Evolúciós fogolydilemma játék különböző gráfokon

Vukov Jeromos Pál

Fizika doktori iskola
A doktori iskola vezetője: **Prof. Horváth Zalán**, akadémikus
Statisztikus fizika, biológiai fizika és kvantumrendszerek fizikája program
Programvezető: **Prof. Kürti Jenő**, MTA doktora

Témavezető:
Dr. Szabó György, MTA doktora
MTA MFA

és

Dr. Meszéna Géza, MTA doktora, egyetemi docens
ELTE TTK, Biológiai Fizika Tanszék

Eötvös Lóránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Biológiai Fizika Tanszék

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **3**

2. A fogolydilemma játék **5**

3. Modellek és vizsgálati módszerek **13**

3.1. A modell matematikai leírása 13

3.2. Monte Carlo szimulációk 16

3.3. Közelítő módszerek 17

4. Önkéntes részvételű fogolydilemma játék részleges térbeli és időbeli véletlen partnerséggel **23**

4.1. Bevezetés 23

4.2. Önkéntes fogolydilemma játék különböző partnerségi kapcsolatokkal 25

4.3. A stratégiapopulációk időfejlődése 30

4.4. Átlagos stratégiakoncentrációk és nyeremények 33

5. Fogolydilemma játék rögzített skálafüggetlen, hierarchikus szerkezeten **40**

5.1. Bevezetés 40

5.2. A modell 41

5.3. Monte Carlo szimulációk eredményei 43

6. Hierarchikus rácsszerkezetek **52**

6.1. Bevezetés 52

6.2. A modell 53

6.3. Rácsszerkezetek hierarchia nélkül 53

6.4. A stratégiapopulációk koncentrációja és az átlagos nyeremények hierarchikus rácsokon 56

7. A fogolydilemma játék fázisdiagramjai **66**
7.1. Kétdimenziós rácsszerkezetek 66
7.2. Véletlen reguláris gráfok 73
7.3. Egydimenziós lánc és a Newman-Watts kisvilág-módosítás . . 81

8. Összefoglalás **88**

1. Bevezetés

A játékelmélet napjaink egyik legdinamikusabban fejlődő tudományterülete. Olyan kutatási ágakat kapcsol össze, melyek korábban semmilyen kapcsolatban nem voltak egymással. Tudósok a társadalomtudomány, a viselkedéskutatás, a szociológia, a közgazdaságtan, a biológia és a fizika különböző területeiről valamennyien sikeresen tudják alkalmazni a játékelméletet kutatási témájuk továbbvitelére.

A játékelmélet alapjait Neumann János fektette le Oskar Morgensternnel együtt írt könyvükben [1], azonban ebben a könyvben még csak bizonyos közgazdasági problémákat modelleztek úgynevezett „játékok" segítségével. A modellek alapját az adta, hogy bizonyos döntési szituációkban nyeremény-mátrix (kifizetési mátrix) bevezetésével sikerült számszerűsíteni a résztvevők (játékosok) döntéseinek következményeit. Így az intelligens játékosok matematikai műveletek segítségével és a többi játékos döntési lehetőségeinek ismeretében meg tudták határozni a számukra legkedvezőbb döntést (stratégiát).

A játékelmélet alkalmazása az evolúciós játékelméleti modellek [2, 3, 4] bevezetésével az utóbbi évtizedekben meglehetősen kibővült. Ezek a modellek egyszerre sok (egy teljes populáció) játékos viselkedését vizsgálják, akik folyamatos kölcsönhatásban állnak egymással és időnként a darwini szelekcióhoz hasonlóan lehetőségük van stratégiájukat sikeresebbre változtatni. Ez az új megközelítés kitűnően alkalmas nagyon sokfajta közösség (emberi társadalom vagy társadalmi csoportok, állati és növényi társulások, fajok együttélése, stb.) viselkedésének matematikai vizsgálatára.

Az evolúciós modellek egyik nagy sikere az volt, hogy segítségükkel sikerült értelmezni az önző, csak az egyéni érdekeiket néző játékosok között fellépő önzetlen magatartás kialakulását. Ez az eredmény természetesen nagy visszhangot keltett a viselkedéstudósok, szociológusok között is.

Az evolúciós modellek sikere azonban más természettudományos kutatási területeken is felkeltette az érdeklődést, így alakult ki az úgynevezett szociofi-

zikai irányzat, ami az evolúciós modellek statisztikus fizikai módszerekkel való vizsgálatát tűzte ki célul. Ezek közé tartozik például a különféle szociális és ökológiai hálózatok statisztikus fizikai módszerekkel való elemzése, a kölcsönös együttműködés kialakulásához szükséges optimális feltételek megkeresése és egyéb társadalmi kölcsönhatásokra illeszkedő modellek kidolgozása is.

Ez a dolgozat is abból a célból íródott, hogy ezeket a célkitűzéseket közelebb vigye a megvalósuláshoz. A dolgozat felépítése a következő: a második fejezetben a fogolydilemma játék történetét, tulajdonságait és a vele kapcsolatos korábbi kutatási eredményeket ismertetem.

A harmadik fejezetben a vizsgált modellek matematikai keretének leírása és az alkalmazott vizsgálati módszerek (Monte Carlo szimuláció, átlagtérközelítés, dinamikus klaszterközelítés) bemutatása szerepelnek.

A negyedik fejezetben részlegesen rendezetlen gráfok által definiált közösségekben a fogolydilemma játék önkéntes változatát alkalmazva vizsgáljuk a kölcsönös együttműködés kialakulását [5].

