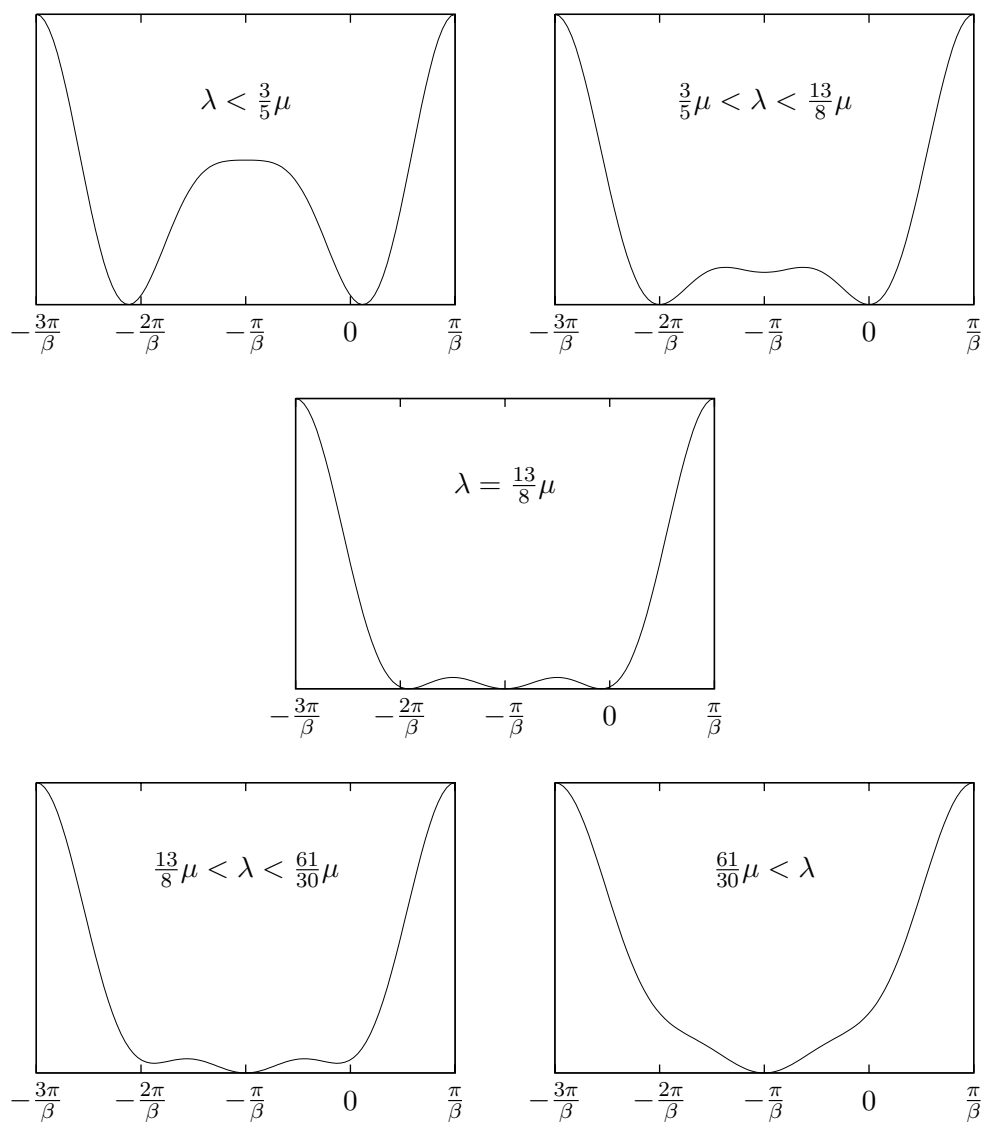
2.8.2. Szignatúrák véges térfogatban

Lévén a TCSA véges térfogatban használható numerikus módszer, körül kell járnunk, hogy miként azonosíthatjuk a különböző típusú átalakulásokat egy véges térfogatú modell energiaszintjeinek vizsgálatával.

⁶Ezeket az eredményeket [31] megjelenése után, arra építve kapta a szerző.

⁷A felső határ az UV divergenciák elkerülését célozza [15, 16].

2. A KÉTFREKVENCIÁS SINE-GORDON-MODELL



2.11. ábra. Elsőrendű fázisátmenet a potenciálban $\kappa = -2/5\mu$ és $\nu = 0$ mellett

Másodrendű fázisátalakulás

Bár a következő gondolatmenet minden nehézség nélkül általánosítható egyéb esetekre is, az alábbi tárgyalás az egyszerűség kedvéért \mathbb{Z}_2 szimmetriájú átmenetre vonatkozik. Így a sértett fázisban végtelen térfogatban két degenerált vákuumot találunk. Véges L esetén a vákuumok közötti alagutazás összekeveri az állapotokat és megszünteti a degenerációt: az alacsonyabban fekvő állapot lesz a valódi vákuum, míg a másik egy magasabban fekvő gerjesztett állapot. A kettő közti energiakülönbség exponenciálisan kicsi — $\mathcal{O}(e^{-L})$ — az $L \rightarrow \infty$ esetben.

A sértetlen fázisban egyetlen vákuum van, és az első gerjesztett állapot általában valamilyen tömeges egyrészecske-állapot, mely aszimptotikusan m tömeghézaggal rendelkezik a vákuum felett. Ennélfogva az alapállapot és az első gerjesztett állapot energiakülönbsége a (2.53) szerint m -hez tart, ha $L \rightarrow \infty$.

Az átmenethez tartozó kritikus paraméterértéket jelöljük η_{kritikus} -sal, mint a kétfrekvenciás sine–Gordon-modell iménti tárgyalásánál. Ha az m tömeghézagot η függvényének tekintjük, és feltesszük, hogy a sértett fázis $\eta < \eta_{\text{kritikus}}$, a sértetlen pedig $\eta > \eta_{\text{kritikus}}$ paraméterrel rendelkezik, a jellegzetes viselkedés

$$m(\eta) = 0, \quad \text{ha } \eta < \eta_{\text{kritikus}} \quad (2.94)$$

$$m(\eta) > 0, \quad \text{ha } \eta > \eta_{\text{kritikus}} \quad (2.95)$$

alakban foglalható össze. $\eta = \eta_{\text{kritikus}}$ esetén L változtatásával az UV ($L \rightarrow 0$ konform térelmélet és az IR ($L \rightarrow \infty$) fixpont között interpolálunk, mely utóbbi egy konform- és egy tömeges elmélet együttesét jelenti. Ezért a spektrum bizonyos állapotai

$$E_{\Psi}(L) - E_{\text{vákuum}}(L) = \frac{2\pi(\Delta_{\Psi}^{\text{IR}} + \bar{\Delta}_{\Psi}^{\text{IR}})}{L} + \mathcal{O}(L^{-1-\epsilon}) \quad \epsilon > 0 \quad (2.96)$$

nagyterfogatú aszimptotikával rendelkeznek. Ezek a $|\Psi\rangle$ állapotok az IR fixpont konform térelméletének Δ^{IR} súlyokkal jellemzett konform családjába rendeződnek, és $L \rightarrow \infty$ -re lecsatolódnak a spektrum tömegesnek maradó másik részéről. Ezen állapotok azonosítása teszi lehetővé az IR konform térelmélet jellemzőinek meghatározását, mint azt rövidesen látni fogjuk.

Elsőrendű fázisátalakulás

Az elsőrendű átmenetek mindig metastabil állapotok megjelenésével és eltűnésével járnak, mint az például a 2.11. ábrán látható. A 2.6.2. fejezetben már bemutattuk, hogy az ilyen állapotok különböző meredekségű platókként jelennek meg a véges térfogatú TCSA-spektrumban. A koegzisztencia pontban a három vákuumállapot éppen azonos energiasűrűséggel rendelkezik. Ha korábban a $|+\rangle$ és $|-\rangle$ szimmetriasértő vákuumok energiasűrűsége volt a kisebb,

akkor ezen a ponton szerepet cserélnék a $|0\rangle$ szimmetriaórző vákuummal, és a továbbiakban az utóbbi lesz az igazi alapállapot. Ez a rendkívül jellegzetes viselkedés általában könnyen felismerhető a véges térfogatú spektrumban.

Az elsőrendű fázisátalakulások azonban különböző erősségűek lehetnek, és közismert, hogy egy gyenge elsőrendű átmenetet nehéz megkülönböztetni egy másodrendűtől. Jelöljük ugyanis $\eta_{\text{alsó}}$ -val a $|0\rangle$ metastabil állapot megjelenésének, és $\eta_{\text{felső}}$ -vel a $|\pm\rangle$ metastabil állapotok eltűnésének pontját! Másodrendű átalakulás esetén

$$\eta_{\text{alsó}} = \eta_{\text{felső}}. \quad (2.97)$$

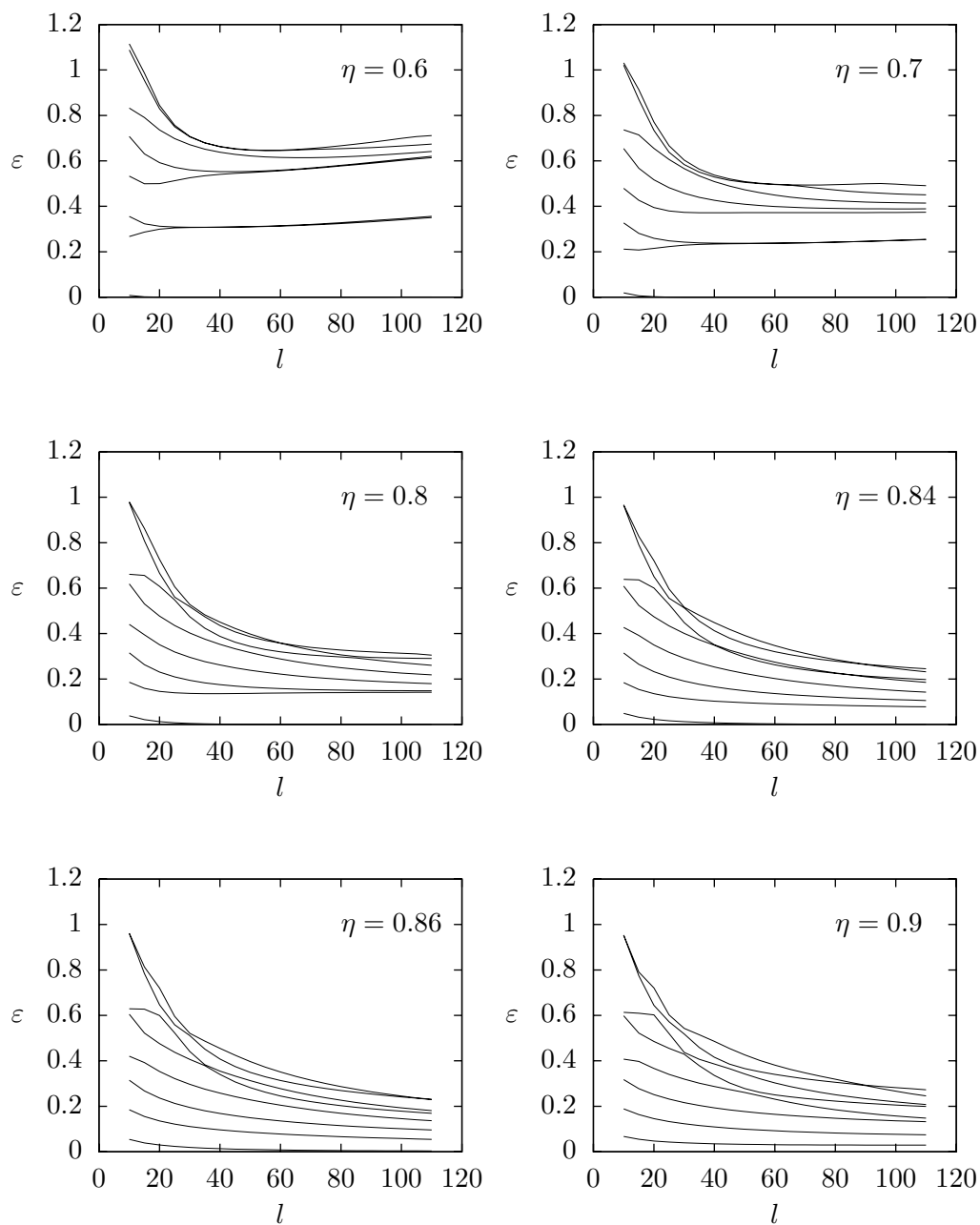
Ha az $\eta_{\text{felső}} - \eta_{\text{alsó}}$ különbség kicsi, egy numerikus vizsgálatban η léptetésével (vagy egy kísérlet paramétereinek beállításakor) könnyen kihagyhatjuk a közbülső tartományt a vizsgálatból, és akkor nem szerzünk tudomást a metastabil állapotok létezéséről. Hasonlóan, ha a vákuumok $U(\phi_0) - U(\phi_{\pm})$ energiasűrűségkülönbsége kicsi, nehéz észrevenni az állapotok meredekség szerinti kettéválását, mert az esetleg csak olyan nagy térfogaton válna számottevővé, ahol a TCSA-hibák már lehetetlenné teszik az érdemi vizsgálatokat. Ezen okokból kifolyólag sosem fogunk tudni megkülönböztetni egy kellően gyenge elsőrendű fázisátalakulást egy másodrendűtől, sem numerikusan, sem kísérletileg, kizárólag a modell egzakt megoldásával, de arra egyelőre nem látszik remény.

A modell viselkedése

A fentebb tárgyalt klasszikus jóslatokat TCSA segítségével fogjuk ellenőrizni, valamint tisztázni szeretnénk az átalakulás rendjét és univerzalitási osztályát is. Mindehhez az l dimenziótlan térfogat-paraméter korábbiaknál jóval szélesebb tartományában kell majd pontos méréseket végeznünk. Erre nincsen remény a $p > 1$ (azaz $\beta^2 > 4\pi$) taszító tartományban, ahol a TCSA UV-divergens: bár abszolút energiaértékekre nincs szükségünk, az elérhető pontosság ott túlságosan lecsökken. Praktikusan a vizsgálható tartomány még szűkebb, $\beta^2 < 8\pi/3$ értékek mellett sikerült csak értékelhető eredményekre jutni a hozzáférhető számítási kapacitással. Az $\eta = 0$ sine–Gordon-modellben ez kettő vagy több lélegzőt jelent a spektrumban.

A fázisátalakulás rendjének meghatározásához figyelemmel kell kísérnünk a spektrum fejlődését η folyamatos változtatása mellett. A különböző β értéknél elvégzett vizsgálatok nem mutatják jelét az elsőrendű fázisátalakulásra jellemző metastabil állapotoknak, a viselkedés mindig a 2.12. ábra szerinti. A kapott spektrumok három osztályba sorolhatók:

- $\eta < 0.8$ esetén tisztán látszik a kétszeresen degenerált vákuumállapot és a fölöttük haladó — szintén kétszeresen degenerált — első néhány tömeges állapot.



2.12. ábra. A kétfrekvenciás sine-Gordon-modell spektrumának fejlődése $\eta = 0$ és $\eta = 1$ között (első 8 állapot, $\beta = \frac{8\sqrt{\pi}}{7}$, $\alpha = \frac{\beta}{2}$, $\delta = \frac{\pi}{2}$)

- $\eta > 0.9$ esetén is tömeges a spektrum, de nem figyelhető meg degeneráció az alul fekvő állapotokon.
- Az átmeneti tartományban, $\eta \approx 0.84$ mellett a spektrum szerkezete átalakul, nincsenek véges tömeghézagot mutató vonalak, helyettük folyamatos csökkenés figyelhető meg a teljes térfogattartományban. Az alapállapot és a gerjesztett állapotok degenerációja megszűnik.

Sehol sem látunk a 2.2. ábrán megfigyelhetőhöz hasonló, metastabil állapotokra jellemző lineárisan emelkedő vonalakat, ezért a fázisátalakulást másodrendűként azonosítjuk.

2.8.3. A kritikus pont keresése

η_{kritikus} értékének meghatározásához a következőképpen járunk el: miközben η -val bejárjuk az átmeneti régiót, folyamatosan ellenőrizzük, hogy a TCSA Hamilton-operátor harmadik és első sajátértékének $\varepsilon_2(l) \equiv \mathcal{E}_2(l) - \mathcal{E}_0(l)$ különbsége monoton csökken-e a kiterjesztett l tartományban. Mivel ez a különbség az $\eta = 0$ és az $\eta = 1$ sine–Gordon-modellben is egy alul fekvő lélegző tömegét jelenti, monoton csökkenése azt jelzi, hogy ez a lélegző tömegtelenné vált. Mivel ez kizárólag $\eta = \eta_{\text{kritikus}}$ esetén igaz, jobban használható feltételt jelent, mint a vákuumok degenerációjának megszűnése (azaz $\varepsilon_1 \neq 0$), mert az a szimmetrikus fázisban mindig fennáll. Természetesen a végül választott η_{kritikus} értéknél $\varepsilon_1(l)$ -nek exponenciálisnál lassabban — (2.96) alapján $\mathcal{O}(1/l)$ szerint — kell lecsengenie nagy l -ekre.

A keresés eredménye a 2.13. ábrákon látható, $\beta = \sqrt{4\pi}/r$ három különböző értékére. Mindhárom ábra a fenti kritériumok szerinti legjobb η értéknél készült. Hogy az állapotok jobban elváljanak egymástól, energiájukat $l/(2\pi)$ -vel beszorozva ábrázoltuk. (2.96) átrendezésével és $E_i = M\mathcal{E}_i$, illetve $l = ML$ figyelembevételével adódik, hogy az így készült ábrákon a $\Delta^{\text{IR}} + \bar{\Delta}^{\text{IR}}$ konform energiák (skáladimenziók) vízszintes vonalakként jelennek meg. A $c = 1/2$ Ising-modell első 7 gerjesztett állapotának megfelelő vonalakat a 2.7. táblázat adatai alapján be is rajzoltuk. Mindhárom β érték mellett azt látjuk, hogy a vákuum feletti első két gerjesztett állapot viszonylag jól illeszkedik az Ising-modell jóslatára. A magasabb gerjesztett állapotok energiaértékben igazi egyezést nem mutatnak, de az energiakülönbségek mintázata a jóslatnak megfelelő, beleértve a degenerációk hiányát is, mely az Ising-modell nullvektor-szerkezetéből adódik. A vonalak lefutása azt sugallja, hogy a magasabb állapotok még nagyobb térfogatértékeknél jutnának el a skálázó tartományukba, de — különösen nagyobb β -k mellett — a TCSA-hibák túlságosan gyorsan nőnek ahhoz, hogy ezt láthassuk.