Az ötödik fejezetben a társadalmat skálafüggetlen hierarchikus hálózat írja le. Ebben a rendszerben a vizsgált körülmények mellett az önzetlen együttműködő magatartás nem volt képes fennmaradni.

A hatodik fejezet az ötödik fejezetben tárgyalt modellt taglalja tovább a skálafüggetlen szerkezetet rácsstruktúrára cserélve. Ennek a változtatásnak az eredményeképpen az együttműködés a hierarchiaszintek számától függő mértékben ki tudott alakulni a rendszerben [6].

A hetedik fejezetben a a stratégiaátvételi függvényben definiált zajparaméter változtatásának hatását vizsgáljuk különféle szerkezeteken. Fázisdiagramok segítségével feltérképezzük azokat a paramétertartományokat, ahol az együttműködés képes fennmaradni [7, 8, 9].

Az utolsó fejezetben az elért eredményeket foglalom össze. A szövegben előforduló többes szám első személyű igealakok magyarázata az, hogy az eredményeket a hivatkozások között szereplő cikkekben látható társszerzőkkel együtt értük el.

2. A fogolydilemma játék

Az emberi társadalomban és az ökológia közösségekben megtalálható együttműködés régen felkeltette a tudósok érdeklődését. Hogyan képes kialakulni kooperáció önző egyedekből álló populációban? Ennek a kérdésnek a megválaszolására állították fel az úgynevezett fogolydilemma játék[1] modelljét.

A játék [11] névadó története szerint elkapnak két embert, akiket egy közösen elkövetett bűncselekménnyel vádolnak. Közvetlen bizonyíték azonban nincs ellenük, ezért valamilyen más módon kellene bizonyítani bűnösségüket. A vizsgálóbíró külön-külön felajánlja mindkettőjüknek, hogy tanúskodjon a másik ellen. Ebben a helyzetben négy különféle eset lehetséges. Ha mindketten hallgatnak, akkor a vizsgálóbírónak bizonyítékok híján a vizsgálati fogság letelte után szabadon kell engednie őket. Ha egyikőjük beárulja a másikat, míg társa fedezi őt, akkor az „áruló" koronatanúként azonnal szabadon bocsátják (vonzó lehetőség), társát viszont hosszú időre börtönbe csukják. Ez az eset természetesen a szereplők felcserélésével is lejátszódhat. Az utolsó variáció, amikor mindketten beárulják egymást: ekkor mindkettejüket börtönbe kerülnek egy rövidebb időtartamra.

Az intelligens fogoly természetesen tudja, hogy a vizsgálóbíró társának is meg fogja tenni ajánlatát, így ő a saját döntését a lehetséges kimenetelek ismeretében hozza meg. Mi lesz ez a döntés? Ha foglyunk logikusan dönt (és most azt feltételeztük, hogy intelligens, tehát logikusan fog dönteni), akkor elárulja társát, hiszen a másik fogoly döntésétől függetlenül mindig az árulással jár jobban. Ha társa fedezi őt, akkor az árulással még a vizsgálati fogságot sem kell letöltenie, míg ha társa elárulja, akkor a kölcsönös árulás következtében csak rövidebb időre kerül börtönbe. A konklúzió tehát: feltétel nélküli árulás. A baj csak az, hogy az intelligens tettestárs is hasonló logika szerint gondolkozik, így hasonló következtetésre jut. A végeredmény: kölcsönös árulás és ezzel a második legrosszabb végkimenetel „kiharcolása".

[1] Angol eredetiben Prisoner's Dilemma, amit van ahol Rabok Dilemmájaként fordítottak [10]

Itt jutunk el a dilemma szó magyarázatához, hiszen a kölcsönös együttműködés (hallgatás) mindkettejük számára sokkal előnyösebb lenne, ők azonban – intelligens voltukból következően – mégis a kölcsönös árulást választják.

Eddig a címadó történet. Most vonatkoztassunk el tőle és csak a konfliktus főbb jellemvonásait nézzük. Adott két játékos[2], akik egymás ellen játszanak. Két döntés közül kell választaniuk: vagy együttműködnek, vagy árulást követnek el. A különböző döntések követeztében különböző nagyságú jutalmat (nyereményt) kapnak. A nyereményeket az alábbi úgynevezett nyereménymátrixban (kifizetési mátrixban) adjuk meg: a táblázatban az X játékos Y ellen játszott fogolydilemma játékának nyereményeit tüntettük fel, E (együttműködés) és Á (árulás) jelöli az adott játékos lehetséges döntését:

$X \backslash Y$	Á	E
Á	B	K
E	V	J

A táblázatbeli jelölések: J a kölcsönös együttműködés jutalma, K az árulásra való kísértés, B a kölcsönös árulásért járó büntetés és V a vesztes (a jóhiszemű tettestárs) „nyereménye". Ha a nyeremények között fennáll a $V < B < J < K$ reláció, akkor fogolydilemma játékról beszélünk. A későbbiekben a fenti nyereménymátrix helyett egy átskálázott változatot használunk: a kölcsönös együttműködés jutalma egységnyi lesz, míg a kölcsönös árulásért a játékosok nem kapnak semmit. Az árulásra való kísértést b-vel jelöljük ($b > 1$), a balek „jutalmát" pedig c-vel ($c < 0$). Ez az átskálázás semmiben nem korlátozza a modell általánosságát.