Ha tehát szeretnénk számszerűsíteni az univerzalitási osztályra vonatkozó sejtésünket, kénytelenek leszünk pontosabban is leírni a véges térfogatú spekt-

állapot	konform energia
$ 0\rangle$	0
$ \sigma\rangle \equiv \frac{1}{16}, \frac{1}{16}\rangle$	$\frac{1}{8}$
$ \epsilon\rangle \equiv \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$	1
$L_{-1}\bar{L}_{-1} \sigma\rangle$	$2\frac{1}{8}$
$L_{-1}\bar{L}_{-1} \epsilon\rangle$	3
$L_{-2}\bar{L}_{-2} 0\rangle$	4
$L_{-2}\bar{L}_{-2} \sigma\rangle \oplus L_{-1}^2\bar{L}_{-1}^2 \sigma\rangle$	$4\frac{1}{8}$
$L_{-2}\bar{L}_{-2} \epsilon\rangle \oplus L_{-1}^2\bar{L}_{-1}^2 \epsilon\rangle$	5

2.7. táblázat. Az Ising-modell első 8 állapotának skáladimenziója

rumot a kritikus trajektória mentén, mint (2.96), illetve valamilyen módon kezelni a mérésekhez használt η valódi η_{kritikus} -tól való eltéréséből származó hatásokat.

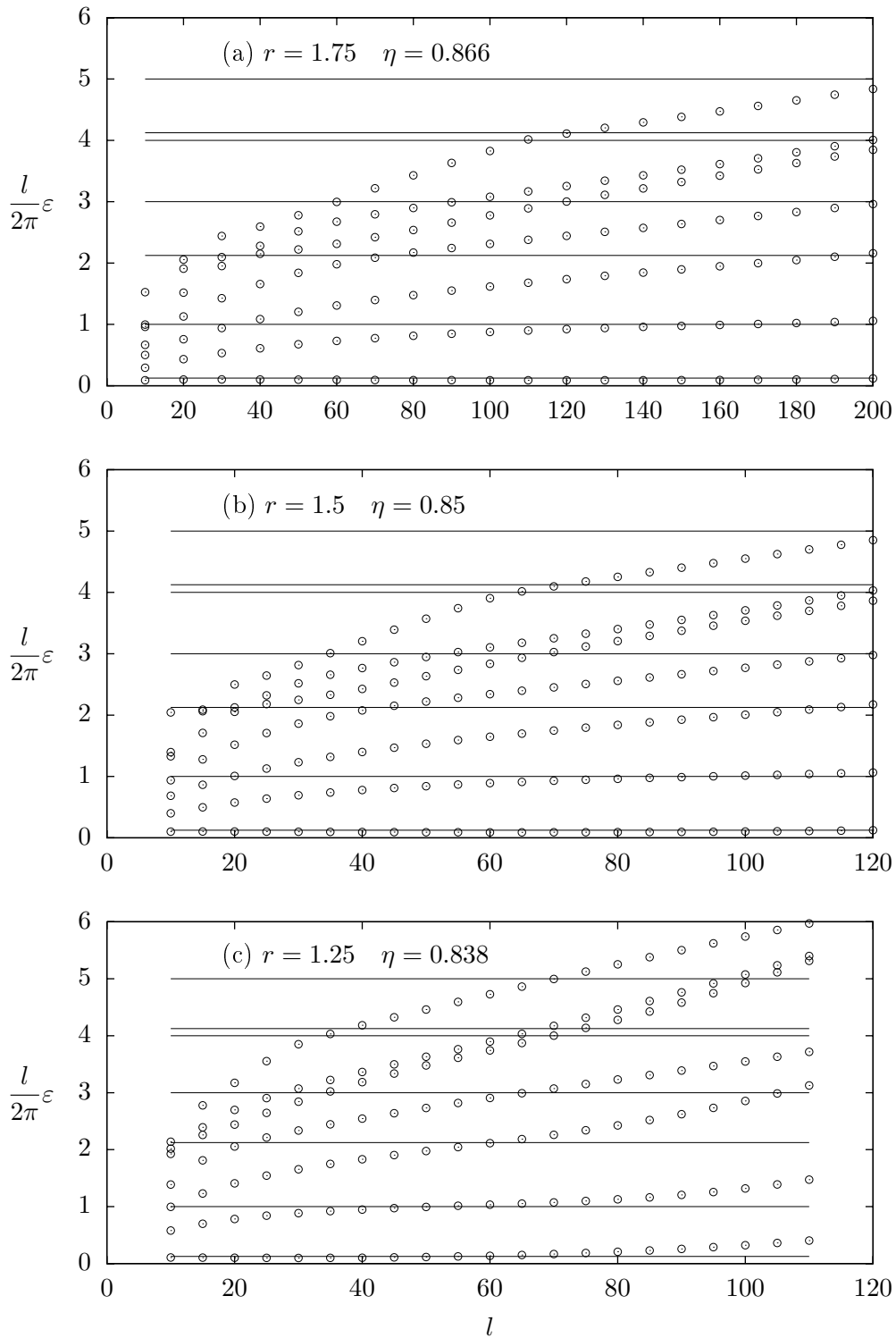
2.8.4. A kritikus trajektória

A tárgyaláshoz feltesszük, hogy az IR fixpontban található konform térelmélet a kritikus Ising-modell, ennek Hilbert-terét és operátortartalmát tekintjük a vizsgálat keretének. Az így kapott jóslatokat vetjük aztán össze a numerikus eredményekkel.

Koncentráljunk először az $\eta = \eta_{\text{kritikus}}$ esetén fellépő végesméret-korrekciókra! Nagy térfogatban elhanyagolható az IR fixpont tömeges- és tömegtelen módusai közötti csatolás, ezért úgy tekinthetjük, hogy l -el nullától végtelen felé haladva egy UV konform fixpontból egy IR konform fixpontba tartunk. Mivel fixpontba csak irreleváns irányból folyhatunk be, ezért ebből a nézőpontból az interpoláló kritikus elmélet a konform Ising-modell egy irreleváns ($\Delta > 1$) perturbációjának tekinthető, melyet az

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{Ising}} + g \int d^2z (\Psi(z, \bar{z}) + \text{magasabb dimenziójú terek}) \quad (2.98)$$

nem renormálható hatás ír le. A különböző irányok $\Psi(z, \bar{z})$ különböző választásainak felelnek meg. $\Psi(z, \bar{z})$ a primér terek irreleváns spintelen leszármaztatottjaival fejezhető ki, és mivel az $\alpha = \beta/2$ frekvenciaarányú kétfrekvenciás sine-Gordon-modell $\delta = \pi/2$ esetén minden η értéknél \mathbb{Z}_2 -szimmetrikus, csak az energiaoperátor $\partial\bar{\partial}\epsilon(z, \bar{z})$ és magasabb, illetve az egységoperátor $T(z)\bar{T}(\bar{z})$



2.13. ábra. Kritikus TCSA-spektrumok

és magasabb leszármaztatottjai jöhetnek számításba ($T(z)$ és $\bar{T}(\bar{z})$ az Ising-modell energiaimpulzus-tenzorának holomorf és antiholomorf komponensei). Felidézve az általános TCSA Hamilton-operátor (A.7)

$$H = \frac{2\pi}{L} \left(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12} + \frac{gL^{2-2\Delta_\Psi}}{(2\pi)^{1-2\Delta_\Psi}} \Psi(1, 1) \right) \quad (2.99)$$

alakját (Ψ spintelenségét feltettük), látjuk, hogy nagy, de véges l esetén $E_i(L) - E_0(L)$ vezető korrekciója a legkevésbé irreleváns operátorból származik:

$$\varepsilon_i(l) = \frac{E_i(L) - E_0(L)}{M} = \frac{2\pi}{l} (\Delta_i^{\text{IR}} + \bar{\Delta}_i^{\text{IR}}) + A_i^\Psi l^{1-2\Delta_\Psi} + \dots, \quad (2.100)$$

tehát a mi esetünkben

$$\varepsilon_i(l) = \frac{2\pi}{l} (\Delta_i^{\text{IR}} + \bar{\Delta}_i^{\text{IR}}) + A_i^{\partial\bar{\partial}\epsilon} l^{-2} + \dots \quad (2.101)$$

viselkedésű lesz a vezető korrekció (ha ez a tag valamiért eltűnne, $A_i^{T\bar{T}} l^{-3}$ következne soron).

Numerikusan természetesen sosem tudjuk η -t pontosan η_{kritikus} -ra állítani, és még ha tudnánk is, a Hilbert-tér levágásából eredő TCSA-hibák akkor is eltaszítanak az UV és az IR konform elméleteket összekötő kritikus trajektóriától. Az Ising-modell oldaláról ez azt jelenti, hogy valamilyen releváns perturbáció is be van kapcsolva, amit szintén figyelembe kell vennünk a nagytérfogató spektrum leírásánál. Az Ising-modell egyetlen releváns operátort tartalmaz, mely tiszteletben tartja a \mathbb{Z}_2 szimmetriát: az $\epsilon(z, \bar{z})$ energiaoperátort. A TCSA Hamilton-operátorban egy ilyen típusú perturbáló tag $B_i^\epsilon + C_i^\epsilon l$ korrekciót hoz az energiakülönbségekbe.⁸ Mindezt összefoglalva, nagy, de véges l -ekre az energiaszintek térfogatfüggését

$$\varepsilon_i(l) = B_i + \frac{2\pi}{l} D_i + A_i l^{-2} + C_i l + \dots \quad (2.102)$$

alakúnak várjuk (az egyes konstansokat „keltő” operátorok jelölését — mivel az a továbbiakban lényegtelen — elhagyva).

A következőben a (2.102) formulát fogjuk a TCSA-vonalakra illeszteni. Minden tagját megtartjuk, mert a numerikusan hozzáférhető átmeneti l -tartományban dolgozunk. Szemléletesen arról van szó, hogy egy $\eta \approx \eta_{\text{kritikus}}$ trajektórián eléggé megközelítjük az IR fixpontot ahhoz, hogy már az IR konform térelmélet tulajdonságai határozzák meg a spektrumot, és még mielőtt a mindig

⁸Bár nagy térfogatban a második tag tűnik dominánsnak, a C_Ψ^ϵ együttható — melynek pCFT-kifejezése másodrendű — általában sokkal kisebb, mint a B_Ψ^ϵ állandó, így az általunk vizsgált l -tartományban mindkét tag egyformán lényeges lehet.

$$\beta = 8\sqrt{\pi}/7, \eta = 0.866$$

i	D_i	A_i	B_i	C_i
1	0.125 ± 0.002	-1.2 ± 0.3	-0.0034 ± 0.0001	$1.45 \cdot 10^{-5} \pm 6 \cdot 10^{-7}$
2	1.04 ± 0.03	-128 ± 8	0.0017 ± 0.0018	$9 \cdot 10^{-6} \pm 5 \cdot 10^{-6}$

$$\beta = 4\sqrt{\pi}/3, \eta = 0.850$$

i	D_i	A_i	B_i	C_i
1	0.1312 ± 0.0009	-1.35 ± 0.03	-0.0061 ± 0.0003	$2.6 \cdot 10^{-5} \pm 6 \cdot 10^{-6}$
2	1.03 ± 0.02	-74 ± 3	0.005 ± 0.002	$1.4 \cdot 10^{-5} \pm 9 \cdot 10^{-6}$

$$\beta = 8\sqrt{\pi}/5, \eta = 0.838$$

i	D_i	A_i	B_i	C_i
1	0.1455 ± 0.0005	-0.89 ± 0.05	-0.0145 ± 0.0005	$2.24 \cdot 10^{-4} \pm 9 \cdot 10^{-6}$
2	1.09 ± 0.02	-40 ± 2	-0.0015 ± 0.0031	$1.1 \cdot 10^{-4} \pm 2 \cdot 10^{-5}$

2.8. táblázat. Az első két gerjesztett állapot illesztése a kritikus spektrumban

jelenlévő releváns perturbáció eltaszítana bennünket egy tömeges fixpont felé, megmérjük (2.102) együtthatóit. Ha B_i és C_i értéke kicsinek adódik, D_i pedig az Ising-modell állapotainak skáladimenzióit közelíti, igazoltuk egy Ising univerzalitási osztályú másodrendű fázisátmenet jelenlétét.⁹

2.8.5. Numerikus eredmények

Skáladimenziók és UV-IR korrespondencia

A (2.102) formula 2.13. ábrák vonalaira történő illesztéséből kapott együtthatókat a 2.8. táblázat tartalmazza. Az Ising-modell $c = 1$ konform térelméletének ismeretében tudjuk, hogy az első gerjesztett állapot a σ spinoperátorhoz kell tartozzon $\Delta^\pm = 1/16$ konform súlyokkal, a második pedig az ϵ energiaoperátorhoz, $\Delta^\pm = 1/2$ konform súlyokkal. Ahogy a 2.7. táblázatról is leolvasható,

$$D_1 = \frac{1}{8} = 0.125 \qquad D_2 = 1 \qquad (2.103)$$

értékeket várunk. Az eredmények $\beta = 8\sqrt{\pi}/7$ mellett kiválóan megfelelnek ennek, nagyobb β értékek mellett viszont — mint az a TC-SA-eredményekkel

⁹Az alapállapot energiájának térfogatfüggéséből elvben a centrális töltés is meghatározható, de kiderül, hogy az illesztés c értékére nagyon kevésbé érzékeny, így csak kvalitatív eredményeket kapunk [31].

lenni szokott — már kevésbé jó az egyezés az egyre lassabb konvergencia miatt. Felhívjuk a figyelmet, hogy a táblázatban feltüntetett hibahatárok a nemlineáris illesztésből származó becslések, melyek nem tartalmazzák az esetleg sokkal nagyobb TCSA levágási hibákat.

Megvizsgálható az is, hogy az egyes vonalakhöz tartozó állapotokat mely operátorok keltik az UV-, illetve az IR elméletben. Előbbi a TCSA bemenő adata, hiszen a Hilbert-tér előállításakor pontosan tudjuk, hogy mely állapotot mely UV konform operátorral keltjük: például az első két gerjesztett állapot a

$$\cos \frac{\beta}{2} \phi \quad \text{illetve a} \quad \sin \frac{\beta}{2} \phi \quad (2.104)$$

operátorhoz tartozik. Az IR fixpontban a fentiek alapján ezek az állapotok a σ , illetve az ϵ operátorhoz tartozó állapotba folynak. Ez teljes összhangban áll a szóban forgó állapotok (2.83) \mathbb{Z}_2 paritásaival, valamint azzal, hogy σ páratlan, ϵ pedig páros operátora az Ising-modellnek, valamint, hogy mind $\sin \frac{\beta}{2} \phi$, mind pedig ϵ hőmérséklet típusú operátor, mely a kritikus állapottól távolítja a modellt. Ez az eredmény egybecseng a korábbi sejtésekkel is [27].

Fázisdiagram

Minden jel arra mutat, hogy β értékétől függetlenül másodrendű fázisátalakulással van dolgunk, valamilyen $\eta_{\text{kritikus}}(\beta)$ paraméterértéknél. A 2.8.2. fejezetben mondottak alapján természetesen mindig fennáll a kellően gyenge elsőrendű fázisátalakulás lehetősége, ezért szigorúan véve csak annyit mondhatunk, hogy az átalakulás másodrendű B_i és C_i $\eta = \eta_{\text{kritikus}}$ mellett mért eltűnésének pontosságáig. Másfelől, ha például egy integrálható elmélet egzaktul ismert energiaszintjeivel történő összehasonlítás útján megbecsüljük esetünkben a TCSA pontosságát, 10^{-2} – 10^{-3} nagyságrendű hibára jutunk, amit a 2.8. táblázat adataival összevetve azt kijelenthetjük, hogy a TCSA pontosságán belül a vizsgált fázisátalakulás másodrendű.

Mint a 2.8.1. fejezetben már láttuk, az átalakulás rendjét (2.91) jellegű egyenlőtlenségek szabályozzák. Egy nagyon gyengén elsőrendű fázisátalakulás ezen egyenlőtlenségek nagyon gyenge sérülése esetén valósulhat meg, ami szigorú feltételeket szab az effektív potenciál együtthatóira. Mivel azonban μ és λ ezeket egyértelműen meghatározza, egy ilyen finomhangolás valószínűtlennek tűnik.

Ettől függetlenül is mindig másodrendű kell legyen a fázisátalakulás a

$$32\pi/9 < \beta^2 < 8\pi \quad (2.105)$$

tartományban, mert ott az effektív potenciálhoz járuló minden új tag irreleváns ($\Delta_{3/2}^{\pm} > 1$), elég tehát a $\beta^2 < 32\pi/9$ tartományt tovább vizsgálni. Ez a TCSA

$\beta^2 < 4\pi$ konvergencia-tartományán belül esik, tehát a módszer elvben használható a teljes tartományban, de a konvergencia gyengesége miatt a $\beta^2 > 8\pi/3$ szakasz numerikusan számunkra egyelőre nem elérhető.

$\beta = 0$ környékén is másodrendű fázisátalakulást várunk, mert az elmélet itt szemiklasszikus, és emiatt az effektív potenciál korrekciói kicsik. Ismerjük a (2.85)

$$\eta_{\text{kritikus}}(0) = \frac{16}{17} \approx 0.941 \quad (2.106)$$

egzakt értéket is. Az intervallum másik végében, $\beta^2 = 8\pi$ -nél pedig a potenciál $\cos\beta\phi$ tagja válik irrelevánssá, ezáltal az elmélet mindig a szimmetrikus fázisban marad, tehát

$$\eta_{\text{kritikus}}(\sqrt{8\pi}) = 0. \quad (2.107)$$

Továbbá egy $\beta \rightarrow -\beta$ előjelváltás kompenzálható a térváltozó $\phi \rightarrow -\phi$ átdefiniálásával, amiből következően

$$\eta_{\text{kritikus}}(-\beta) = \eta_{\text{kritikus}}(\beta) \quad (2.108)$$

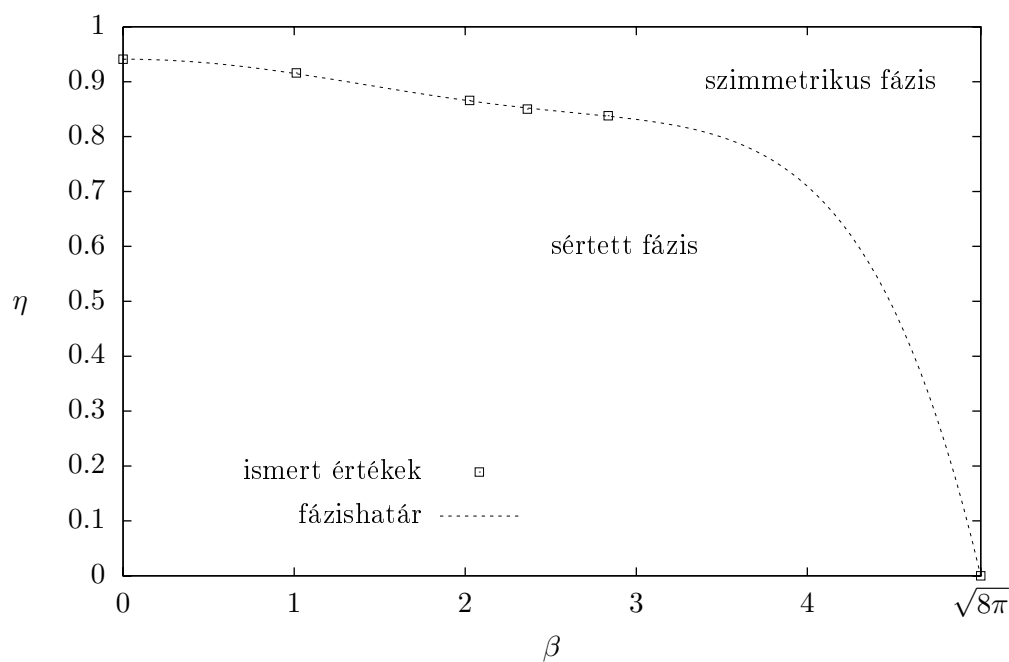
is fennáll. Mindezen információkkal és egy további TCSA-méréssel (eredménye: $\eta_{\text{kritikus}}(4\sqrt{\pi}/7) = 0.916 \pm 0.002$) kiegészítve eddigi adatainkat a 2.14. ábrán látható fázisdiagramot kapjuk, melyen a sértett- és a szimmetrikus fázis hozzávetőleges határát egy — az ismert pontokra illesztett — páros polinom jelzi.

2.9. Összefoglalás

A sine–Gordon-modell egy további koszinuszos potenciállal történő el látása alapjaiban változtatja meg a modell viselkedését. A kétfrekvenciás sine–Gordon-modell nem integrálható, így viszonylag kevés módszer áll rendelkezésünkre a vizsgálatához. Ezért első lépésként ellenőriztük, hogy a formfaktor-perturbációszámítás és a TCSA azonos eredményeket ad a modell két perturbatív tartományában, majd kiterjesztettük vizsgálatainkat a nemperturbatív tartományra is.

Elemeztük, hogy a TCSA-val kapott véges térfogatú spektrumban milyen jelek mutathatják fázisátalakulás lezajlását a modellben, és tárgyaltuk az első-, illetve másodrendű átalakulás megkülönböztetésének kérdéseit. Utóbbi esetben lehetőség nyílik az IR fixpont jellemzőinek meghatározására is, ha egy közel kritikus trajektória mentén sikerül eljutnunk abba a tartományba, ahol már ennek hatása dominál az energiaszintek viselkedésében.

Ennek fényében közelebbről is megvizsgáltuk az $1/2$ frekvenciaarányú modellben Delfino és Mussardo által megjósolt [25] másodrendű fázisátalakulást. Az irodalomban felbukkant [27] kételyekkel ellentétben úgy találtuk, hogy bár



2.14. ábra. Fázisdiagram

az effektív potenciál összes legalacsonyabb rendű korrekciós tagja képes lenne a fázisátalakulást elsőrendűvé változtatni, a vizsgált esetben ez nem történik meg, azaz a TCSA pontosságán belül minden β paraméterértékre másodrendű marad az átalakulás. A spektrum részletes vizsgálata továbbá azt mutatta, hogy a legalacsonyabb állapotok egy Ising-típusú IR fixpont által meghatározottak. Az UV- és IR állapotok megfeleltetését az irodalomban található [27] sejtésekkel megegyezőnek találtuk.

Mindeközben röviden kitértünk az eredményeinknek ellentmondó szemiklasszikus megfontolások kritikájára is. A finomabb numerikus analízis során két nagyságrenddel kizártuk a [32] által adott jóslatokat, majd rámutattunk az ott alkalmazott számítási módszer következetlenségeire.

3. fejezet

A szuperszimmetrikus sine–Gordon-modell

A sine–Gordon-modell szuperszimmetrikus kiterjesztése több szempontból is érdekes. Először is, kétdimenziós integrálható kvantumtérelmélet révén viselkedéséről analitikus és nemperturbatív eredmények széles köre áll rendelkezésünkre. Másfelől szuperszimmetrikus szolitonokat ír le, melyek újabban a magasabb dimenziós szuperszimmetrikus mértékelméletek keretében komoly érdeklődés tárgyát képezik [37]. Ezen túlmenően a szuperszimmetrikus sine–Gordon-modell saját jogán is számot tart érdeklődésre, mint azt a nemtriviális időszerű határfeltétellel ellátott változatával kapcsolatos kutatások jelzik.

Mindazonáltal a sine–Gordon-modell ezen integrálható deformációjáról jóval kevesebbet tudunk, mint az eredeti modellről. Bár az egzakt S-mátrixára vonatkozó sejtés [38] már nem új, helyességét korántsem igazolja annyi eredmény, mint a nem szuperszimmetrikus modell S-mátrixáét. Többek között a szolitontömeg kvantumkorrekciójáról is csak az elmúlt években vált világossá [39, 40, 41, 42], hogy BPS-jellegű tulajdonságot mutat, noha az elmélet csak $N = 1$ szuperszimmetriával rendelkezik. Ellentmondó eredmények találhatók az irodalomban a trikritikus Ising-modell (a legegyszerűbb nemtriviális szuperszimmetrikus integrálható térelmélet) vákuum- és kinkszerkezetével kapcsolatban is [43]. Ennek jelentőségét az adja, hogy a szuperszimmetrikus sine–Gordon-modell S-mátrixában a trikritikus Ising-modell írja le a szuperszimmetrikus struktúrát.

3.1. Hatás és diszkrét szimmetriák

A szuperszimmetrikus sine–Gordon-modellt az

$$\mathcal{A} = \int dx \int dt \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + m \bar{\Psi} \Psi \cos \frac{\beta}{2} \phi + \frac{m^2}{\beta^2} \cos \beta \phi \right) \quad (3.1)$$

hatással definiáljuk, ahol ϕ valós skalártér, Ψ Majorana-fermiontér, m egy tömegparaméter β pedig a csatolási állandó. Ez az elmélet $N = 1$ szuperszimmetrikus és végtelen sok kommutáló lokális megmaradó töltéssel rendelkezik [44], melyek túlélnek a kvantálást és lehetővé teszik a modell egzakt spektrumának és S-mátrixának megadását. A spinortérre a

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \gamma^0 \gamma^1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Weyl-reprezentációt használjuk, melyben a ψ_{\pm} komponensek határozott kiralitással rendelkeznek.

Az elmélet rendelkezik bizonyos diszkrét szimmetriákkal, melyek fontos szerepet játszanak a továbbiakban. Egyrészt a kölcsönhatási tag a bozontérben periodikus és páros, mely a

$$\phi \leftrightarrow \phi + \frac{4\pi}{\beta} \quad \text{illetve} \quad \phi \leftrightarrow -\phi \quad (3.4)$$

szimmetriákat hozza magával, melyek jelen vannak a nem szuperszimmetrikus sine–Gordon-modellben is. Másrészt a Lagrange-függvény invariáns a bozontér $2\pi/\beta$ félpériódussal történő eltolására, ha egyúttal megváltoztatjuk a fermionkomponensek relatív előjelét is, azaz

$$\phi \leftrightarrow \phi + \frac{2\pi}{\beta} \quad \text{miközben} \quad \Psi \leftrightarrow -\gamma_3 \Psi. \quad (3.5)$$

3.2. Spektrum és szórásamplitúdók

A spektrum a szuperszimmetriát nem lokálisan megvalósító szoliton-antiszoliton multiplettéből és a szoliton-antiszoliton kötött állapotokként megjelenő lélegzőkből áll. A szuperszimmetrikus faktorizált szóráselmélet összetevőit először [45] tárgyalta egy speciális *ansatz* használatával, melyben a szórásamplitúdó egy szuperszimmetrikus struktúrát leíró és egy szuperszimmetriától független rész direkt szorzataként állt elő. A teljes S-mátrixot végül Ahn [38] állította elő.

A szuperszimmetrikus szolitonokat $K_{ab}^{\epsilon}(\theta)$ M tömegű és θ rapiditású RSOS-kinkekkel írjuk le. A szuperszimmetrikus szerkezetet hordozó a és b indexek a 0, $1/2$ és 1 értékeket vehetik fel az $|a - b| = 1/2$ feltétel mellett, míg $\epsilon = \pm$ a topológia töltést jelzi, vagyis a szolitonot és az antiszolitonot különbözteti meg. Az n -részesekés aszimptotikus állapotok

$$|K_{a_0 a_1}^{\epsilon_1}(\theta_1) K_{a_1 a_2}^{\epsilon_2}(\theta_2) \dots K_{a_{n-1} a_n}^{\epsilon_n}(\theta_n)\rangle \quad (3.6)$$

alakúak, ahogy $\theta_1 > \theta_2 > \dots > \theta_n$ az *in-*, és $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n$ az *out* állapotokra. A

$$K_{ab}^\alpha(\theta_1) + K_{bc}^\beta(\theta_2) \rightarrow K_{ad}^\delta(\theta_2) + K_{dc}^\gamma(\theta_1) \quad (3.7)$$

szórást az

$$S_{\text{SUSY}} \left(\begin{array}{c|c} a & d \\ b & c \end{array} \middle| \theta_1 - \theta_2 \right) \times S_{\text{sG}}(\theta_1 - \theta_2 | p)^{\gamma\delta} \quad (3.8)$$

amplitúdó írja le, melynek tenzorszerkezete direkt szorzat: az első tényező (SUSY faktor) a szuperszimmetrikus struktúrához, a második (bozonikus faktor) pedig a topológiai töltéshez kapcsolódik. Utóbbi egybeesik a hagyományos sine–Gordon-modell S-mátrixával [9], csak a p paraméter

$$p = \frac{\beta^2}{8\pi - \beta^2/2} \quad (3.9)$$

kifejezése tér el a szokásostól. A SUSY faktor megegyezik a 6/5 súlyú primér térrel perturbált trikritikus Ising-modell S-mátrixával:

$$S_{\text{SUSY}} \left(\begin{array}{c|c} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{array} \middle| \theta \right) = S_{\text{SUSY}} \left(\begin{array}{c|c} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{array} \middle| \theta \right) = 2^{\frac{i\pi-\theta}{2\pi i}} \cos \left(\frac{\theta}{4i} - \frac{\pi}{4} \right) K(\theta) \quad (3.10a)$$

$$S_{\text{SUSY}} \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{array} \middle| \theta \right) = S_{\text{SUSY}} \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{array} \middle| \theta \right) = 2^{\frac{\theta}{2\pi i}} \cos \left(\frac{\theta}{4i} \right) K(\theta) \quad (3.10b)$$

$$S_{\text{SUSY}} \left(\begin{array}{c|c} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{array} \middle| \theta \right) = S_{\text{SUSY}} \left(\begin{array}{c|c} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{array} \middle| \theta \right) = 2^{\frac{i\pi-\theta}{2\pi i}} \cos \left(\frac{\theta}{4i} + \frac{\pi}{4} \right) K(\theta) \quad (3.10c)$$

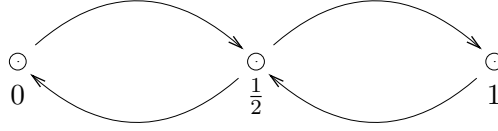
$$S_{\text{SUSY}} \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{array} \middle| \theta \right) = S_{\text{SUSY}} \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{array} \middle| \theta \right) = 2^{\frac{\theta}{2\pi i}} \cos \left(\frac{\theta}{4i} - \frac{\pi}{2} \right) K(\theta) \quad (3.10d)$$

$$K(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k - \frac{1}{2} + \frac{\theta}{2\pi i}) \Gamma(k - \frac{\theta}{2\pi i})}{\Gamma(k + \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2\pi i}) \Gamma(k + \frac{\theta}{2\pi i})}. \quad (3.10e)$$

A szuperszimmetrikus faktornak nincsenek pólusai a fizikai sávban, így a kink-szórások teljes szuperszimmetrikus amplitúdói a sine–Gordon-moddal azonos pólusszerkezettel rendelkeznek. Az ezeknek megfelelő kötött állapotok az (1.4) által adott tömegű — de jelen esetben szuperszimmetrikus — B_n lélegzők, melyek a SUSY algebra bozon-fermion dublett ábrázolásába tartoznak. B_n bozonikus komponense $(-1)^n$ paritással rendelkezik a bozontér $\phi \leftrightarrow -\phi$ tükrözésére nézve.

3.3. Kink- és vákuumszerkezet

A szuperszimmetrikus sine–Gordon-modell kink- és vákuumszerkezetének tisztázásához a Zamolodchikov által eredetileg a trikritikus Ising-modellre megfogalmazott érvelést [46] fogjuk használni, amit az alábbiakban röviden összefoglalunk.



3.1. ábra. A trikritikus Ising-modell kinkjeinek szomszédsági diagramja

3.3.1. Trikritikus Ising-modell

A bozonikus Landau–Ginzburg-megfogalmazásban az elemi tér a σ (bozonikus) spintér, a hatás pedig

$$\mathcal{A} = \int dt \int dx \left(\frac{1}{2}(\partial_t \sigma)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x \sigma)^2 - U(\sigma) \right), \quad (3.11)$$

ahol a potenciál

$$U(\sigma) = \lambda (\sigma^2 - \sigma_0^2)^2 \sigma^2 \quad (3.12)$$

alakú. Mint az a 2.9. ábrán látható (az RSOS_3 a trikritikus Ising-modell szóráselmélete), a modell három vákuummal rendelkezik. A vákuumokat a kinkek a 3.1. ábrán jelzett módon kötik össze, szórásaikat a (3.10) amplitúdók jellemzik.

Ezzel ellentétben a szuperszimmetrikus Landau–Ginzburg-formalizmusban a hatás

$$\mathcal{A} = \int dt \int dx \left(\frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 + \psi_+ \partial_- \psi_+ + \psi_- \partial_+ \psi_- + W'(\phi) \psi_+ \psi_- + W(\phi)^2 \right), \quad (3.13)$$

ahol

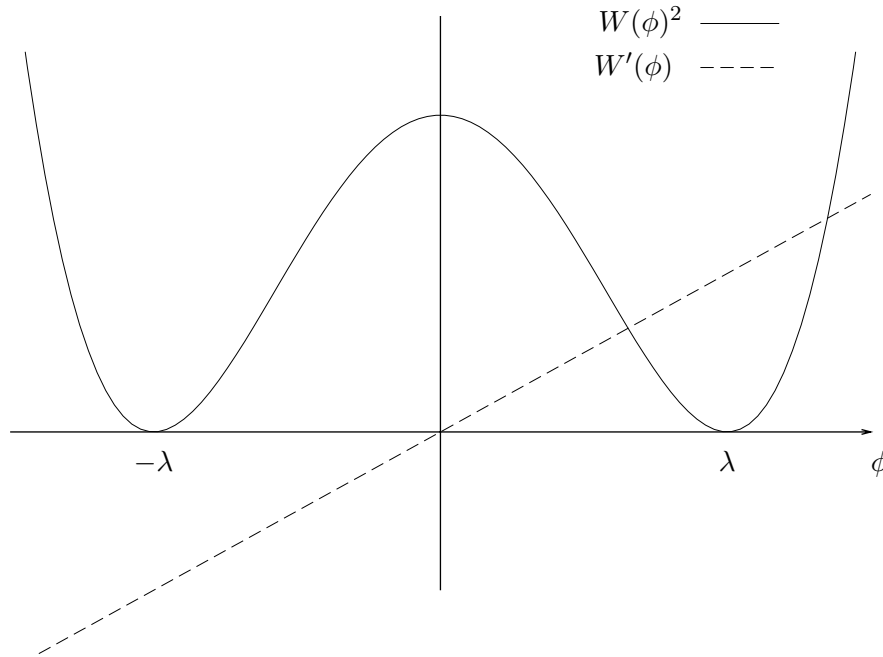
$$W(\phi) = \mu(\phi^2 - \lambda^2). \quad (3.14)$$

A skalárpotenciál alakját a 3.2. ábra illusztrálja, a két minimum a térváltozó $\phi = \pm\lambda$ értékeire esik. Hogyan tudjuk összeegyeztetni ezt a képet a bozonikus-sal, melyben három minimum szerepel? Erre a fermioncsatolás ad lehetőséget. A $\phi = \lambda$ minimumban a $W'(\phi)$ -vel arányos fermiontömeg pozitív, a Majorana-fermionnak egyetlen vákuuma van és az Ising-modell magas hőmérsékletű fázisát írja le, melyben a spintér várható értéke eltűnik:

$$\langle \sigma \rangle_\lambda = 0. \quad (3.15)$$

A $\phi = -\lambda$ vákuumban azonban az Ising-modell alacsony hőmérsékletű fázisában vagyunk, és ennél fogva ez a vákuum kétszeresen degenerált:

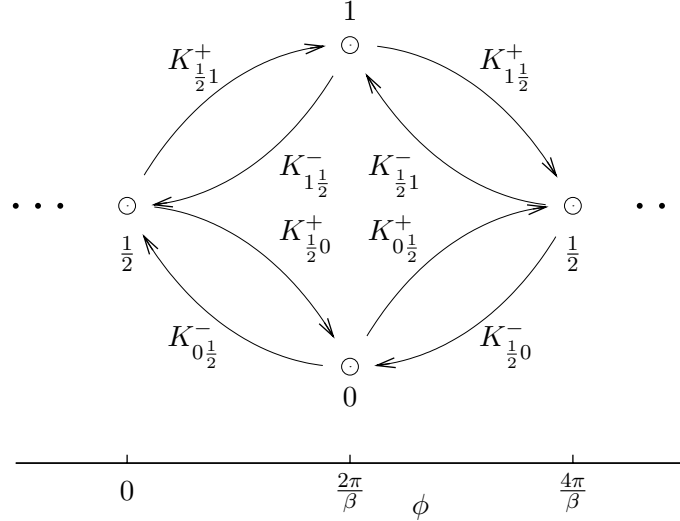
$$\langle \sigma \rangle_{-\lambda} = \pm \sigma_0. \quad (3.16)$$



3.2. ábra. A szuperszimmetrikus Landau–Ginzburg-potenciál

A kinkok a $\langle\sigma\rangle_\lambda = 0$ vákuumot kötik össze a $\langle\sigma\rangle_{-\lambda} = \pm\sigma_0$ vákuumokkal, tehát két pár van belőlük, és ezzel ismét visszakaptuk a 3.1. ábrán látható szomszédsági diagramot (az $\frac{1}{2}$ RSOS-címkéjű vákuum felel meg $\langle\sigma\rangle_\lambda = 0$ -nak).