A fogolydilemma játék tehát eredetileg egy kétszemélyes mátrixjáték, amelynek Nash-egyensúlya[3] az áruló stratégia. A modell természetesen nem

[2] A játékelméletben a játszmában résztvevő tagok általános elnevezése

[3] A Nash-egyensúlytól való egyoldalú eltéréssel egy játékos nem tudja növelni a bevételét. Ha egy játékos más stratégiára tér át, miközben partnere továbbra is a Nash-egyensúlybeli stratégiát követi, akkor a stratégiaváltó játékos új nyereménye alacsonyabb vagy ugyanakkora lesz, mint előzőleg volt.

csak a fent említett esetre alkalmazható, nagyon sok példát sorolhatnánk fel a köznapi életből, amelyek során fogolydilemma-szerű helyzeteket kell megoldani. Gondoljunk csak bele, hogy mi történik egy közös befektetés esetében: mindkét fél jól járna az üzlettel, de a haszon még nagyobb lenne, ha a saját hozzájárulásukat megtakaríthatnák, vagy legalább csökkenthetnék. A való életben szerencsére a jog azért mérsékli az árulásra való kísértés mértékét. Klasszikus világpolitikai példaként az atomfegyverek leszerelésének kérdését említhetjük: alapvetően mindkét nagyhatalom (az Egyesült Államok és Oroszország, vagy régebben a Szovjetunió) jól járt volna a kölcsönös leszereléssel, de nyilvánvalóan abszolút dominanciára tehetett volna szert az egyik, ha csak a másik fél szerelte volna le atomfegyvereit. Ezekből a példákból is látható, hogy a fogolydilemma játékot végülis egyfajta konfliktushelyzet általános modelljének tekinthetjük.

Hogyan lehet a dilemmát feloldani, kitörni az egyensúlyi helyzetből? A kölcsönös együttműködés kialakítására tett első próbálkozásként felvetették a játék ismétlésének lehetőségét: egy játszma ne csak egy fordulóból álljon, hanem minden lejátszott forduló után bizonyos valószínűséggel új forduló következzen. A fordulók között a játékosoknak (az előző fordulók eredményeinek ismeretében) lehetőségük van eldönteni, hogy milyen döntést hozzanak a következő fordulóban. Ha az ismétlés valószínűsége elég nagy, akkor az intelligens játékosok között kialakulhat a kölcsönös együttműködés, hiszen ebben az esetben egy-egy árulás kölcsönös árulások sorát, és ennek következtében meglehetősen kis nyereményt hozhat az egész hátralévő játszmára. Mivel a játékosok amellett, hogy intelligensek, önzőek[4] is (tehát csak a saját hasznukat nézik), kisebb valószínűséggel kockáztatják a hosszútávú, biztos, magasabb jövedelmet (a kölcsönös együttműködés jutalmát) az egyszeri extra profitért.

[4]Ezeket a feltevéseket azért kellett megtenni, hogy a modellt könnyebben lehessen kezelni matematikai eszközökkel, hiszen az emberi tényezők (szimpátia, bűntudat és az emberi természet további kevéssé számszerűsíthető tulajdonsága) figyelembe vétele nagyon elbonyolítaná a modellt.

A fogolydilemma jelleg megtartása végett ennél a modellnél egy másik megszorítást is kell tennünk a nyereménymátrix elemeire. A nyereményeknek ki kell elégíteniük a $B + K < 2J$ relációt. Ez a kikötés azért kell, mert enélkül a játékosok megtehetnék azt, hogy körönként felváltva árulják el egymást, és így nagyobb nyereményhez jutnak, mint a kölcsönös együttműködés által. Ez a matematikai melléktermék pedig már nem felel meg az eredeti modell megalkotásakor figyelembe vett tulajdonságoknak. Ugyanez a reláció az átskálázott paraméterekre: $b + c < 2$.

A több forduló következtében természetesen a játékosok által választható lehetőségek száma is megnőtt, a játékosok nagyon sokféle „stratégia" közül választhatnak. A stratégia megadja, hogy a játékos milyen döntéseket fog hozni a játszma folyamán bármely lehetséges szituációban. A stratégiák természetesen figyelembe vehetik a partner előző fordulókban hozott döntéseit is.

Példaként megemlíthetjük a *„mindig együttműködő"* és a *„mindig áruló"* stratégiát, amelyek a partner döntéseitől és az előző fordulók eredményeitől függetlenül mindig együttműködnek, illetve mindig árulóvá lesznek. Ez a két legegyszerűbb stratégia. A továbbiakban a mindig együttműködő stratégiát követő játékosokat együttműködőknek (rövid jelölésben: C), míg a mindig árulást elkövetőket árulóknak (rövid jelölésben: D)[5] fogjuk nevezni.

Érdemes még szót ejteni egy harmadik fajta stratégiáról, mely egyszerűsége dacára meglepően sikeresnek bizonyult. Ez a „Kölcsön Kenyér Visszajár" (KKV) stratégia[6] [10], ami az első fordulóban együttműködik, majd a partner előző fordulóbeli döntését ismétli. Mint látható, ez a stratégia együttműködéssel jutalmazza az együttműködést, az árulást azonban azonnal a következő fordulóban „megtorolja". Ha csak ezt a fent felsorolt háromféle stratégiát vesszük, látható, hogy nincs olyan stratégia, ami mindegyik ellen ideális lenne (azaz a lehető legnagyobb bevételt érné el), hiszen a mindig áruló ellen fo-

[5] Az angol „cooperator" és „defector" szavak kezdőbetűje miatt használatosak ezek a rövidítések.

[6] Angol eredetiben „Tit for Tat" (TFT)

lyamatosan árulást kellene elkövetni, míg a KKV ellen egy kölcsönös együttműködési sorozattal érhetjük el a legjobb eredményt (Szerencsés esetben egy árulással kicsit többet lehet nyerni a KKV-tól, ha a játszmának éppen akkor van vége, de ha nem találjuk el ezt a pillanatot, akkor a következő fordulóban a kölcsönös árulás vagy a KKV „viszontárulása" miatt már kevesebbet lesz az össznyeremény, mint ha a kölcsönös együttműködést választottuk volna.).

A kezdetek kezdetén Axelrod egy számítógépes versenyt rendezett [12]: sokfajta stratégia versengett egymással úgy, hogy egy fordulóban mindenki játszott mindenkivel, majd a legkevesebb nyereményt gyűjtő játékos stratégiáját a legtöbbet szerzővel helyettesítették. Ezután jöhetett a következő kör, amíg a végén mindenki azonos (az aktuális stratégiától függetlenül) döntéseket hozott, és ezáltal a játékosok azonos nagyságú nyereményre tettek szert. A szimulációk eredményeképpen kétfajta végállapot alakult ki: az egyikben mindig mindenki árulást követett el és a társadalmi összbevétel (a játékosok nyereményeinek összege) a lehető legkisebbre csökkent, míg a másikban mindenki folyamatosan együttműködött, így a társadalmi összbevétel maximálissá vált. A második végállapot létrejöttében nagy szerepe volt a KKV stratégiának, ez a stratégia ugyanis – mint a fent leírt tulajdonságaiból következik – „bünteti" az alapvetően áruló stratégiákat, és kölcsönös együttműködéssel jutalmazza a „barátságos" stratégiákat. A „verseny" egyik eredménye, hogy megmutatta, hogy sok jelenség leírásakor elegendő csak a fenti három stratégia (mindig együttműködő, mindig áruló, KKV) alkalmazására szorítkozni. Ha összehasonlítjuk ezeket a stratégiákat, látható, hogy a mindig együttműködő és a mindig áruló a két legegyszerűbb stratégia, hiszen gondolkodás nélkül, mindentől függetlenül választják az együttműködést, illetve az árulást. Ezekhez a stratégiákhoz képest a KKV költségesebb stratégia, hiszen memóriát és állandó odafigyelést igényel.

A kölcsönös együttműködés kialakításának érdekében tett másik próbálkozásként kiterjesztették a fogolydilemma játékot térbeli játékká. Így született meg az evolúciós fogolydilemma játék [2, 12, 4]. A modellnek ebben

a változatában egy egész képzeletbeli társadalom viselkedését vizsgálhatjuk. A társadalmi kapcsolatokat egy gráf segítségével definiáljuk. A gráf pontjai jelölik a játékosokat, és a gráf élei adják meg, hogy ki kivel kerülhet kölcsönhatásba (ki kit ismer). A hálózatot természetesen úgy választjuk meg, hogy minél pontosabban írja le a vizsgálandó közösségen belüli kapcsolatokat. Egy játékos össznyereményét az összes szomszédjával külön-külön lejátszott ismételt fogolydilemma játékból származó nyeremények összege adja. A játékosoknak időnként lehetőségük van arra, hogy a nyereménykülönbségtől függő valószínűséggel átvegyék az egyik szomszédjuk stratégiáját: a stratégiaátvételi valószínűséget úgy határozzuk meg (a józan ésszel összhangban), hogy a darwini evolúcióhoz hasonlóan a sikeresebb (nagyobb nyereményt gyűjtő) stratégia terjedjen el.

A klasszikus fogolydilemma játéktól eltérően a játékosok itt nem mérlegelik az összes lehetőséget (nem intelligensek), a képzeletbeli társadalmunkban létező stratégiák száma nem változik (illetve csak csökkenhet, ha egy adott stratégiát már senki sem követ), mivel stratégiaváltáskor csak olyan stratégiát lehet átvenni, amit előzőleg az egyik szomszéd alkalmazott. A játékosok nem intelligens voltával összhangban az alkalmazott stratégiák is a legegyszerűbbek közül kerülnek ki (pl.: mindig együttműködő, mindig áruló, KKV, stb.).

A térbeli kiterjesztés azért adott lehetőséget a kölcsönös együttműködés elterjedésére, mert itt a társadalmat leíró hálózat következtében két játékos kölcsönhatására a szomszédaikkal játszott fogolydilemma játékok is befolyással vannak. Vegyünk például két játékost négy-négy szomszéddal. Az egyik játékos (X) kövesse a mindig együttműködő, a másik (Y) a mindig áruló stratégiát. Térbeli kiterjesztés nélkül természetesen Y stratégiája lenne a győztes, itt azonban figyelembe kell venni a szomszédokat is. Tegyük fel, hogy X maradék három szomszédja szintén a mindig együttműködő stratégiát követi, míg Y szomszédai árulók. Ebben az esetben X össznyereménye $(3 - c)$ már jóval nagyobb lesz Y-énál (b), és így a mindig együttműködő

stratégia lesz a követendő példa. Látható, hogy az együttműködő játékosok egymást támogatva le tudják győzni az áruló stratégiát.