Fendley megfogalmazott egy másik sejtést is a trikritikus Ising-modell S-mátrixára [43], a bozonikustól eltérő szuperszimmetrikus Landau–Ginzburg-kinkszerkezetre alapozva. Ez a két megfogalmazás a modell két különböző lokális leírását jelenti, nagyon hasonlóan a sine–Gordon-modell/tömeges Thirring-modell kettősséghez [13]. Csakhogy az utóbbi esetben a kinkok szórásmatrixai függetlenek attól, hogy melyik leírasmódot választjuk, és az imént vázolt Zamolodchikovi érvelés azt jelzi, hogy nincs ez másképp a trikritikus Ising-modell esetében sem: a kinkszórást a bozonikus és a szuperszimmetrikus megfogalmazásban is az RSOS S-mátrix írja le helyesen. Az eltérő lokális algebraik használata a lokális terek határfeltételeiben jelentkezik, mint azt például az (1.28) algebraik tárgyalásánál már láthattuk. Mindezek fényében tehát az alternatív S-mátrix kétes eredménynek tűnik.



3.3. ábra. A szuperszimmetrikus sine–Gordon-modell kinkjeinek szomszédsági diagramja

3.3.2. SUSY sine–Gordon-modell

Alkalmazzunk most analóg érvelést az $N = 1$ szuperszimmetrikus sine–Gordon-modellre! A bozonikus potenciálunk $-\cos \beta\phi$, a fermion tömegtag pedig

$$\psi_- \psi_+ \cos \frac{\beta\phi}{2} \quad (3.17)$$

alakú. Ennek eredményeképpen minden $\phi_{2n} = 2n \frac{2\pi}{\beta}$ „páros” vákuum nemdegenerált, míg a $\phi_{2n+1} = (2n+1) \frac{2\pi}{\beta}$ „páratlan” vákuumok kétszeresen degeneráltak ($n \in \mathbb{Z}$), a Majorana-fermionhoz tartozó spintér nemeltűnő vákuumértéke mellett. A kinkre egy periodikusan ismétlődő szomszédsági diagramot kapunk, amely — mint azt a 3.3. ábra szemlélteti — pontosan megegyezik a fejezet elején bevezetett K_{ab}^\pm kink S-mátrixai által előírttal.

A Lagrange-függvény diszkrét szimmetriái megjelennek a diagramban is, mely ϕ -ben $4\pi/\beta$ periódussal rendelkezik és tükörszimmetrikus. A (3.5) transzformációnak a $2\pi/\beta$ -val történő eltolás és a Majorana-fermion szimmetrikus-, illetve sértett fázisának felcserélése (egyfajta Kramers–Wannier-dualitás) felel meg.

Megjegyezzük, hogy a modell vákuumszerkezetének és potenciáljának periodicitása folytán véges térfogatban bevezethetők rajta ϑ -szektorok [47], vagy az 1. fejezetben bemutatott módon a térváltozó különböző azonosításaival képezhetők csavart változatai, de ezeket a továbbiakban nem tárgyaljuk.

3.3.3. Nagy térfogatú leírás

A végtelen térfogatú spektrum és az egzakt S-mátrix ismeretében képet alkothatunk arról, hogy milyen következményekkel jár periodikus határfeltétel kirovása a nagy, de véges térfogatban vizsgált szuperszimmetrikus sine–Gordon-modellre. Először is, az egykink-állapotokat az ilyen határfeltétel nem engedi meg, és a kétkink-állapotok közül is csak azokat, melyek induló- és érkező vákuuma azonos, vagyis $K_{ab}K_{ba}$ típusúak. Mivel a lélegzők két kink kötött állapotai, egy (vagy több) lélegzőt tartalmazó állapotokat is találhatunk a 0 topológiai töltésű szektorban. Észrevehető továbbá, hogy a 3.10 SUSY faktor $a \leftrightarrow 1 - a$ szimmetriájából következően a megengedett kétkink-állapotok a tagok szóródására nézve zárt

$$\{K_{0\frac{1}{2}}K_{\frac{1}{2}0}, K_{1\frac{1}{2}}K_{\frac{1}{2}1}\} \quad \{K_{\frac{1}{2}0}K_{0\frac{1}{2}}, K_{\frac{1}{2}1}K_{1\frac{1}{2}}\} \quad (3.18)$$

csoportokba oszthatók. Az elsőben a szórás a 0 és 1 vákuumokat váltja, míg a másodikban az $\frac{1}{2}$ vákuumot tartja. Természetesen azt várjuk, hogy véges térfogatban a vákuumok energiája csak exponenciális mértékben ugyan, de felhasad, és mindegyik vákuum fölött számítunk a lélegzőspektrum megismétlődésére is, hasonló energiakülönbségekkel.

A két csoport továbbá különböző szuperszimmetrikus tulajdonságokkal rendelkezik, mely a

$$|K_{ab}(\theta + i\xi/2)K_{bc}(\theta - i\xi/2)\rangle = f_{abc}^\phi |\phi(\theta)\rangle + f_{abc}^\psi |\psi(\theta)\rangle \quad (3.19)$$

fúziós együtthatók explicit [48] alakjából olvasható le ($|\phi\rangle$ a bozonikus-, $|\psi\rangle$ pedig a fermionikus lélegzőt jelöli). Ezekből kiderül, hogy az első csoport tagjai csak bozonikus lélegzőkbe fuzionálhatnak, míg a másodiké bozonikus és fermionikus lélegzőkbe is. A szuperszimmetrikus töltések hatását vizsgálva láthatóvá válik az is, hogy a második csoport állapotai mutatják a teljes $N = 1$ szuperszimmetriát [48].

A három vákuum degenerációja véges térfogatban a köztük végbemenő alagutazás miatt megszűnik, de felhasadásuk exponenciálisan kicsi ($\mathcal{O}(e^{-L})$ nagyságrendű) marad. Ennek megfelelően mindhárom vákuum felett várjuk a teljes lélegzőspektrum megjelenését, de hasonlóképpen felhasadt energiaszintekkel.

3.4. Perturbált konform térelmélet

3.4.1. A modell pCFT-keretben

A szuperszimmetrikus sine–Gordon-modell a $c = 3/2$ — egy szabad bozont és egy szabad fermiont leíró — konform térelmélet perturbációjának is tekinthető. A Hilbert-tér a konform szabad bozon és szabad fermion Hilbert-tereinek

direkt szorzata, és csak a lokális szektorokat vizsgáljuk, azaz a konform spin egész értékeire szorítkozunk. A kompaktifikációs sugár általános értékeinél ez csak a

$$\Psi(x + L) = \pm \Psi(x) \quad (3.20)$$

peremfeltételeket engedi meg a fermiontérre (L a rendszer térfogata), vagyis egyöntetűen Neveu–Schwarz- vagy Ramond-peremfeltételt mindkét komponensre: eltérő peremfeltételek nem egész konform spinű szektorokra vezetnének.

A χ konform bozonteret az korábbi fejezetekkel teljesen azonos módon vezetjük be. Egy r sugarú körön kompaktifikáljuk, normálását pedig az

$$\mathcal{A}_{c=1} = \frac{1}{8\pi} \int d^2z \partial\chi \bar{\partial}\chi \quad (3.21)$$

hatással rögzítjük, tehát a kanonikus bozontérrel a szokásos

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \chi \quad (3.22)$$

relációban áll. Az elmélet $\widehat{U(1)}_L \times \widehat{U(1)}_R$ Kac–Moody-szimmetriáját a

$$J(z) = i\partial\phi = \sum_n a_n z^{-n-1} \quad \bar{J}(\bar{z}) = i\bar{\partial}\phi = \sum_n \bar{a}_n \bar{z}^{-n-1} \quad (3.23)$$

áramok a_n, \bar{a}_n módusai generálják, a $|n, m\rangle$ legmagasabb súlyú állapotokat az áramalgebra $\mathcal{V}_{n,m}$ primér terei keltik; a maximális lokális operátoralgebrát az (1.28a) által definiált \mathcal{A}_b -nek választjuk, vagyis $n, m \in \mathbb{Z}$. A fenti móduskifejtések és (1.26) felhasználásával a Hamilton-operátor az $|n, m\rangle$ állapotra épített szektorban a

$$H_{c=1} = \frac{2\pi}{L} \left[\left(\frac{n}{r}\right)^2 + \left(\frac{mr}{2}\right)^2 + \sum_{k>0} (a_{-k}a_k + \bar{a}_{-k}\bar{a}_k) - \frac{1}{12} \right] \quad (3.24)$$

explicit alakba írható, melyet az

$$[a_k, a_l] = k\delta_{k+l} \quad [a_k, \bar{a}_l] = 0 \quad [\bar{a}_k, \bar{a}_l] = k\delta_{k+l} \quad (3.25)$$

kommutátorrelációk segítségével értékelhetünk ki. Ha a perturbáló teret

$$\cos \frac{\beta}{2} \phi = \frac{1}{2} (\mathcal{V}_{1,0} + \mathcal{V}_{-1,0}) \quad (3.26)$$

módon azonosítjuk, a kompaktifikációs sugárra az

$$\frac{1}{r} = \frac{\beta}{4\sqrt{\pi}} \quad \text{azaz} \quad p = \frac{2}{r^2 - 1} \quad (3.27)$$

relációt kapjuk.

A Neveu–Schwarz-szektorban a Hilbert-tér fermionikus része a ψ_{\pm} tereknek megfelelő

$$\psi(z) = \sum_{s+\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}} b_s z^{-s-\frac{1}{2}} \quad \bar{\psi}(\bar{z}) = \sum_{s+\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}} \bar{b}_s \bar{z}^{-s-\frac{1}{2}} \quad (3.28)$$

Euklideszi fermionterek negatív módusaival kelthető az $|\text{NS}\rangle$ vákuumból, és a lokalitás megköveteli, hogy az állapotok teljes (jobb+bal) fermionszáma páros legyen. A módusok a

$$\{b_s, b_t\} = \delta_{s,t} \quad \{b_s, \bar{b}_t\} = 0 \quad \{\bar{b}_s, \bar{b}_t\} = \delta_{s,t} \quad (3.29)$$

antikommutációs relációknak tesznek eleget. A konform normálású Hamilton-operátor a módusokkal a

$$H_{\text{NS}} = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \psi \bar{\partial} \psi = \frac{2\pi}{L} \left(\sum_{s=1/2}^{\infty} b_{-s} b_s - \frac{1}{24} \right) \quad (3.30)$$

alakba írható.

A Ramond-szektorban a fermiontér egész móduskifejtéssel rendelkezik, és a jobb-, illetve bal fermionszámnak külön-külön is párosnak kell lennie. A legmagasabb súlyú állapotot $|\text{R}\rangle$ -rel jelöljük, a Hamilton-operátor alakja pedig

$$H_{\text{R}} = \frac{2\pi}{L} \left(\sum_{s=1}^{\infty} b_{-s} b_s + \frac{1}{48} \right). \quad (3.31)$$

3.4.2. Megmaradó áramok és a perturbáló potenciál

A szuperszimmetrikus sine–Gordon-modell konform perturbációs kezelését komplikálja, hogy ha a Lagrange-függvény kinetikus tagjait a fenti $c = 3/2$ konform térelmélettel írjuk le, akkor az

$$U_1 = 2i\bar{\psi}\psi \cos \frac{\beta}{2}\phi \quad U_2 = \frac{m^2}{\beta^2} \cos \beta\phi \quad (3.32)$$

potenciátagok

$$\Delta_1 = \bar{\Delta}_1 = \frac{1}{2} + \frac{\beta^2}{32\pi} \quad \Delta_2 = \bar{\Delta}_2 = \frac{\beta^2}{8\pi} \quad (3.33)$$

konform dimenziói különbözőeknek adódnak, ráadásul a két tag szuperszimmetrikus tulajdonságai is eltérőek. Szerencsére a szuperszimmetrikus sine–Gordon-modell esetében elegendő az U_1 perturbáló tagot figyelembe venni, mint azt a következőkben megmutatjuk.

Ez a tag őrzi a G és \bar{G} generálta $(1, 1)$ szuperszimmetriát, mint az a

$$G_{-\frac{1}{2}}\bar{G}_{-\frac{1}{2}}\cos\frac{\beta}{2}\hat{\phi} \quad (3.34)$$

szupertér-formalizmusban felírt alakjából látható [49, 50] (a $\cos\frac{\beta}{2}\hat{\phi}$ egy Neveu-Schwarz szuperkonform primér tér). A kérdés az, hogy U_1 integrálható perturbációja-e a $c = 3/2$ konform térelméletnek. Ehhez elegendő, ha a perturbáció megőrzi egyetlen magasabb spinű megmaradó mennyiséget. 3-spinű megmaradó mennyiséget generálhat például a

$$T_4 = (\partial^2\phi)^2 + A(\partial\phi)^4 + B(\partial\phi)^2\partial\psi\psi + C\partial^2\psi\partial\psi \quad (3.35)$$

sűrűség, alkalmas A , B és C konstansokkal. A perturbáció első rendjében T_4 megmarad, ha a $T_4(z)U_1(w, \bar{w})$ operátorszorzat elsőrendű pólusának reziduuma teljes derivált [3, 51, 52]. A reziduum kiszámítása után a ψ deriváltjait tartalmazó tagok teljes deriváltak hozzáadásával eltüntethetők, és a maradék

$$(\tilde{A}\psi\partial^3\phi + \tilde{B}\psi\partial^2\phi\partial\phi + \tilde{C}\psi(\partial\phi)^3)\cos\frac{\beta}{2}\phi \quad (3.36)$$

alakú lesz. \tilde{A} , \tilde{B} és \tilde{C} eltűnése egy megoldható lineáris inhomogén egyenletrendszer jelent A -ra, B -re és C -re, ami azt mutatja, hogy U_1 valóban integrálható perturbációt generál. A klasszikus mozgásegyenletek felhasználásával U_2 megtartása mellett végzett számítások [53, 54] a fentiek $\beta \rightarrow 0$ határesetével azonos eredményre vezettek, ami szintén azt támasztja alá, hogy a pCFT keretei között elégséges az U_1 perturbáció használata.

Ezen a ponton érdemes kiemelni, hogy a pCFT és a kovariáns perturbációszámítás két különböző séma, mellyel egy elmélet definiálható. Ez már abból is látszik, hogy a perturbáló operátorok különböző dimenzióval rendelkeznek bennük: a naiv „mérnöki” dimenzióval a kovariáns perturbációszámításban és a konform skáladimenzióval a pCFT-ben. Mindkét kifejtésben generálódik U_2 típusú ellentag már egyedül U_1 -ből is, és együtthatóik viszonyát a szuperszimmetria rögzíti. A kovariáns perturbációszámítás minden rendjében viszonyuk a klasszikus, (3.1) hatásban megfigyelhető.

A pCFT azonban egy tömegetlen bozon és fermion körüli kifejtés, az ezzel járó IR divergenciákkal és skáladimenziókkal. Hogy a két sémát összhangba hozzuk, megkövetelhetjük a pCFT szuperszimmetriáját, és ez a feltétel U_2 együtthatóját a pCFT Lagrange-függvényben nullára állítja. Ez azonban nem jelenti azt, hogy az együttható az effektív hatás klasszikus határesetében is nulla lesz, hiszen ellentagként U_1 -ből generálódik. Tulajdonképpen, bár nem számoltuk ki az effektív hatás klasszikus határesetét, eredményeink azt támasztják alá, hogy az valóban a várakozásoknak megfelelő.

A fentiek szerint tehát a kanonikusan normált terekkel a szuperszimmetrikus sine–Gordon-modell Lagrange-függvénye

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_m \Psi + \mu \bar{\Psi} \Psi \cos \frac{\beta}{2} \phi \quad (3.37)$$

a pCFT-sémában. A perturbáló potenciál együtthatóját μ -vel jelöljük, ezzel is hangsúlyozva, hogy a β -függő — dimenziója eltér a klasszikus m paraméterétől. A szuperszimmetrikus sine–Gordon-modellt [55] $n = 2$ eseteként azonosítva az M kinktömeg és a μ paraméter között a

$$\frac{\mu}{8} \gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta^2}{32\pi} \right) = M^{1 - \frac{\beta^2}{16\pi}} \left(\frac{\pi}{4} \frac{\beta^2}{16\pi - \beta^2} \right)^{1 - \frac{\beta^2}{16\pi}} \quad \gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)} \quad (3.38)$$

összefüggést nyerjük. Ez az UV- és IR paramétereket összekapcsoló tömeg-hézag-reláció nélkülözhetetlen ahhoz, hogy TCSA-mérésekből a gerjesztések tömegeit, ne pusztán azok arányait tudjuk leolvasni. Megjegyezzük, hogy $\beta \rightarrow 0$ esetben a fenti formula átmeny a klasszikus $M = \frac{8\mu}{\beta^2}$ tömegképletbe.

Az így felállított pCFT-keretben az UV energiaszintek vezető korrekciói a C függelékben részletezett módon kiszámíthatók. Az együtthatókra kapott eredményeket kapott az ugyanott megtalálható C.1. táblázatban soroltuk fel.