A fent leírt modell természetesen nem csak emberi társadalom modellje lehet. Az élővilágban előforduló más élőlények (állatok, növények, baktériumok, stb.) kölcsönhatásainak leírására [2] is felhasználható az evolúciós játékelmélet: a nyereménymátrix általánosításával egész sor különféle szituációt jellemezhetünk (általános mátrixjátékok). Ebben az olvasatban a stratégia megfelel a fajnak (vagy egy bizonyos viselkedésű csoportnak a fajon belül), a nyeremény a szaporodási vagy életképességnek (fitnesz), míg a stratégiaátvételnél az egyik faj egy egyede elpusztul és a helyére a másik faj egy egyede egy utódot hoz létre. A fogolydilemma helyzetet például sikerült már megfigyelni baktériumok és vírusok kölcsönhatásában is [13].

A térbeli kiterjesztés első lépéseként Nowak és May [14] egy kétdimenziós sejtautomata modellt készített a C és a D stratégia részvételével. A partnerségi kapcsolatokat a négyzetrács első- és másodszomszédai definiálták (Moore-szomszédság), ezen kívül a játékosok minden körben játszottak egy játszmát saját maguk ellen is. A stratégiaátvétel úgy történt, hogy egy adott játékos „megkereste", hogy szomszédai (akik közé önmaga is beletartozott) közül kinek a legnagyobb az össznyereménye, majd átvette a stratégiáját. Egy stratégiaváltás tehát egy 5×5-ös klaszter stratégiaeloszlásától függött. A stratégiák frissítése szinkronizáltan történt.

A szimulációk azt mutatták, hogy az együttműködők az egyenes határok mentén tudták elfoglalni az árulók „területeit", míg az árulók a szabálytalan határok mentén kerültek előnybe és tudtak előrenyomulni. A kétféle inváziós folyamat eredményeképpen a paraméterek bizonyos értékei mellett mindkét stratégia fennmaradhat. Későbbi vizsgálatok megmutatták, hogy ha a rendszerbe zajt is építünk, akkor a stratégiák által alkotott domének közötti határok szabálytalanabbá válnak [15, 16] és így az áruló stratégiának kedveznek. Az együttműködés fennmaradásának kedvez azonban, ha üres helyeket is elhelyezünk a hálózatban [15, 17], hiszen az üres helyek ebben

az esetben tulajdonképpen utódnemzésre képtelen árulókként viselkednek, és ezzel gátolják az árulók terjedését. A helyhez kötött játékosok közötti rövidtávú kölcsönhatások bizonyos paraméterértékek mellett (a kísértés mértéke ne legyen túl nagy) még akkor is fenntartják az együttműködést, ha a játékosok csak a két legegyszerűbb stratégiát követhetik. Ha azonban a kísértés mértékét egy bizonyos határ fölé emeljük, akkor az árulók fogják uralni a rendszert, az együttműködés teljesen eltűnik.

3. Modellek és vizsgálati módszerek

A Nowak és May féle sejtautomata modell több szempontból nem volt megfelelő, ezért tovább kellett fejleszteni. Elsőként a szinkronizált stratégiafrissítést vetettük el, minthogy ez nem jellemző sem az ökológiai, sem a társadalmat leíró modellekre. Az új módszer a véletlen sorrendű frissítés: egy elemi lépésben véletlenszerűen kiválasztunk egy játékost, és a szomszédaitól függően csak az ő stratégiáját változtatjuk meg.

A szimulációs időket nagyon megnövelte és ezzel együtt az analítikus módszerek alkalmazását is nehezítette, hogy egy stratégiaátvételnél egy 5×5-ös klasztert kellett figyelembe venni, ezért a stratégiaátvételi mechanizmust is megváltoztattuk: a játékos nem vizsgálja meg az összes szomszédjának az összbevételét, hanem csak egy szomszédot választ ki véletlenszerűen és vele hasonlítja össze a saját nyereményét.

Utolsó változtatásként a stratégiaátvétel determinisztikus voltát szüntettük meg a zaj bevezetésével: egy játékos nem feltétlenül veszi át a kiszemelt szomszéd stratégiáját, ha annak bevétele nagyobb az övénél. A stratégiaátvétel valószínűsége a nyeremények különbségétől és a zaj mértékétől függ: ha nagyobb a partner bevétele, nagy valószínűséggel fogják követni az ő stratégiáját. A zajnak alapvetően a közel azonos össznyereményű játékosok kölcsönhatásában van döntő szerepe, hiszen determinisztikus stratégiaátvételi valószínűségnél itt 100%-os valószínűséggel megtörténik (vagy nem történik meg, attól függően, hogy melyik játékost vizsgáljuk) a változás, míg a zajos esetben, ennek a valószínűsége csak közel 50%. A zaj bevezetésével a véletlen külső eseményeket, az irracionális döntéseket (pl.: érzelmek), a nyereménymátrix elemeinek fluktuációját, stb. vesszük figyelembe.