3.5. Csonkított konform tér

Eredményeinket szeretnénk alternatív úton is igazolni, illetve a pCFT vezető rendje által megengedettnél nagyobb térfogatok mellett vizsgálandó. Erre kínál ismét lehetőséget az 1.4. és a 2.4. fejezetben a k -csavart-, illetve a két-frekvenciás sine–Gordon-modellre már bevezetett *csonkított konform állapotter közelítés* (TCSA).

3.5.1. Alkalmazás a szuperszimmetrikus sine–Gordon-modellre

A szuperszimmetrikus sine–Gordon-modell egy szabad bozonból és egy szabad fermionból álló $c = 3/2$ konform térelmélet releváns perturbációjának tekinthető, mint azt a pCFT-séma vizsgálata kapcsán az előző fejezetben már körüljártuk. Ez azzal jár, hogy a Hilbert-tér — lévén a szabad bozon és a szabad fermion Hilbert-terének direkt szorzata — egy adott levágási energia alatt sokkal több állapotot tartalmaz, mint az előző alkalmazásainkban, ami az elérhető pontosságot nagyban lecsökkenti. Másrészt a (3.37) pCFT Lagrange-függvényben szereplő (C.5) perturbáló operátor (C.11) súlya $1/2$ -nél nagyobb, ami a TCSA-ban is divergenciák fellépéséhez vezet. Az $E_{\text{küszöb}}$ fölötti állapotok

levágása ilyenkor regularizáció, melytől az energiaszintek függenek, és csak a szintek *különbségei* konvergálnak $E_{\text{küszöb}}$ növelésével.

A perturbáló operátor mátrixelemei az A és a C függelék nyomán

$$\begin{aligned} \langle a | g \int_0^L dx \zeta(x, t) | b \rangle &= \frac{gL}{\sqrt{2}} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{2\Delta} \times \\ &\times \langle a | i\psi(1)\bar{\psi}(1) [\mathcal{V}_{1,0}(1,1) + \mathcal{V}_{-1,0}(1,1)] | b \rangle \delta_{\Delta_a - \bar{\Delta}_a, \Delta_b - \bar{\Delta}_b} \end{aligned} \quad (3.39)$$

alakban írhatók fel. (3.38) és (C.6) segítségével a csatolási állandót $g = \kappa M^x$ módon fejezhetjük ki a kinktömeggel, ahol

$$\kappa = \frac{4}{\pi\sqrt{2}\gamma\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{\pi}{4} \frac{1-x}{x} \right)^x \quad (3.40)$$

és $x = 2 - 2\Delta$ a perturbáló operátor skáladimenziója. A behelyettesítések után a Hamilton-operátor a szokott módon dimenziótlanodik és az $l = ML$ dimenziótlan térfogattal paraméterezhető.

A mátrixelemek a független bozonikus és fermionikus járulékok szorzataként számíthatók a 3.4.1. fejezetben részletezett móduskifejtések alapján. Komplikációt csak a Ramond-szektorban előforduló fermion nullmódusok jelentenek, melyekre

$$\langle \mathbb{R} | ib_0 \bar{b}_0 | \mathbb{R} \rangle = \frac{1}{2}. \quad (3.41)$$

Mivel a kölcsönhatás a bozontérben (3.4) szerint páros, a teljes Hamilton-operátor rendelkezik az

$$|n, m\rangle \leftrightarrow |-n, -m\rangle \quad a_n \leftrightarrow -a_n \quad \bar{a}_n \leftrightarrow -\bar{a}_n \quad (3.42)$$

bozonikus \mathbb{Z}_2 szimmetriával. A (3.5) szimmetria folytán a Neveu-Schwarz-szektorban van egy további

$$|n, m\rangle \leftrightarrow (-1)^n |n, m\rangle \quad b_s \leftrightarrow -b_s \quad \bar{b}_s \leftrightarrow \bar{b}_s \quad (3.43)$$

fermionikus \mathbb{Z}_2 szimmetriája is, mely a Ramond-szektorban hiányzik a fermionikus nullmódus jelenléte miatt. A 3.4.1. fejezetben megadott Hilbert-tér ezen szimmetriák szerint alterekre bontható, melyeken a Hamilton-operátor külön-külön diagonalizálható. Vezessük be (C.7) mintájára a Ramond-szektorban az

$$|n\pm\rangle_{\mathbb{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{V}_{n,0}(0,0) \pm \mathcal{V}_{-n,0}(0,0)) |0\rangle_{\mathbb{R}} \quad (3.44)$$

jelölést! $|0\rangle_{\mathbb{R}} = |0\rangle_{\phi} \otimes |\mathbb{R}\rangle$ a bozonikus- és a Ramond-vákuum tenzorszorzata. Ezután $r > 3$ mellett az egyes alterek legalacsonyabb energiájú 0 spinű és 0 topológiai töltésű állapotai a 3.1. táblázatban látható módon osztályozhatók a fenti szimmetriák szerint.

paritások						IR szerep
$+\phi+\psi$	$+\phi-\psi$	$-\phi+\psi$	$-\phi-\psi$	$+\phi$	$-\phi$	
$ 0\rangle$	$ 1+\rangle$			$ 0\rangle_{\text{R}}$		vákuum
		$ 2-\rangle$	$ 1-\rangle$		$ 1-\rangle_{\text{R}}$	első lélegző
$ 2+\rangle$	$ 3+\rangle$			$ 1+\rangle_{\text{R}}$		második lélegző

3.1. táblázat. A konform állapotok osztályozása. Az első előjel (\pm_ϕ) az altér bozonikus paritására utal, a második (\pm_ψ) pedig a fermionikusra, amennyiben Neveu–Schwarz-szektorról van szó. Ha $r < 3$, a $|3+\rangle$ állapot egy szinttel feljebb toódik a spektrumban.

3.5.2. Összevetés a pCFT-eredményekkel

Míg a pCFT-jóslatok μ (egy UV paraméter) szerinti sorok első tagjai, addig a TCSA-ból származó energiaértékek a kinktömeggel (egy IR paraméterrel) vannak kifejezve. A kétféle eredmény összehasonlítása a (3.38) *tömeghézagreláció* használatával lehetséges, de mivel a TCSA-programba ugyanez a reláció lett betáplálva, ezáltal csak a program működésének helyességét ellenőrizhetjük, magát a relációt nem.

Az előző pontban már említettük, hogy jelen esetben a perturbáló operátor konform dimenziója nagyobb $1/2$ -nél, ami mindkét eljárásban divergenciák megjelenéséhez vezet. A pCFT-keretben analitikus elfolytatással végesítettünk, a TCSA pedig a véges $E_{\text{küszöb}}$ energialevágás által regularizál, teljesen eltérő módon. Abszolút energiaértékek összehasonlítására ezért nincs lehetőségünk, be kell érniük a

$$\frac{6l}{\pi}(\mathcal{E}_b(l) - \mathcal{E}_a(l)) - 24(\Delta_b - \Delta_a) = (c_2^a - c_2^b)\kappa^2 l^{2x} + \mathcal{O}(l^{4x}) \quad (3.45)$$

energiakülönbségek vizsgálatával. Ennek előnye is van: egyrészt a különbségképzéssel a TCSA levágási hibáinak egy része kiesik, másrészt a $c_2^a - c_2^b$ együtthatókülönbségeket definiáló integrálok konvergensek. (Bár a számításból az derül ki, hogy értékük a C.1. táblázat megfelelő — regularizált — elemeinek különbségként is megkapható.)

A 3.1. táblázat segítségével azonosítani tudjuk az alul fekvő TCSA-állapotokat az $|n\pm\rangle$ állapotokkal, így az egyes pCFT-együtthatók külön-külön összevethetők az általuk leírt állapot vákuumhoz képesti energiájával. Ezt a különbségtételt a 3.4(a) ábra folytonos vonalain már nem jeleztük; a három vonal a $c_2^{[0]} - c_2^{[1+]}$, a $c_2^{[0]} - c_2^{[1-]}$ és a $c_2^{[0]} - c_2^{[2\pm]}$ vezető pCFT-jóslatok lefutását mutatja (3.45) jobb oldalának megfelelően (az energiákat a $+\phi+\psi$ Neveu–Schwarz vákuumhoz mérjük, azaz $|a\rangle = |0\rangle$ mindenhol). A pontok (3.45) bal oldalának

mért értékeit mutatják, vagyis az

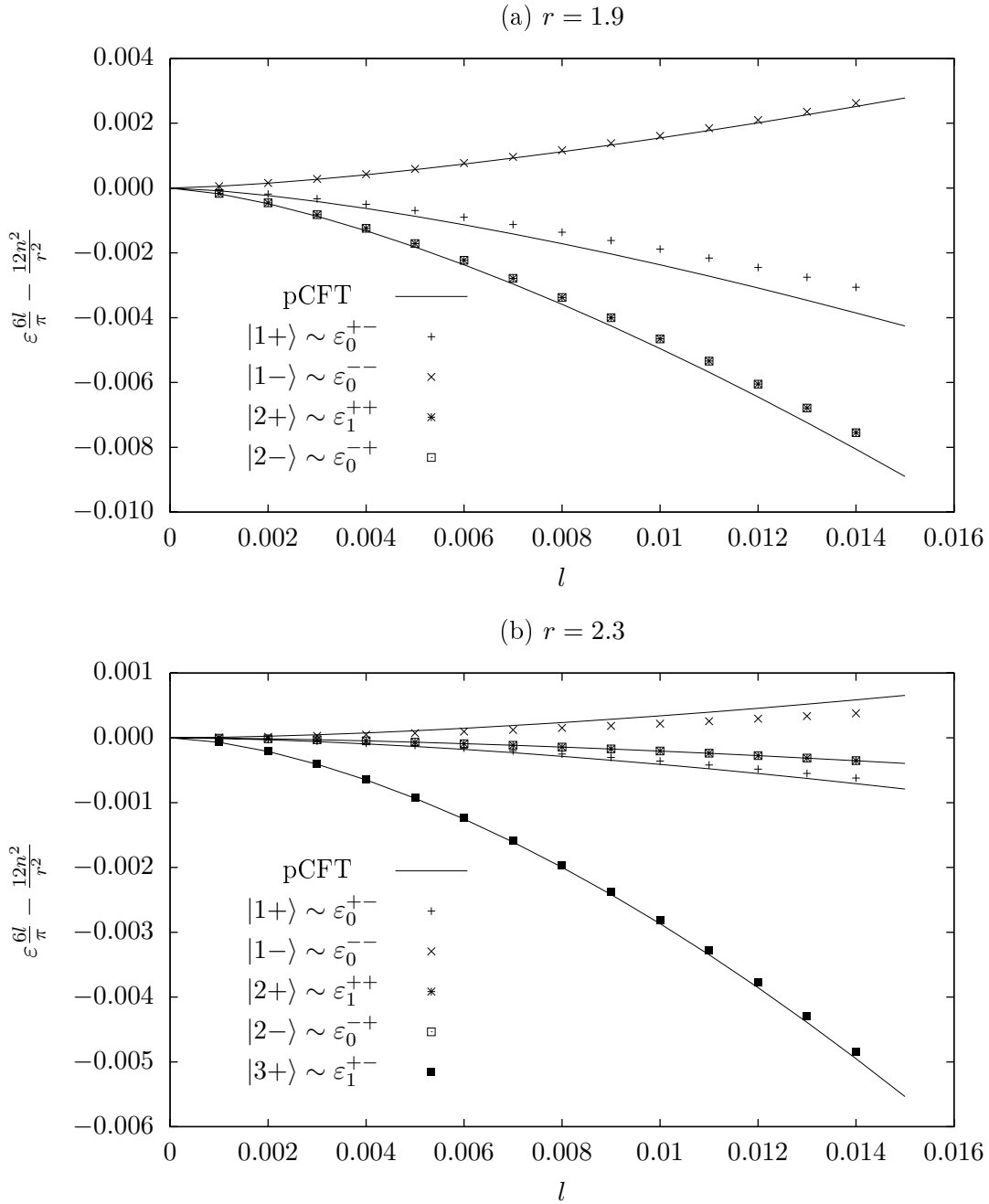
$$\varepsilon_i^{\pm\pm}(l) \equiv \mathcal{E}_i^{\pm\phi\pm\psi}(l) - \mathcal{E}_0^{+\phi+\psi}(l) \quad (3.46)$$

relatív dimenziótlán energia transzformált értékeit. Az adatok teljes összhangban állnak azzal, hogy a $|2\pm\rangle$ állapotok a pCFT vezető rendjében degeneráltak, és az egyezés általában is meggyőzőnek mondható. A 3.4(b) ábra a kompaktifikációs sugár nagyobb értéke mellett készült, és eggyel több állapotot mutat a rá vonatkozó pCFT-számítással együtt. A mérési eredmények és a jóslatok egyezése kitűnő, de az eltérések arra utalnak, hogy egyes esetekben a magasabb rendű pCFT-korrekciók már ebben a térfogattartományban sem elhanyagolhatók.

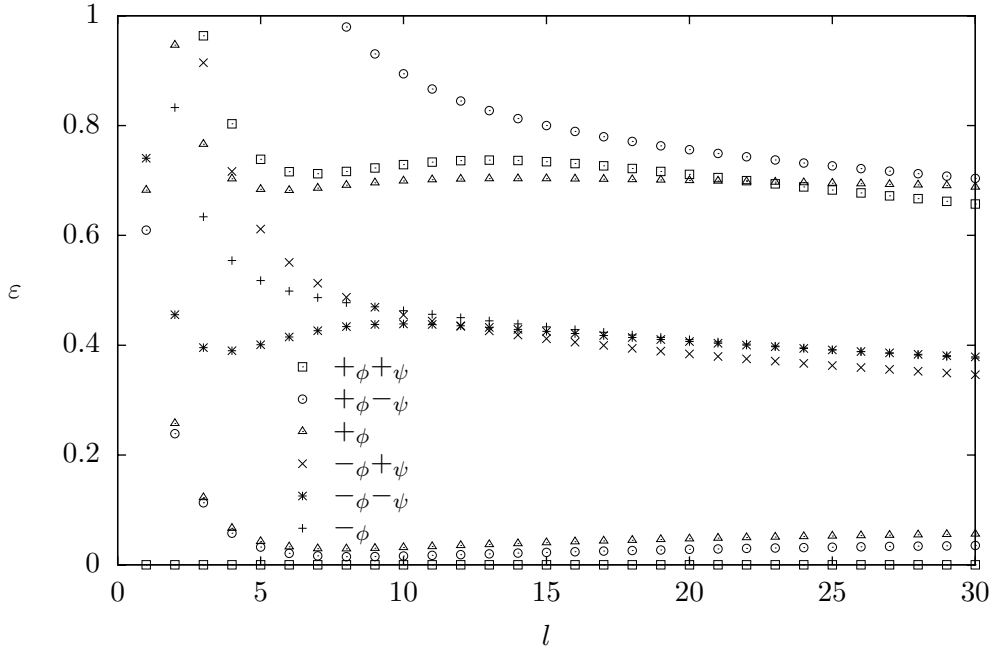
3.5.3. Nagytérfogatú spektrum

Nagyobb térfogatok felé tekintve, az IR spektrum vizsgálatával próbálkozva beleütközünk a TCSA — a fejezet elején már említett — konvergenciaproblémájába, melyet a perturbáló operátor $\Delta > 1/2$ súlya és a nagyszámú állapot miatti kényszerűen alacsony $E_{\text{küszöb}}$ okoz. A 3.1. táblázatban osztályozott állapotok energiáinak térfogatfüggését mutatja a 3.5. ábra. A táblázat első sora tartalmazza az ábrán látható három vákuumállapot UV megfelelőit. A második sor (középső három görbe) az ezek fölé gerjesztett első lélegzőknek, a harmadik (a három legfelső görbe) pedig a második lélegzőknek felel meg. Az egyes lélegzők diszkrét szimmetriatulajdonságaik alapján azonosíthatók.

A 3.5. ábra $E_{\text{küszöb}} = 14$ mellett készült, ami $13164 + 13163$ állapotot jelent a két Ramond-szektorban, és $8888 + 6746 + 8863 + 6741$ állapotot a négy Neveu–Schwarz-szektorban. A görbék minőségi egyezést mutatnak ugyan az elméleti lélegzőspektrummal, de a tömegek értékei erősen eltérnek attól. Megvizsgálva a TCSA-spektrumot kisebb ($E_{\text{küszöb}} = 8, 10$) levágások mellett azonnal kiderül, hogy az energiaszintek különbségei szinte minden lépésben ugyanannyit változnak, vagyis ezeknél a levágási értékeknél a konvergencia még nem történt meg. Ennek dacára a szuperszimmetrikus sine–Gordon-modell spektrumának kvalitatív jellegzetességei (a degenerációk és a szintek mintázata, valamint ezek r -függése) már nagyon kis állapotszámnál megjelenik, és stabilan meg is marad $E_{\text{küszöb}}$ változtatásával. Hasonló a helyzet a lélegzők *tömegarányaival* is: a TCSA-spektrumból kinyert tömegarányok néhány százaléknyi pontossággal megközelítik az egzakt S-mátrix által jósolt arányokat, és a levágási energia növelésével viszonylag kevésbé változnak.



3.4. ábra. TCSA- és pCFT-energiaszintek összevetése



3.5. ábra. Az IR TCSA-spektrum alsó állapotai ($r = 3.05$)

3.6. Összefoglalás

Vizsgálatainkat a szuperszimmetrikus sine–Gordon-modell vákuumszerkezetének tisztázásával kezdtük. A perturbált trikritikus Ising-modellre vonatkozó [46] érvelést adaptálva megmutattuk, hogy a vákuum- és kinkszerkezet megfelel az S-mátrixra adott korábbi [38] sejtésnek. Ezt követően perturbált konform térelméleti keretben definiáltuk a modellt, és igazoltuk, hogy a Lagrange-i leírással ellentétben ott nincs szükség a tisztán skalárpotenciált tartalmazó tag szerepeltetésére. Ennek kulcsát a perturbált modell integrálhatóságát biztosító 3 spinű megmaradó mennyiség megtalálása jelentette.

A pCFT-keretben megkaptuk a modell alul fekvő állapotainak vezető energiakorrekcióját kis térfogatban, és láttuk, hogy a Ramond-szektorban ez várakozásainknak megfelelően eltűnik a sértetlen szuperszimmetria jelenléte miatt. Ugyanezen eredmények segítségével ellenőriztük a TCSA alkalmazhatóságát a modellre. Bár nagy térfogatokban kicsi az elérhető pontosság az UV divergenciák és az energialevegással rendkívül gyorsan növekvő állapotszám miatt, az IR spektrum minőségi jellemzőit és az első gerjesztések tömegarányait helyesen kaptuk meg, így az alacsonyan fekvő aszimptotikus állapotokat meg tudtuk feleltetni az őket keltő CFT operátoroknak.