3.1. A modell matematikai leírása

Az előző fejezetben említett változtatásokat matematikai formába öntjük. A modell fő tulajdonságait a nyereménymátrix határozza meg, ez általános

alakban egy $n \times n$-es mátrix, ami valamilyen formában tartalmazza a 2. fejezetben leírt 2×2-es mátrixot:

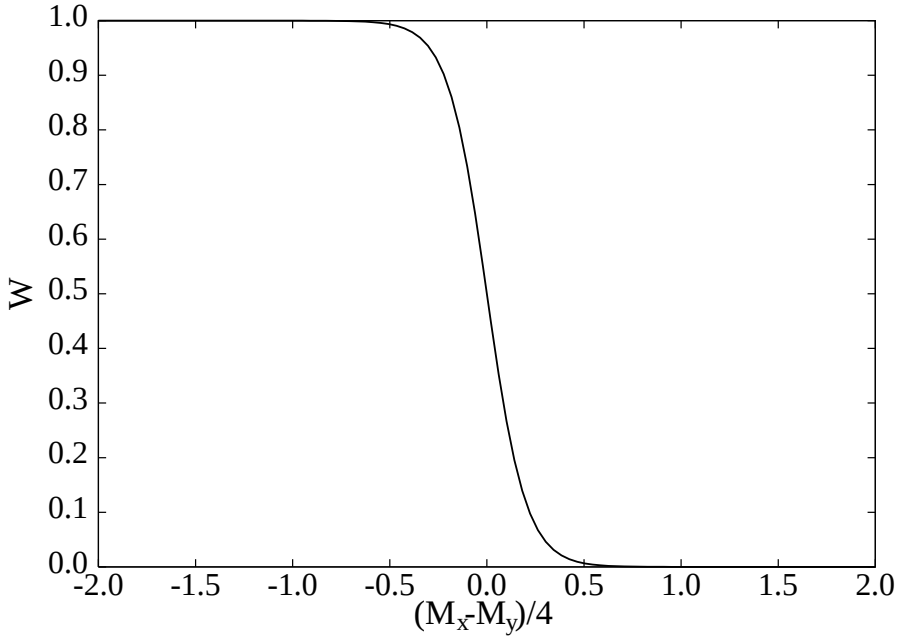
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Az egyes döntéseket n-elemű egységvektorokkal írjuk le. Most nem foglalkozunk a kevert stratégiákkal [4], tehát az egységvektorok mindig úgy néznek ki, hogy az egyik komponensük 1, a többi pedig 0. A stratégia leírja, hogy az aktuális fordulóban az időtől és a partner előző fordulókban hozott döntéseitől függően melyik egységvektor mellett fog dönteni a játékos. Ez nem zárja ki azt az esetet, hogy a játékos mindentől függetlenül mindig ugyanazt a döntést hozza, azaz stratégiája egy konstans egységvektor legyen (ekkor természetesen nevezhetjük stratégiának az adott egységvektort).

$$s(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A fenti jelöléseket használva az X játékos nyereménye a szomszédai ellen játszott fogolydilemma játékokból (egy fordulóban szerzett nyeremény):

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_{j \in \Omega_x} s_x^T \cdot A \cdot s_j = \\ &= \sum_{j \in \Omega_x} \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$



1. ábra. A stratégiaátvételi függvény. A függvény megadja annak a valószínűségét, hogy X átveszi Y stratégiáját, ha X nyereménye M_x, Y nyereménye pedig M_y. Az ábrázolásnál azonos szomszédszámot ($z = 4$) és $K = 0.1$ értéket használtunk. Az átmeneti tartomány szélessége körülbelül $2K$.

ahol Ω_x jelöli X szomszédainak halmazát, s_x az X játékos, s_j pedig a szomszédok stratégiája ($j_1, \ldots, j_n$ jelöli az aktuális s_j vektor elemeit). A játékos valós össznyereményét a fenti, egy fordulóbeli eredmény hosszú idejű átlaga adja, ezt M'_x-szel jelöljük. Ha olyan stratégiákkal van dolgunk, melyek nem függenek sem az időtől, sem a partner előző döntéseitől (ilyen például a mindig együttműködő és a mindig áruló stratégia), akkor $M_x = M'_x$.

A stratégiaátvétel valószínűsége, mint említettük a nyeremények különbségétől és a zaj mértékétől függ. Annak a valószínűsége, hogy játékos (X) átveszi egy szomszédjának (Y) stratégiáját:

$$W(s_x \leftarrow s_y) = \frac{1}{1 + \exp\left[\left(\frac{M'_x}{|\Omega_x|} - \frac{M'_y}{|\Omega_y|}\right)/K\right]},$$

ahol $|\Omega_x|$ az X játékos, $|\Omega_y|$ az Y játékos szomszédainak száma. A szomszédok számával való normálásra azért lehet szükség, mert lehetséges, hogy a szomszédok száma a két játékos esetében nem azonos. Skálafüggetlen gráfokon végzett vizsgálatok kimutatták, hogy a normálás mellőzése nagyban elősegítheti az együttműködés kialakulását [18]. A zaj nagyságát K-val jelöltük.

A stratégiaátvételi valószínűség (1. ábra) a darwini kiválasztódással összhangban működik:

$$\text{Ha} \quad \left(\frac{M'_x}{|\Omega_x|} - \frac{M'_y}{|\Omega_y|}\right) \gg K, \text{akkor } W(s_x \leftarrow s_y) \simeq 0,$$
$$\text{és ha} \quad \left(\frac{M'_y}{|\Omega_y|} - \frac{M'_x}{|\Omega_x|}\right) \gg K, \text{akkor } W(s_x \leftarrow s_y) \simeq 1.$$

3.2. Monte Carlo szimulációk

Modelljeinket legkönnyebben a számítógép segítségével, Monte Carlo (MC) szimulációk futtatásával vizsgálhattuk. A szimulációkat a következőképpen végeztük: Kiindulásként adott volt a gráf, ami a játékosok közötti kapcsolatokat definiálta. A játékosok számát N-nel jelöltük. Ha a stratégiakészlet k-elemű volt (kezdetben a játékosok k db különféle stratégiát követhettek), akkor a kiinduló véletlen állapotot úgy generáltuk, hogy minden stratégiát ugyanannyi (kb. N/k) játékos kövessen. Bizonyos modelleknél egy mesterségesen beállított kezdőfeltétel gyorsabban eredményre vezetett, de ennek részletezését az adott modell-leírásnál közöljük.