4. fejezet

Az eredmények áttekintése

A dolgozatban ismertetett kutatás átfogó célja az volt, hogy bővítse a kvantumtérelméletek véges térfogatú viselkedésére vonatkozó ismereteinket. Erre különösen alkalmas terepnek látszottak a teljesen integrálható modellek és azok perturbációi, mert alapvetően különböző elvű, analitikus-, illetve numerikus módszerek együttes használatát engedik meg. Ez részint segít a számítási- vagy implementációs hibák elkerülésében, részint megkönnyíti a kapott eredmények értelmezését.

Vizsgálatainkhoz a sine–Gordon-modell különböző deformációit használtuk, melyek ettől függetlenül saját jogukon, elméleti és kísérleti szempontból is érdekes és sokat vizsgált modellek. A csavart sine–Gordon-modellről megmutattuk, hogy őrzi a sine–Gordon-modell integrálhatóságát, vagyis az lokális tulajdonság, melyet a peremfeltételek ilyenén megváltoztatása várakozásainknak megfelelően nem befolyásol. Ezt alátámasztotta a spektrum alsó gerjesztési energiáinak térfogatfüggése, valamint az exponenciális terek vákuumértékeinek analízise is.

A kétfrekvenciás sine–Gordon-modell ezzel szemben már nem integrálható, de éppen ebben rejlik érdekessége, hiszen emiatt térelméleti szempontból általánosabb és gazdagabb viselkedést mutat; ide tartozik például bomló, metastabil állapotok megjelenése a spektrumban. Mivel ez a modell egy szóráselmélet (a hagyományos sine–Gordon-modell) perturbációjának is tekinthető, a formfaktor-perturbációszámítás lehetőséget adott a TCSA-eredményeink független ellenőrzésére, mielőtt a nemperturbatív tartomány vizsgálatához kezdtünk volna. A kétfrekvenciás modell nemperturbatív tartományában fázisátmenet lezajlására számítottunk, ezért előzetesen áttekintettük a metastabil állapotok spektrumban való azonosításának kérdéseit, hiszen a fázisátmenet rendjének megállapításában ezek nagy szerepet játszanak. Bár az effektív potenciálban a renormálás során megjelenő új tagok elvben elsőrendűvé tehetnék a klasszikusan másodrendű átmenetet, az analízis végül másodrendű fázisátalakulást mutatott ki az $1/2$ frekvenciaarányú modell teljes paramétertartomá-

nyában. Továbbmenve, az átalakulási pontban tömegtelenné váló gerjesztések energiáinak térfogatfüggése révén az Ising univerzalitási osztály is azonosítható volt. Tudomásunk szerint ez az első alkalom, hogy valaki TCSA-t használt egy nemtriviális infravörös fixpont tulajdonságainak vizsgálatára.

A szuperszimmetrikus sine–Gordon-modell integrálható ugyan, de mégis viszonylagos bizonytalanság övezi, az irodalomban ellentmondó sejtések találhatóak például vákuumszerkezetére és egzakt S-mátrixára vonatkozóan. Ezért vizsgálatainkat a vákuum- és kinkszerkezet tisztázásával kezdtük. A trikritikus Ising-modellre vonatkozó eredmények adaptálásával sikerült a szuperpotenciál két minimuma által keltett látszólagos ellentmondást feloldanunk, és ezáltal összhangba hozni a hagyományos- és a szuperszimmetrikus Landau–Ginzburg-formalizmus által jósolt kinkszerkezetet. A modell perturbált konform térelméleti leírása is meglepetéssel szolgált, mert a kovariáns perturbációs számítással ellentétben itt a tisztán bozonikus potenciáltag explicit szerepeltetésére nem volt szükség, az pont a szükséges módon automatikusan generálódott a renormálás folyamán. A TCSA-módszer a fellépő divergenciák és az energialevágással gyorsan növekvő állapotszám miatt ebben a modellben csak kis térfogatokra szolgáltat számszerűleg pontos eredményeket, de ez elegendő volt ahhoz, hogy a perturbált konform térelméletből számított energiakorrekciókkal való összhangját ellenőrizzük. Nagyobb térfogatoknál az energiakülönbségek konvergenciája az általunk elérhető állapotszámoknál még nem fejeződött be, így a lélegzőtömegeket nem ellenőrizhettük, de a spektrum jellege a korábban megállapított kinkszerkezetet ettől függetlenül tükrözte, így az alul fekvő állapotokat az UV- és az IR régióban is azonosítani tudtuk.

A függelék

Csonkított konform állapotter közelítés

A TCSA egy numerikus módszer perturbált konform térelméletek véges térfogatbeli spektrumának vizsgálatára. Virasoro-minimálmodellek perturbációinak vizsgálatára fejlesztette ki Yurov és Zamolodchikov [56], de később kiterjesztésre került a $c = 1$ modellek perturbációira is [15, 16]. Alapfeltevése, hogy a perturbált Hamilton-operátor a konform térelmélet Hilbert-terén hat, és mátrixelemei kiszámíthatók az elméletben. Így a Hilbert-tér alkalmas levágásával az energiaszintek meghatározása numerikus diagonalizálási problémává válik.

A TCSA-módszer különösen jól használható tömeges deformációk vizsgálatára. A perturbált elmélet számos nemperturbatív paramétere mérhető így, például a különböző gerjesztések tömegei és a vákuumenergia-sűrűség. Ha a vizsgált perturbáció integrálható, mód nyílik az egzakt S-mátrix numerikus ellenőrzésére is.

A perturbált Hamilton-operátor az x térkoordináta kompaktifikálásával kapott hengeren

$$H = \frac{2\pi}{L} H_{\text{CFT}} + \lambda H_1 \quad (\text{A.1})$$

$$H_1 = \int_0^L \Psi(x, t) dx, \quad (\text{A.2})$$

melynek konform állapotok közötti mátrixelemeit szeretnénk felírni. Jelölje Δ és $\bar{\Delta}$ a Ψ perturbáló tér konform súlyait. A tér az egyszerűség kedvéért legyen spintelen: $\Delta = \bar{\Delta}$. A λ csatolási állandó skáladimenziója dimenzióanalízissel meghatározva $[\lambda] = M^{2-2\Delta}$, ahol M az elmélet valamilyen tömegskálája. A perturbáció mátrixelemei

$$(H_1)_{ab} = \int_0^L \langle a | \Psi(x, t) | b \rangle dx, \quad (\text{A.3})$$

illetve a $z = e^{\frac{2\pi}{L}(t+ix)}$ transzformációval áttérve a síkra, majd megfelelő dilatációval $t = 0$ -ra:

$$(H_1)_{ab} = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{2\Delta} \int_0^L \langle a | \Psi(z, \bar{z})|_{t=0} | b \rangle dx. \quad (\text{A.4})$$

Ψ mindkét oldalára beszúrva az $e^{-iPx}e^{iPx}$ egységoperátort, az integrálás elvégezhető:

$$(H_1)_{ab} = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{2\Delta} L \langle a | \Psi(1, 1) | b \rangle \delta_{\Delta_a - \bar{\Delta}_a, \Delta_b - \bar{\Delta}_b}. \quad (\text{A.5})$$

H_{CFT} a konform állapotokon diagonális:

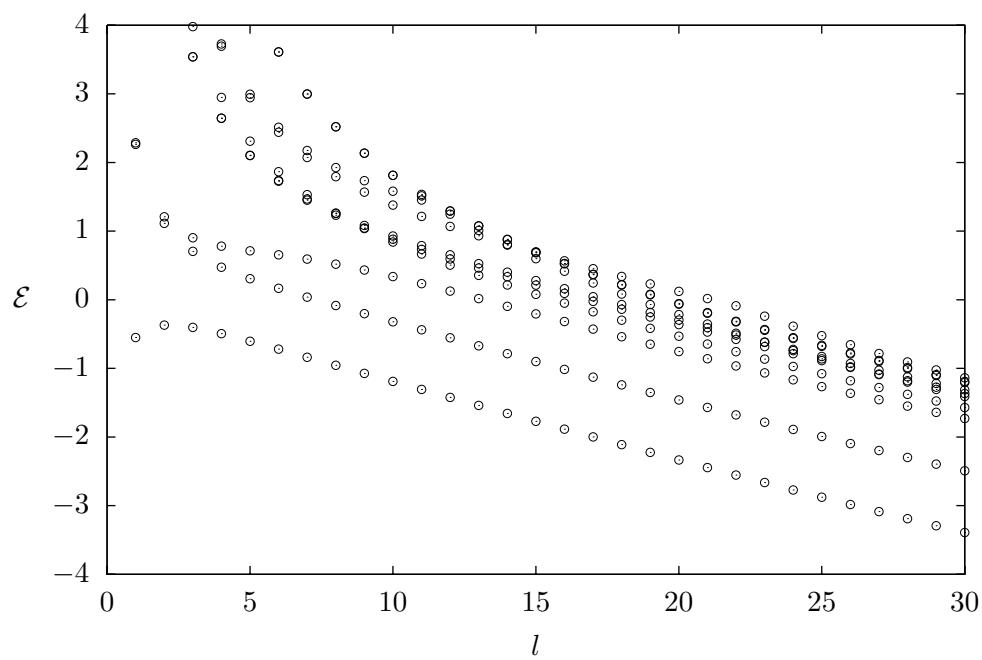
$$H_{\text{CFT}} = L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12}, \quad (\text{A.6})$$

ahol a c centrális töltés a konform térelmélet jellemzője. A $\kappa(\Delta)$ tömeghézag bevezetésével a csatolási állandó $\lambda = \kappa(\Delta)M^{2-2\Delta}$ alakban dimenziótlanítható; az energiát szintén M egységekben mérve a teljes Hamilton-operátor a

$$\hat{H} = \frac{H}{M} = \frac{2\pi}{ML} \left(H_{\text{CFT}} + \kappa(\Delta) \frac{(ML)^{2-2\Delta}}{(2\pi)^{1-2\Delta}} \Psi(1, 1) \delta_{\Delta_a - \bar{\Delta}_a, \Delta_b - \bar{\Delta}_b} \right) \quad (\text{A.7})$$

alakot veszi fel.

A $l = ML$ dimenziótlán térfigatot bevezetve azt találjuk, hogy a jobb oldalon minden dimenziótlanná válik. Ez egyrészt hasznos a numerikus eredmények kezelhetősége szempontjából, másrészt láthatóvá vált, hogy mit jelent Ψ relevanciája. A perturbáció pontosan akkor nem tűnik el az $l \rightarrow \infty$ limeszben, ha $\Delta < 1$. Viszont ez esetben az elmélet $l \rightarrow 0$ limesze tiszta konform térelmélet. A vákuumenergiára például az $E_{\text{vákuum}}/M = -\pi c/(6l)$ egzakt eredményt kapjuk, unitér konform elméletekben ugyanis $\Delta_{\text{vákuum}} = \bar{\Delta}_{\text{vákuum}} = 0$.



A.1. ábra. Egy tipikus nyers TCSA-spektrum alsó 10 értéke

B függelék

Formfaktor-perturbációszámítás

B.1. A módszer bevezetése

A jól ismert kovariáns perturbációszámítással azonos módon indulunk el a formfaktor-perturbációszámítás [28] formuláinak levezetéséhez is. Tekintsünk egy Minkowski-térbeli kvantumtérelméletet, melyet a következő hatás definiál:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 - \lambda \int d^2x \Psi(x), \quad (\text{B.1})$$

ahol Ψ az \mathcal{A}_0 által meghatározott egzaktul megoldható (de nem feltétlenül szabad) elmélet egy operátora. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az \mathcal{A}_1 által bevezetett új kölcsönhatás nem változtatja meg az elmélet részecskéinek számát, azaz csak a tömegeiket módosítja, a stabilitási tulajdonságait nem. Adiabaticus hipotézisben, azaz, ha feltesszük, hogy a perturbáció eltűnik $t \rightarrow \pm\infty$ -ben, dolgozhatunk aszimptotikus *in* és *out* állapotokkal; jelöljük q -val az impulzust és a -val az aszimptotikus részecske típusát ($1 \leq a \leq N$), ekkor egy bejövő n -részecske állapotra

$$|a_1(q_1), \dots, a_n(q_n)\rangle^{\text{in}} = |a_1(q_1), \dots, a_n(q_n)\rangle_0^{\text{in}}. \quad (\text{B.2})$$

A szórási amplitúdók a következőképpen írhatók fel:

$$\begin{aligned} S\{a_1(q_1), \dots, a_n(q_n) \rightarrow b_1(q'_1), \dots, b_m(q'_m)\} &= \\ &= {}^{\text{out}}\langle b_1(q'_1), \dots, b_m(q'_m) | a_1(q_1), \dots, a_n(q_n)\rangle^{\text{in}} = \\ &= {}^{\text{in}}\langle b_1(q'_1), \dots, b_m(q'_m) | S | a_1(q_1), \dots, a_n(q_n)\rangle^{\text{in}}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Az S-mátrix az időfejllesztő operátor határértékeként kapható meg:

$$S = \lim_{t \rightarrow \infty} U(t, -t), \quad (\text{B.4})$$

B. FORMFAKTOR-PERTURBÁCIÓSZÁMÍTÁS

ahol $U(t, t_0)$ az alábbi egyenlet megoldása:

$$i \frac{d}{dt} U(t, t_0) = H U(t, t_0) \quad U(t_0, t_0) = \mathbb{1}; \quad (\text{B.5})$$

$H = H_0 + H_1$ a (B.1) elmélet Hamilton-operátora. Könnyen belátható, hogy $U(t, t_0)$ faktorizálható $U = U_0 U_1$ alakban, ahol U_0 a (B.5) egyenlet megoldása $H \rightarrow H_0$, U_1 pedig $H \rightarrow \tilde{H}_1(t) = U_0^{-1} H_1 U_0$ cserével. Ennek megfelelően a szórás mátrix is faktorizálódik $S = S_0 S_1$ alakban, ahol $S_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} U_0(t, -t)$ az \mathcal{A}_0 elmélet egzaktul ismert szórás mátrixa:

$$\begin{aligned} S_0 \{a_1(q_1), \dots, a_n(q_n) \rightarrow b_1(q'_1), \dots, b_m(q'_m)\} &= \\ &= {}^{\text{out}}_0 \langle b_1(q'_1), \dots, b_m(q'_m) | a_1(q_1), \dots, a_n(q_n) \rangle_0^{\text{in}} = \\ &= {}^{\text{in}}_0 \langle b_1(q'_1), \dots, b_m(q'_m) | S_0 | a_1(q_1), \dots, a_n(q_n) \rangle_0^{\text{in}}, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

míg S_1 szokásos formális reprezentációja az

$$S_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} U_1(t, -t) = \text{T exp}(i \mathcal{A}_1[\Psi]) \quad (\text{B.7})$$

időrendezett exponenciális.

Ezután a (B.2) és a (B.6) összefüggések felhasználásával a szórás amplitúdó az

$$\begin{aligned} &{}^{\text{out}}_0 \langle b_1(q'_1), \dots, b_m(q'_m) | a_1(q_1), \dots, a_n(q_n) \rangle_0^{\text{in}} = \\ &= {}^{\text{out}}_0 \langle b_1(q'_1), \dots, b_m(q'_m) | \text{T exp} \left(-i \lambda \int d^2 x \Psi(x) \right) | a_1(q_1), \dots, a_n(q_n) \rangle_0^{\text{in}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i \lambda)^k}{k!} \int d^2 x_1 \cdots d^2 x_k \\ &{}^{\text{out}}_0 \langle b_1(q'_1), \dots, b_m(q'_m) | T(\Psi(x_1) \cdots \Psi(x_k)) | a_1(q_1), \dots, a_n(q_n) \rangle_0^{\text{in}} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

alakba írható.

Eddig teljesen a szokásos kovariáns perturbációszámítás útján haladtunk. A következő lépés a Wick-tétel felhasználása, majd a gráfszabályok levezetése lenne. Mi azonban egy másik utat választunk, melyhez nem szükséges az elmélet Lagrange-függvényének ismerete, viszont kihasználjuk, hogy a Ψ perturbáló operátor mátrixelemei a kiinduló, megoldható elméletben egzaktul ismertek. Ez leginkább a kvantummechanikai időfüggő perturbációszámítás módszeréhez hasonlítható. Tehát a T-szorzatban szereplő szomszédos Ψ operátorok közé besúrjuk az aszimptotikus állapotok teljes rendszerére vett

$$\sum_n |n\rangle_0^{\text{in}} {}^{\text{in}}_0 \langle n| = \mathbb{1} = \sum_n |n\rangle_0^{\text{out}} {}^{\text{out}}_0 \langle n| \quad (\text{B.9})$$

összeget. Ezáltal a (B.8) egyenletben a térkoordinátákra vett integrálások elvégezhetőek, és az impulzusmegmaradást kifejező delta-függvényeket eredményeznek. Az idő szerinti integrálások az időrendezés miatt energianevezők megjelenéséhez vezetnek, mint az a

$$\begin{aligned}
& {}^{\text{out}}\langle b_1(q'_1), \dots, b_m(q'_m) | a_1(q_1), \dots, a_n(q_n) \rangle^{\text{in}} = \\
& = {}^{\text{out}}_0\langle b_1(q'_1), \dots, b_m(q'_m) | a_1(q_1), \dots, a_n(q_n) \rangle_0^{\text{in}} + (2\pi)^2 \delta^{(2)}\left(\sum_{j=1}^m q'_j - \sum_{j=1}^n q_j\right) \\
& \quad \left\{ -i\lambda {}^{\text{out}}_0\langle b_1(q'_1), \dots, b_m(q'_m) | \Psi(0) | a_1(q_1), \dots, a_n(q_n) \rangle_0^{\text{in}} + \right. \\
& \quad + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=2}^{\infty} (2\pi\lambda)^k \sum_{n_1} \dots \sum_{n_{k-1}} \left[\frac{\delta(Q - P_1) \dots \delta(Q - P_{k-1})}{(E - E_1 + i\epsilon) \dots (E - E_1 + i\epsilon)} \times \right. \\
& \quad \left. \left. \times {}^{\text{out}}_0\langle b_1(q'_1), \dots, b_m(q'_m) | \Psi(0) | n_1 \rangle_0 \dots {}^{\text{out}}_0\langle n_{k-1} | \Psi(0) | a_1(q_1), \dots, a_n(q_n) \rangle_0^{\text{in}} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{B.10}$$

kifejezésben látható. Itt E és Q a kezdeti-, E_i és P_i pedig a közbenső állapotokhoz tartozó energia illetve impulzus; a közbenső összegzések akár az in- akár az out állapotokra elvégezhetőek. Minthogy a Ψ operátor aszimptotikus állapotok közötti mátrixelemei ismertek, a (B.1) elmélet szórásamplitúdói elvben kiszámíthatók λ -ban perturbatíván.

A (B.10) képletnek azonban van még egy hibája: nem veszi figyelembe, hogy az új kölcsönhatás megváltoztatja a vákuumenergia-sűrűséget és a részecskék tömegeit. Hogy az állapotok normáját emiatt ne rontsuk el, *ellentagokat* kell bevezetnünk \mathcal{A}_1 -be. A következő feltételek teljesülését követeljük meg csatolási állandó tetszőleges értékénél:

$$\langle 0 | 0 \rangle = {}_0\langle 0 | 0 \rangle_0 = 1, \tag{B.11}$$

$${}^{\text{out}}\langle p | q \rangle^{\text{in}} = {}^{\text{out}}_0\langle p | q \rangle_0^{\text{in}} = 2\pi E \delta(p^1 - q^1). \tag{B.12}$$

A (B.11) feltétel kielégíthetjük, ha kivonunk egy konstans $\delta e_{\text{vákuum}}(\lambda)$ tagot a kölcsönhatási sűrűségből. Ezzel nyilván a vákuumenergia-sűrűség változását kompenzáljuk; végtelen térfogatú kovariáns perturbációs számításban többnyire figyelmen kívül szoktuk hagyni, ami a vákuum-vákuum buborékok elhagyásának felel meg. Véges térfogatban azonban ez mérhető mennyiség lesz, ezért érdemes megtartani.

Az egyrészecske-állapotok megfelelő normálását *tömegtagok* bevezetésével érhetjük el. Ezek operátorait a perturbálatlan formfaktoraikkal definiáljuk, azaz

$$F_{a_1 \dots a_n}^{O_{ab}^{(2)}} = {}_0\langle 0 | O_{ab}^{(2)}(0) | a_1(q_1), \dots, a_n(q_n) \rangle_0^{\text{in}} = \delta_{n,2} \delta_{a_1} \delta_{b,a_2}, \tag{B.13}$$

a $\delta M_{ab}^2(\lambda)$ együtthatókat pedig a (B.12) feltételből határozzuk meg rendről rendre.

Mindent összevetve, a szórásamplitúdó korrigált képlete (λ^2 rendig) a következő:

$$\begin{aligned}
 & {}^{\text{out}}\langle b_1(q'_1), \dots, b_m(q'_m) | a_1(q_1), \dots, a_n(q_n) \rangle^{\text{in}} = \\
 & = {}^{\text{out}}_0\langle b_1(q'_1), \dots, b_m(q'_m) | a_1(q_1), \dots, a_n(q_n) \rangle_0^{\text{in}} - i(2\pi)^2 \delta^{(2)}\left(\sum_{j=1}^m q'_j - \sum_{j=1}^n q_j\right) \times \\
 & \times \left\{ {}^{\text{out}}_0\langle b_1(q'_1), \dots, b_m(q'_m) | \lambda \Psi^{\text{R}}(0) | a_1(q_1), \dots, a_n(q_n) \rangle_0^{\text{in}} + \right. \\
 & \quad + \sum_{n_1} \frac{2\pi\delta(Q - P_1)}{(E - E_1 + i\epsilon)} {}^{\text{out}}_0\langle b_1(q'_1), \dots, b_m(q'_m) | \lambda \Psi^{\text{R}}(0) | n_1 \rangle_0 \times \\
 & \quad \left. \times {}_0\langle n_1 | \lambda \Psi^{\text{R}}(0) | a_1(q_1), \dots, a_n(q_n) \rangle_0^{\text{in}} + \dots \right\}, \quad (\text{B.14})
 \end{aligned}$$

ahol

$$\lambda \Psi^{\text{R}}(0) = \lambda \Psi(0) - \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^N \delta M_{ab}(\lambda)^2 O_{ab}^{(2)}(0) - \delta e_{\text{vákuum}}(\lambda). \quad (\text{B.15})$$

Megjegyzendő, hogy elsőnél magasabb rendben — mint az a kvantumtérelméletekre általában jellemző — divergens járulékokat kapunk a fenti formulából. Ezek kezelésének helyes módja jelen pillanatban még nem világos, ezért a továbbiakban csak elsőrendű korrekciók kiszámítására szorítkozunk.

B.2. Integrálható elméletek formfaktorai

Vizsgáljuk most konform térelméletek

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_{\text{CFT}} + \mu \int \Phi(x) d^2x \quad \Delta_\Phi < 1 \quad (\text{B.16})$$

integrálható deformációjaként előállt elméletek perturbációit! Az integrálható térelméletek meghatározó jellemzője, hogy végtelen sok funkcionálisan független egymással kommutáló megmaradó mennyiség létezik bennük; ezáltal lehetséges teljesen megoldani őket nemperturbatív módszerekkel [57]. A végtelen sok megmaradó mennyiség következménye, hogy csak rugalmas szórások mehetnek végbe: az ütközésből pontosan ugyanannyi részecske megy ki, mint amennyi bement, mégpedig ugyanazokkal az impulzusokkal. A szórás csak az azonos tömegű részecskék belső kvantumszámait változtathatja meg. Mi több, az S-mátrix teljesen faktorizálható kétrészecskés S-mátrixok szorzatára. Mindezeket

kombinálva az analitikusság, unitaritás és keresztezési szimmetria követelményeivel, az integrálható modellek S-mátrixa egzaktul meghatározható [58].

A továbbiakban a részecskéket a θ rapiditásukkal paraméterezzük; egy m tömegű részecskére $1 + 1$ dimenzióban az

$$(E, p) = (m \operatorname{ch} \theta, m \operatorname{sh} \theta) \quad (\text{B.17})$$

tömeghég feltétel áll fenn.

Egzaktul meghatározhatók az elmélet lokális operátorainak aszimptotikus állapotok közötti

$$\begin{aligned} b_1 \dots b_m F_{a_1 \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta'_1, \dots, \theta'_m \mid \theta_1, \dots, \theta_n) &\equiv \\ &\equiv {}_0^{\text{out}} \langle b_1(\theta'_1), \dots, b_m(\theta'_m) \mid \mathcal{O}(0) \mid a_1(\theta_1), \dots, a_n(\theta_n) \rangle_0^{\text{in}} \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

mátrixelemei is. Azokat a mátrixelemeket, melyeknél a baloldalon nincsen részecske, formfaktoroknak nevezzük:

$$F_{a_1 \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_n) = {}_0 \langle 0 \mid \mathcal{O}(0) \mid a_1(\theta_1), \dots, a_n(\theta_n) \rangle_0^{\text{in}}. \quad (\text{B.19})$$

Bármilyen általános mátrixelem kifejezhető formfaktorokkal analitikus elfolytatás útján:

$$\begin{aligned} b_1 \dots b_m F_{a_1 \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta'_1, \dots, \theta'_m \mid \theta_1, \dots, \theta_n) &= \\ &= F_{\bar{b}_1 \dots \bar{b}_m a_1 \dots a_n}(\theta'_1 + i\pi, \dots, \theta'_m + i\pi, \theta_1, \dots, \theta_n) + \text{nemösszefüggő tagok;} \end{aligned}$$

a felülvonás antirészecskét jelöl. A „nemösszefüggő tagok” akkor jelennek csak meg, ha a kimenő rapiditások között vannak a bemenő rapiditásokkal megegyezők.

A formfaktorok kiszámítása elvégezhető az egzakt S-mátrix ismeretében. Teljesíteniük kell ugyanis az úgynevezett Watson-egyenleteket [59]

$$\begin{aligned} F_{a_1 \dots a_i a_{i+1} \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_i, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n) &= \\ &= S_{a_i a_{i+1}}^{b_i b_{i+1}}(\theta_i - \theta_{i+1}) F_{a_a \dots b_{i+1} b_i \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_i + 1, \theta_i, \dots, \theta_n), \\ F_{a_1 a_2 \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta_i + 2\pi i, \theta_2, \dots, \theta_n) &= F_{a_2 \dots a_n a_1}^{\mathcal{O}}(\theta_2, \dots, \theta_n, \theta_1), \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

illetve az analitikus szerkezetük szorosan összefügg az elmélet részecskespektrumával, amit egy sor rekurzív egyenlet fejez ki. Végül, nagy rapiditásokra vett aszimptotikus viselkedésüket is meg lehet szorítani [60]: $\Delta_{\mathcal{O}}$ legyen az $\mathcal{O}(x)$ operátor konform skáladimenziója, $y_{\mathcal{O}}$ -t pedig definiáljuk a

$$\lim_{|\theta_i| \rightarrow \infty} F_{a_1 \dots a_n}^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_n) \sim \exp(y_{\mathcal{O}} |\theta_i|) \quad (\text{B.21})$$

összefüggéssel; ekkor

$$y_{\mathcal{O}} \leq \frac{\Delta_{\mathcal{O}} + \bar{\Delta}_{\mathcal{O}}}{2}. \quad (\text{B.22})$$

Problémát okozhat még mindezen egyenletek linearitása: ha találtunk egy megoldást, lehet, hogy az több operátor lineáris kombinációjához tartozik. Ennek feloldása a

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} F_{r+l}^{\mathcal{O}}(\theta_1 + \alpha, \dots, \theta_r + \alpha, \theta_{r+1}, \dots, \theta_{r+l}) &= \\ &= \frac{1}{\langle \mathcal{O} \rangle} F_r^{\mathcal{O}}(\theta_1, \dots, \theta_r) F_l^{\mathcal{O}}(\theta_{r+1}, \dots, \theta_{r+l}) \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

klasztertulajdonság figyelembe vétele, mely minden skálázó operátorra teljesül [29]. Amennyiben a (B.23) egyenletben szereplő $\langle \mathcal{O} \rangle$ vákuum-várhatóértékeket egzaktul — a normálást is beleértve — ismerjük, rögzíteni tudjuk a formfaktorok normálást is. Mindezek az egyenletek és kényszerek integrálható térelméletek esetén általában elegendőek a lokális operátorok formfaktorainak meghatározásához.

B.3. Sine–Gordon formfaktorok

A kétfrekvenciás sine–Gordon-modell első és második lélegzőjének tömegkorrekciói (2.5.2. fejezet) (2.32) szerint a megfelelő lélegző-formfaktorok kifejezéseit igénylik. Ezek részben megtalálhatók az irodalomban [21, 61], részben pedig előállíthatók formfaktor-bootstrappel, mint az alább következik.

Vezessük be az

$$F_{k_1 \dots k_n}^{(a)}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \langle 0 | V_a(0) | B_{k_1}(\theta_1) \dots B_{k_n}(\theta_n) \rangle_0^{\text{in}} \quad (\text{B.24})$$

jelölést a lélegző-formfaktorokra, ahol B_k az (1.4) szerinti m_k tömegű lélegzőt jelöli! Rendelkezésünkre áll

$$F_{11}^{(a)}(\theta_1, \theta_2) = -\mathcal{G}(a) \tilde{\lambda}^2 [a]^2 R(\theta_1 - \theta_2) \quad (\text{B.25})$$

és

$$\begin{aligned} F_{1111}^{(a)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) &= \mathcal{G}(a) \tilde{\lambda}^4 [a]^2 \prod_{1 \leq i < j \leq 4} R(\theta_i - \theta_j) \times \\ &\times \left\{ [a]^2 + \frac{(\sum_{i=1}^4 x_i)^2 \prod_{i=1}^4 x_i + (\prod_{i=1}^4 x_i \sum_{i=1}^4 x_i^{-1})^2}{\prod_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i + x_j)^{-1}} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

ahol

$$x_k = e^{\theta_k} \quad [a] = \frac{\sin(p\pi a/\beta)}{\sin(p\pi)}$$

$$\tilde{\lambda} = 2 \cos \frac{p\pi}{2} \sqrt{2 \sin \frac{p\pi}{2}} \exp \left\{ - \int_0^{p\pi} \frac{dt}{2\pi \sin t} t \right\},$$

és a $-2\pi + p\pi \leq \Im \theta \leq -p\pi$ sávban

$$R(\theta) = \mathcal{N} \exp \left\{ 8 \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{\operatorname{sh} t \operatorname{sh}(pt) \operatorname{sh}([1+p]t)}{\operatorname{sh}^2(2t)} \operatorname{sh}^2 \left[\left(1 - \frac{i\theta}{\pi} \right) t \right] \right\}, \quad (\text{B.27})$$

$$\mathcal{N} = \exp \left\{ 4 \int_0^\infty \frac{dt}{t} \frac{\operatorname{sh} t \operatorname{sh}(pt) \operatorname{sh}([1+p]t)}{\operatorname{sh}^2(2t)} \right\}. \quad (\text{B.28})$$

A számításokhoz rendkívül hasznos a

$$R(\theta)R(\theta \pm i\pi) = \frac{\operatorname{sh} \theta}{\operatorname{sh} \theta \mp i \operatorname{sh}(p\pi)} \quad (\text{B.29})$$

összefüggés, a fenti integrálreprezentációkat ugyanis ennek segítségével tudjuk kifejlesztani konvergenciájuk sávjából.

A második lélegző tömegkorrekciójának kiszámításához szükségünk lenne még $F_{22}^{(a)}$ explicit kifejezésére is, de az nem található meg az irodalomban. Kiszámítható viszont $F_{1111}^{(a)}$ -ből a *bootstrap* összefüggések felhasználásával. Általánosan igaz ugyanis — amennyiben az $a + b \rightarrow c$ fúzió U_{ab}^c fúziós szöggel végbemehet —, hogy az $n + 2$ és az $n + 1$ részecskés formfaktort az

$$i \operatorname{Res}_{\epsilon=0} F_{a_1 \dots a_n ab} \left(\theta_1, \dots, \theta_n, \theta_c + i\bar{U}_{ac}^b - \frac{\epsilon}{2}, \theta_c - i\bar{U}_{bc}^a + \frac{\epsilon}{2} \right) =$$

$$= \Gamma_{ab}^c F_{a_1 \dots a_n c}(\theta_1, \dots, \theta_n, \theta_c) \quad (\text{B.30})$$

összefüggés kapcsolja össze, ahol

$$i (\Gamma_{ab}^c)^2 = \operatorname{Res}_{\theta=iU_{ab}^c} S_{ab}(\theta) \quad (\text{B.31})$$

a fúzió erőssége, és $\bar{U}_{ac}^b = \pi - U_{ac}^b = U_{ab}^c/2$. Nekünk konkrétan a

$$\lim_{\epsilon, \delta \rightarrow 0} \epsilon \delta \left\langle 0 \left| \Psi \right| B_1 \left(\theta_2 + ip \frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2} \right) B_1 \left(\theta_2 - ip \frac{\pi}{2} + \frac{\epsilon}{2} \right) \right.$$

$$B_1 \left(\theta_1 + ip \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} \right) B_1 \left(\theta_1 - ip \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2} \right) \left. \right\rangle =$$

$$= - (\Gamma_{11}^2)^2 \langle 0 | \Psi | B_2(\theta_2) B_2(\theta_1) \rangle \quad (\text{B.32})$$

egyenlőséget kell felhasználnunk, azaz F_{22} -t kétszeri fúzióval állítjuk elő F_{1111} -ből. $p < 1/2$ annak feltétele, hogy B_2 a spektrumban legyen, így ezt a továbbiakban feltesszük. A B_1 - B_1 szórás egzakt S-mátrixának [9]

$$S_{11}(\theta) = \frac{\text{sh}(\theta) + i \sin(p\pi)}{\text{sh}(\theta) - i \sin(p\pi)} \quad (\text{B.33})$$

ismeretében $(\Gamma_{11}^2)^2 = 2 \text{tg}(p\pi)$ adódik a csatolási erősségre. A (B.29) egyenlőséget kihasználva megkapjuk a reziduum

$$R(-ip\pi + \epsilon) = -\frac{i}{\epsilon} \text{tg}(p\pi) \frac{1}{R(-i\pi[1+p])} \quad (\text{B.34})$$

értékét, és végül a keresett formfaktorra az

$$\begin{aligned} F_{22}^{(a)}(\theta) &= (\Gamma_{11}^2)^{-2} \mathcal{G}(a) \tilde{\lambda}^4 [a]^2 \left([a]^2 + \frac{1}{\text{ch } \theta + \cos(p\pi)} \right) \times \\ &\quad \times R^2(\theta) R(-\theta - ip\pi) R(-\theta + ip\pi) \frac{\text{tg}^2(p\pi)}{R^2(-i\pi[1+p])} \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

végeredményt kapjuk.

C függelék

A szuperszimmetrikus sine–Gordon-modell perturbált konform térelméleti keretben

Az energiaszintek elsőrendű pCFT-korrektciója alkalmas összefüggő konform korrelátorok komplex síkra történő integrálásával számítható [62]. Ha a csupasz Euklideszi hatást

$$\mathcal{A}_g = \mathcal{A}_{\text{CFT}} + g \int d^2w \zeta(w, \bar{w}) \quad (\text{C.1})$$

alakban írjuk a hengeren, ahol a csatolási állandó dimenziója $[g] = M^x$ (x a ζ operátor skáladimenziója: $x = 2 - 2\Delta$) és ζ normálása olyan, hogy a síkon

$$\langle \zeta(z, \bar{z}) \zeta(0, 0) \rangle = |z|^{-4\Delta_\zeta} \quad (\text{C.2})$$

legyen, akkor az $l = ML$ dimenziótlan térfogat kis értékei mellett az $|a\rangle$ állapot dimenziótlan energiájának első korrekciója

$$\frac{6l}{\pi} \mathcal{E}_a(l) = -(c - 24\Delta_a) - c_2^a \kappa^2 l^{2x} + \mathcal{O}(l^{4x}) \quad (\text{C.3})$$

módon írható, ahol $\Delta_a |a\rangle = L_0 |a\rangle = \bar{L}_0 |a\rangle$ a szóban forgó (spintelen) állapot konform súlya, c a konform térelmélet centrális töltése, a κ tömeghézag pedig az IR tömegskálával dimenziótlanított csatolás: $g = \kappa M^x$. Feltettük továbbá, hogy $\mathcal{O}(l^x)$ elsőrendű járuléka a terek szimmetriatulajdonságai folytán nem léphet fel.¹ A vezető rend együtthatója a

$$c_2^a = 6(2\pi)^{1-2x} \int_{\text{sík}} \frac{d^2z}{|z|^x} \langle a | \zeta(1, 1) \zeta(z, \bar{z}) | a \rangle_{\text{öf.}} \quad (\text{C.4})$$

¹A szuperszimmetrikus sine–Gordon-modellben a szuperszimmetriának köszönhetően *bulk* ($\sim l$) energiatag sem jelenhet meg.

integrállal számítható.