A kezdeti stratégiaeloszlás meghatározása után következett a rendszer „időfejlesztése". Egy elemi Monte Carlo lépés során véletlenszerűen kiválasztottunk egy játékost, akinek ilyenkor lehetősége volt stratégiáját egy szintén véletlenszerűen kiválasztott szomszédjának stratégiájára cserélni (a stratégiaátvételi valószínűséget ld. az előző alfejezetben). Az időfejlődés alapegysége, a Monte Carlo Lépés (MCL) N darab elemi MC lépésből áll, tehát egy MCL

alatt minden játékosnak átlagosan egyszer van lehetősége más stratégia átvételére.

Kis rendszerméretekre (ha kevés játékos volt) a szimuláció a fluktuációknak köszönhetően rövid időn belül belefutott az egyik homogén abszorbeáló állapotba (egy olyan állapotba, amikor minden játékos ugyanazt a stratégiát követi), ezért ezt a jelenséget elkerülendő, a szimulációkat akkora rendszeren futtattuk($N \simeq 10^5 - 10^6$ játékos), ahol az adott stratégiát követő játékosok (az adott „stratégiapopuláció") számának fluktuációja lényegesen kisebb volt a populáció átlagértékének minimumánál.

A szimulációk során feljegyeztük, az egyes stratégiákat követő játékosok számát (azaz a stratégiapopulációk egyedszámát), az adott stratégiát követő játékosok egyedszámának fluktuációját, a stratégiapopulációk által elért átlagos nyereményeket és az átlagos társadalmi bevételt (a játékosok nyereményeinek összege a játékosok számával normálva). Mindig ellenőriztük, hogy a kapott jelenségek kialakulása független-e a véletlen kezdeti feltételtől (több más kezdőfeltételből is elindítottuk a rendszert), azonban a zajos evolúciós dinamikának köszönhetően ez a függetlenség majdnem mindig fennállt. A későbbiekben emiatt csak akkor teszünk említést a kezdeti feltételtől való függetlenség vizsgálatáról, ha az adott jelenség kialakulása nem bizonyult függetlennek a kiindulási állapottól.

3.3. Közelítő módszerek

A MC szimulációk mellett természetesen közelítő számolásokat is alkalmaztunk, hogy a vizsgált rendszerekről többet is megtudjunk. Elsőként általában azt vizsgáltuk meg, hogy mi történik az átlagtér-közelítésben. Az átlagtér-közelítés nagyon általános eredményeket ad, hiszen a számolás folyamán nem használjuk fel, hogy a játékosok milyen gráfon helyezkednek el. Példaként kiszámoljuk, hogy az átlagtér-közelítés milyen eredményt jósol egy olyan társadalomban, melyben kezdetben csak együttműködő (tehát a mindig együttműködő stratégiát követő) vagy áruló (tehát a mindig áruló stratégiát követő)

játékosok vannak. Ebben az esetben a nyereménymátrix a bevezetőben említett formát ölti, a kétfajta stratégiának pedig az alábbi két egységvektor felel meg:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & 1 \end{pmatrix}, s_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s_D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vegyünk egy végtelen sok játékosból álló társadalmat, melynek kezdetben ρ hányada az együttműködő és $1-\rho$ hányada az áruló stratégiát követi. Az átlagtér-közelítésnek megfelelően a játékosok véletlenszerűen hatnak kölcsön egymással, tehát az együttműködő, illetve az áruló játékosok átlagos nyereménye a következő lesz: $P_C = \rho \cdot 1 + (1-\rho) \cdot c = \rho \cdot (1-c) + c$ (ne felejtsük el, hogy $c < 0$) és $P_D = \rho \cdot b + (1-\rho) \cdot 0 = \rho \cdot b$.

Az együttműködők koncentrációjának változását a stratégiaátvételi valószínűséggel összhangban a következő egyenlet fogja megadni (a $\rho(1-\rho)$ faktor annak a valószínűsége, hogy egy együttműködő (áruló) kölcsönhatásba kerüljön egy árulóval (együttműködővel)):

$$\dot{\rho} = \rho(1-\rho)\left[W(s_d \leftarrow s_c) - W(s_c \leftarrow s_d)\right] = -\rho(1-\rho)\tanh\frac{x}{2},$$

ahol $x = (P_D - P_C)/K = [\rho(b-1) - (1-\rho)c]/K$. Mivel x minden ρ esetében pozitív, (hiszen $c < 0$, $b > 1$ és természetesen $\rho \leq 1$) az együttműködők koncentrációjának deriváltja mindig negatív lesz, tehát az együttműködés a kezdeti koncentrációktól és a paraméterek értékétől függetlenül (hacsaknem $\rho = 1$ volt) egy idő után el fog tűnni a rendszerből. Az átlagtér-közelítés szerint tehát az áruló stratégia fogja uralni a rendszert.