Konform normálású fermionokkal és $\mathcal{V}_{\pm 1,0}$ vertexoperátorokkal a szuperszimmetrikus sine–Gordon-modell perturbáló operátora

$$\zeta(z, \bar{z}) = i\psi(z)\bar{\psi}(\bar{z})\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{V}_{1,0}(z, \bar{z}) + \mathcal{V}_{-1,0}(z, \bar{z})) \quad (\text{C.5})$$

módon írható fel, a csatolási állandó pedig ez esetben

$$g = \frac{\mu}{2\pi\sqrt{2}} \quad (\text{C.6})$$

lesz. A perturbáció releváns, ha az r kompaktifikációs sugár egynél nagyobb, és akkor nagyrészt az

$$|n\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{V}_{n,0}(0,0) \pm \mathcal{V}_{-n,0}(0,0))|0\rangle \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{C.7})$$

állapotok lesznek a Neveu–Schwarz-szektorok alsó gerjesztett állapotai, ahol $|0\rangle$ a bozonikus- és a Neveu–Schwarz-vákuum tenzorszorzata:

$$|0\rangle = |0\rangle_{\phi} \otimes |\text{NS}\rangle. \quad (\text{C.8})$$

Ezekre az állapotokra a (C.4) kiszámításához szükséges konform korrelátorok előállítása rutinszerű, az integrálok pedig az

$$\int d^2z \frac{|z|^{\rho-2}}{|1-z|^{2\nu}} = \pi \gamma\left(\nu - \frac{\rho}{2}\right) \gamma\left(\frac{\rho}{2}\right) \gamma(1-\nu) \quad (\text{C.9})$$

általános formula segítségével értékelhetők ki.²

Hét alacsonyan fekvő állapot vezető pCFT-energiakorrekciójának így kapott együtthatóját gyűjti össze a C.1. táblázat, melyben

$$\alpha = \frac{3}{2} 8^{\frac{2}{r^2}} \frac{1}{\gamma^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2r^2}\right)} \left(\frac{1}{r^2 - 1}\right)^{2 - \frac{2}{r^2}}. \quad (\text{C.10})$$

Az összes feltüntetett esetben ν -ben analitikus elfolytatással lehet értelmet adni az egyébként divergens integráloknak. A divergencia fellépése nem meglepő, hiszen a perturbáló operátor

$$\Delta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2r^2} \quad (\text{C.11})$$

²Az integrál konvergencia $z \rightarrow 0$ -nál ha $\rho > 0$, $z \rightarrow 1$ -nél ha $\nu < 1$ és $z \rightarrow \infty$ -nél ha $2\nu - \rho > 0$. Esetünkben $2\nu > \rho > 0$ mindig teljesül, $\nu > 1$ -re pedig analitikusan folytatunk a jobb oldal felhasználásával.

$ a\rangle$	Δ_a	$c_2^a \kappa^2 / \alpha$
$ 0\rangle$	0	$\gamma^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2r^2}\right) \gamma \left(-\frac{1}{r^2}\right)$
$ 1\pm\rangle$	$\frac{1}{2r^2}$	$\gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2r^2}\right) \left[\gamma \left(-\frac{1}{r^2}\right) \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2r^2}\right) \pm \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2r^2}\right) \gamma \left(\frac{1}{r^2}\right) \right]$
$ 2\pm\rangle$	$\frac{2}{r^2}$	$\gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2r^2}\right) \gamma \left(-\frac{1}{r^2}\right) \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2r^2}\right)$
$ 3\pm\rangle$	$\frac{9}{2r^2}$	$\gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2r^2}\right) \gamma \left(-\frac{1}{r^2}\right) \gamma \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{2r^2}\right)$

C.1. táblázat. Vezető pCFT-energiakorrekciók

dimenziója $1/2$ -nél nagyobb, így a $\zeta(1)\zeta(z)$ operátorszorzat $z \rightarrow 1$ szingularitása a külső $|a\rangle$ állapottól függetlenül nem integrálható.

A Ramond-szektorban azt várjuk, hogy az alapállapot energiájának skálázó függvénye azonosan nulla legyen a sértetlen szuperszimmetria jelenléte miatt. A kérdés az, hogy vajon a vezető pCFT-korrekciók is megfelelnek-e ennek a várakozásnak. (C.3)-ból a konform járulék eltűnik, mivel

$$c - 24\Delta_R = \frac{3}{2} - 24\frac{1}{16} = 0. \quad (\text{C.12})$$

A következő járulék a

$$c_2^{|\text{R}\rangle} = 6(2\pi)^{1-2x} \int_{\text{sík}} \frac{d^2z}{|z|^x} \langle \text{R} | \zeta(1, 1) \zeta(z, \bar{z}) | \text{R} \rangle_{\text{öf.}} \quad (\text{C.13})$$

együtthatóval szerepel, ahol

$$|\text{R}\rangle = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \sigma(z, \bar{z}) |\text{NS}\rangle \quad (\text{C.14})$$

a Ramond-szektor alapállapota. $c_2^{|\text{R}\rangle}$ integrandusa formálisan pozitív, de divergens, így regularizációt igényel. Tagjait parciálisan integrálva azonban elérhető, hogy az egyes tagok (C.9) segítségével külön-külön végesíthetők váljanak, és az így regularizált tagok összege már nulla. Ebben az értelemben tehát a Ramond-szektorban a pCFT összhangban áll az alapállapoti skálázó függvény (energia) eltűnésével.

Irodalomjegyzék

- [1] M. Luscher, „Volume Dependence of the Energy Spectrum in Massive Quantum Field Theories. 1. Stable Particle States,” *Commun. Math. Phys.* **104** (1986) 177.
- [2] M. Luscher, „Volume Dependence of the Energy Spectrum in Massive Quantum Field Theories. 2. Scattering States,” *Commun. Math. Phys.* **105** (1986) 153–188.
- [3] A. B. Zamolodchikov, „Integrable field theory from conformal field theory,” *Adv. Stud. Pure Math.* **19** (1989) 641–674.
- [4] S. Ghoshal and A. B. Zamolodchikov, „Boundary S matrix and boundary state in two-dimensional integrable quantum field theory,” *Int. J. Mod. Phys.* **A9** (1994) 3841–3886, [hep-th/9306002](#).
- [5] J. A. Swieca, „Charge Screening and Mass Spectrum,” *Phys. Rev.* **D13** (1976) 312.
- [6] T. R. Klassen and E. Melzer, „Kinks in finite volume,” *Nucl. Phys.* **B382** (1992) 441–485, [hep-th/9202034](#).
- [7] A. J. Leggett, „A theoretical description of the new phases of liquid He-3,” *Rev. Mod. Phys.* **47** (1975) 331–414.
- [8] R. Rajaraman, *Solitons and instantons*. North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [9] A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, „Factorized S-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field models,” *Annals Phys.* **120** (1979) 253–291.
- [10] R. F. Dashen, B. Hasslacher, and A. Neveu, „The Particle Spectrum in Model Field Theories from Semiclassical Functional Integral Techniques,” *Phys. Rev.* **D11** (1975) 3424.

- [11] Z. Bajnok, L. Palla, G. Takacs, and F. Wagner, „The k-folded sine-Gordon model in finite volume,” *Nucl. Phys.* **B587** (2000) 585–618, [hep-th/0004181](#).
- [12] G. Feverati, F. Ravanini, and G. Takacs, „Truncated conformal space at $c = 1$, nonlinear integral equation and quantization rules for multi-soliton states,” *Phys. Lett.* **B430** (1998) 264–273, [hep-th/9803104](#).
- [13] T. R. Klassen and E. Melzer, „Sine-Gordon not equal to massive Thirring, and related heresies,” *Int. J. Mod. Phys.* **A8** (1993) 4131–4174, [hep-th/9206114](#).
- [14] A. B. Zamolodchikov, „Mass scale in the sine-Gordon model and its reductions,” *Int. J. Mod. Phys.* **A10** (1995) 1125–1150.
- [15] G. Feverati, F. Ravanini, and G. Takacs, „Nonlinear integral equation and finite volume spectrum of sine-Gordon theory,” *Nucl. Phys.* **B540** (1999) 543–586, [hep-th/9805117](#).
- [16] G. Feverati, F. Ravanini, and G. Takacs, „Scaling functions in the odd charge sector of sine-Gordon/massive Thirring theory,” *Phys. Lett.* **B444** (1998) 442–450, [hep-th/9807160](#).
- [17] C. Destri and H. J. de Vega, „New thermodynamic Bethe ansatz equations without strings,” *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 2313–2317.
- [18] C. Destri and H. J. De Vega, „Unified approach to thermodynamic Bethe Ansatz and finite size corrections for lattice models and field theories,” *Nucl. Phys.* **B438** (1995) 413–454, [hep-th/9407117](#).
- [19] A. Klümper and P. A. Pearce, „Analytic calculation of scaling dimensions: tricritical hard squares and critical hard hexagons,” *J. Stat. Phys.* **64** (1991) 13–76.
- [20] A. Klümper, M. Batchelor, and P. A. Pearce, „Central charges of the 6- and 19-vertex models with twisted boundary conditions,” *J. Phys.* **A24** (1991) 3111–3133.
- [21] S. L. Lukyanov and A. B. Zamolodchikov, „Exact expectation values of local fields in quantum sine-Gordon model,” *Nucl. Phys.* **B493** (1997) 571–587, [hep-th/9611238](#).
- [22] R. Guida and N. Magnoli, „Vacuum expectation values from a variational approach,” *Phys. Lett.* **B411** (1997) 127–133, [hep-th/9706017](#).

-
- [23] A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov, „Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory,” *Nucl. Phys.* **B477** (1996) 577–605, [hep-th/9506136](#).
- [24] V. Fateev, S. L. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov, and A. B. Zamolodchikov, „Expectation values of boundary fields in the boundary sine-Gordon model,” *Phys. Lett.* **B406** (1997) 83–88, [hep-th/9702190](#).
- [25] G. Delfino and G. Mussardo, „Non-integrable aspects of the multi-frequency sine-Gordon model,” *Nucl. Phys.* **B516** (1998) 675–703, [hep-th/9709028](#).
- [26] R. K. Bullough and P. J. Caudrey, *Solitons*, vol. 17 of *Topics in current physics*, p. 389. Springer–Verlag, Berlin, 1980.
- [27] M. Fabrizio, A. O. Gogolin, and A. A. Nersesian, „Critical properties of the double-frequency sine-Gordon model with applications,” *Nucl. Phys.* **B580** (2000) 647–687, [cond-mat/0001227](#).
- [28] G. Delfino, G. Mussardo, and P. Simonetti, „Non-integrable Quantum Field Theories as Perturbations of Certain Integrable Models,” *Nucl. Phys.* **B473** (1996) 469–508, [hep-th/9603011](#).
- [29] G. Delfino, P. Simonetti, and J. L. Cardy, „Asymptotic factorisation of form factors in two-dimensional quantum field theory,” *Phys. Lett.* **B387** (1996) 327–333, [hep-th/9607046](#).
- [30] P. Lüscher, „Selected topics in lattice field theory,” in *Fields, strings, critical phenomena: proceedings* (E. Brezin and J. Zinn-Justin, eds.), Les Houches Summer School in Theoretical Physics, (Amsterdam), pp. 451–528, North-Holland, 1988. [KEK 8901406](#).
- [31] Z. Bajnok, L. Palla, G. Takacs, and F. Wagner, „Nonperturbative study of the two frequency sine-Gordon model,” *Nucl. Phys.* **B601** (2001) 503–538, [hep-th/0008066](#).
- [32] G. Mussardo, V. Riva, and G. Sotkov, „Semiclassical particle spectrum of double sine-Gordon model,” *Nucl. Phys.* **B687** (2004) 189–219, [hep-th/0402179](#).
- [33] J. Goldstone and R. Jackiw, „Quantization of Nonlinear Waves,” *Phys. Rev.* **D11** (1975) 1486–1498.
- [34] G. Takacs and F. Wagner, „Double sine-Gordon model revisited,” *Nucl. Phys.* **B741** (2006) 353–367, [hep-th/0512265](#).

- [35] G. Mussardo, „Neutral bound states in kink-like theories,” *Nucl. Phys.* **B779** (2007) 101–154, [hep-th/0607025](#).
- [36] G. Z. Toth, „A nonperturbative study of phase transitions in the multi-frequency sine-Gordon model,” *J. Phys.* **A37** (2004) 9631–9650, [hep-th/0406139](#).
- [37] J. M. Maldacena, „The large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231–252, [hep-th/9711200](#).
- [38] C. Ahn, „Complete S matrices of supersymmetric Sine-Gordon theory and perturbed superconformal minimal model,” *Nucl. Phys.* **B354** (1991) 57–84.
- [39] H. Nastase, M. A. Stephanov, P. van Nieuwenhuizen, and A. Rebhan, „Topological boundary conditions, the BPS bound, and elimination of ambiguities in the quantum mass of solitons,” *Nucl. Phys.* **B542** (1999) 471–514, [hep-th/9802074](#).
- [40] N. Graham and R. L. Jaffe, „Energy, central charge, and the BPS bound for 1+1 dimensional supersymmetric solitons,” *Nucl. Phys.* **B544** (1999) 432–447, [hep-th/9808140](#).
- [41] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and M. B. Voloshin, „Anomaly and quantum corrections to solitons in two-dimensional theories with minimal supersymmetry,” *Phys. Rev.* **D59** (1999) 045016, [hep-th/9810068](#).
- [42] A. Rebhan, P. van Nieuwenhuizen, and R. Wimmer, „The anomaly in the central charge of the supersymmetric kink from dimensional regularization and reduction,” *Nucl. Phys.* **B648** (2003) 174–188, [hep-th/0207051](#).
- [43] P. Fendley, „A Second supersymmetric S matrix for the perturbed tricritical Ising model,” *Phys. Lett.* **B250** (1990) 96–101.
- [44] S. Ferrara, L. Girardello, and S. Sciuto, „An infinite set of conservation laws of the supersymmetric sine-Gordon theory,” *Phys. Lett.* **B76** (1978) 303.
- [45] K. Schoutens, „Supersymmetry and factorizable scattering,” *Nucl. Phys.* **B344** (1990) 665–695.
- [46] A. B. Zamolodchikov, „Fractional-spin integrals of motion in perturbed conformal field theory,” in *Fields, Strings and Quantum Gravity* (H. Guo, Z. Qui, and E. Tye, eds.), Gordon&Breach, 1984.

-
- [47] A. B. Zamolodchikov, „Thermodynamics of imaginary coupled sine-Gordon: Dense polymer finite size scaling function,” *Phys. Lett.* **B335** (1994) 436–443.
- [48] T. J. Hollowood and E. Mavrikis, „The $N = 1$ supersymmetric bootstrap and Lie algebras,” *Nucl. Phys.* **B484** (1997) 631–652, [hep-th/9606116](#).
- [49] P. Mathieu, „Integrability of perturbed superconformal minimal models,” *Nucl. Phys.* **B336** (1990) 338.
- [50] P. Mathieu and G. Watts, „Probing integrable perturbations of conformal theories using singular vectors. II: $N = 1$ superconformal theories,” *Nucl. Phys.* **B510** (1998) 577–607, [hep-th/9707050](#).
- [51] A. B. Zamolodchikov, „Integrals of Motion in Scaling Three State Potts Model Field Theory,” *Int. J. Mod. Phys.* **A3** (1988) 743–750.
- [52] A. B. Zamolodchikov, „Integrals of Motion and S Matrix of the (Scaled) $T=T(c)$ Ising Model with Magnetic Field,” *Int. J. Mod. Phys.* **A4** (1989) 4235.
- [53] T. Inami, S. Odake, and Y.-Z. Zhang, „Supersymmetric extension of the Sine-Gordon theory with integrable boundary interactions,” *Phys. Lett.* **B359** (1995) 118–124, [hep-th/9506157](#).
- [54] R. I. Nepomechie, „The boundary supersymmetric sine-Gordon model revisited,” *Phys. Lett.* **B509** (2001) 183–188, [hep-th/0103029](#).
- [55] P. Baseilhac and V. A. Fateev, „Expectation values of local fields for a two-parameter family of integrable models and related perturbed conformal field theories,” *Nucl. Phys.* **B532** (1998) 567–587, [hep-th/9906010](#).
- [56] V. P. Yurov and A. B. Zamolodchikov, „Truncated conformal space approach to scaling Lee-Yang model,” *Int. J. Mod. Phys.* **A5** (1990) 3221–3246.
- [57] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*. Springer series in Soviet mathematics. Springer–Verlag, Berlin, 1987.
- [58] P. Dorey, „Exact s-matrices,” in *Conformal Field Theories and Integrable Models* (Z. Horváth and L. Palla, eds.), Proceedings of the Eötvös Graduate Course, (Budapest), p. 85, Springer–Verlag, 1996. [hep-th/9810026](#).

- [59] A. Fring, G. Mussardo, and P. Simonetti, „Form-factors for integrable Lagrangian field theories, the sinh-Gordon theory,” *Nucl. Phys.* **B393** (1993) 413–441, [hep-th/9211053](#).
- [60] G. Delfino and G. Mussardo, „The Spin spin correlation function in the two-dimensional Ising model in a magnetic field at $T = T(c)$,” *Nucl. Phys.* **B455** (1995) 724–758, [hep-th/9507010](#).
- [61] S. L. Lukyanov, „Form factors of exponential fields in the sine-Gordon model,” *Mod. Phys. Lett.* **A12** (1997) 2543–2550, [hep-th/9703190](#).
- [62] T. R. Klassen and E. Melzer, „The thermodynamics of purely elastic scattering theories and conformal perturbation theory,” *Nucl. Phys.* **B350** (1991) 635–689.