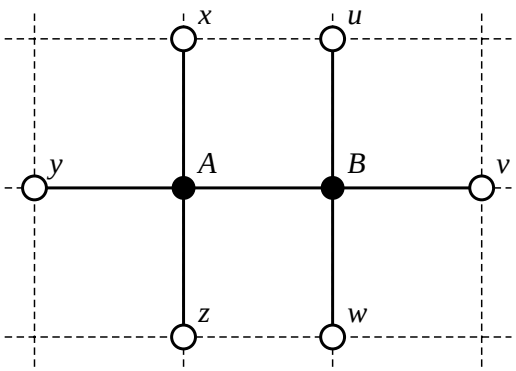
Az átlagtér-közelítésen kívül majdnem minden esetben a dinamikus klaszterközelítéssel is megvizsgáltuk az adott szituációt. Ennek legegyszerűbb esete a dinamikus párközelítés. Ebben az esetben a stratégiák koncentrációja helyett stratégiapárok előfordulási valószínűségére írunk fel egyenleteket.

Legyen s és s' a stratégiakészlet két tetszőleges eleme. A $p_{s,s'}$ valószínűség adja meg, hogy mekkora eséllyel találunk a társadalomban egy olyan játékost, aki az s stratégiát követi, és akinek van egy szomszédja, aki az s' stratégiát követi. A módszer leírásánál szorítkozzunk csak kételemű stratégiakészletre, hogy a közölt képletek könnyen átláthatóak maradjanak. A jelölés kedvéért legyen ez a két stratégia az együttműködő (C) és az áruló (D) stratégia. A módszer kiterjesztése többelemű stratégiakészletre, mint a levezetésből látható lesz, nem ütközik nagy nehézségekbe.

Első lépésként felírhatjuk a kompatibilitási feltételeket: $p_s = \sum_{s'} p_{s,s'}$, ahol p_s jelöli az s stratégia koncentrációját és s' végigfut az egész stratégiakészleten. Emellett természetesen még fennáll a $\sum_{s,s'} p_{s,s'} = 1$ reláció is. A kompatibilitás két stratégia esetére a $p_{s,s'} = p_{s',s}$ egyenlőséget adja. Ez a feltétel egyébként általánosságban (több stratégia esetében) nem következik a kompatibilitási egyenletekből, de a legtöbb esetben szimmetriaokokból mégis igaz. A párközelítési módszer alapja az, hogy a nagyobb klaszterek konfigurációs valószínűségét párvalószínűségekkel közelítjük. A három pontból álló klaszter konfigurációs valószínűségét például a következőképpen számolhatjuk ki: $p_{s,s',s''} = p_{s,s'} \cdot p_{s',s''}/p_{s'}$, ahol a nevezőbeli korrekció azért kellett, mert $p_{s,s'}$ és $p_{s',s''}$ is tartalmazza annak a valószínűségét, hogy a „középső" pont stratégiája s'.

A játékosok szomszédsági kapcsolatait definiáló gráf példánkban legyen egy négyzetrács. Ebben az esetben mindenkinek négy szomszédja van. A stratégiaátvételi mechanizmus folyamán véletlenszerűen kiválasztunk egy játékost (A), aki egy véletlenszerűen választott szomszédjával (B) hasonlítja össze össznyereményét, hogy eldöntse, érdemes-e átvennie B stratégiáját (2. ábra).

Az A és a B játékos által gyűjtött nyeremények (M_A, illetve M_B) a szomszédaikkal (x, y, z, B, illetve u, v, w, A) játszott fogolydilemma játékokból származnak. Ezeket a játékosokat ábrázoló konfigurációt láthatjuk a 2. ábrán. Ezen ábra segítségével meghatározhatjuk, hogy mekkora valószí-



2. ábra. A négyzetrács párközelítés szempontjából releváns része az A és a B központi játékosokkal. Ezt a konfigurációt használjuk fel arra, hogy meghatározzuk a $p_{(s_A,s_B)\to(s_B,s_B)}$ párkonfiguráció változás mértékét. A közelítés nem veszi figyelembe, hogy x, u és z, w is szomszédok, ezért például ugyanazt az eredményt adja négyzetrácsra és négyes konnektivitású véletlen reguláris gráfra (véletlen gráf, de minden pont konnektivitása négy).

nűséggel lesz a s_A, s_B párkonfigurációból s_B, s_B, tehát le tudjuk írni a párkonfigurációk időfejlődését (a további képletekben a túl kicsi betűk elkerülése végett a s_A jelölés helyett a A jelölést használjuk):

$$p_{A,B\to B,B} = \sum_{x,y,z} \sum_{u,v,w} W_{A\leftarrow B} \times \frac{p_{x,A}\ p_{y,A}\ p_{z,A}\ p_{A,B}\ p_{u,B}\ p_{v,B}\ p_{w,B}}{p_A^3\ p_B^3},$$

ahol a $W_{A\leftarrow B}$ stratégiaátvételi valószínűség (lásd 3.1. fejezet) függ $M_B - M_A$-től, és az összegzést az összes lehetséges konfiguráció figyelembevételével kell elvégezni. Ha az A pontban levő játékos átveszi B stratégiáját, akkor a $p_{B,B}, p_{B,x}, p_{B,y}$ és $p_{B,z}$ valószínűségek nőnek, míg a $p_{A,B}, p_{A,x}, p_{A,y}$ és $p_{A,z}$ valószínűségek csökkennek. Ennek eredményeképpen egy differenciálegyenletrendszert kapunk:

$$\dot{p}_{c,c} = + \sum_{x,y,z} [n_c(x,y,z)+1]\ p_{d,x}\ p_{d,y}\ p_{d,z}$$
$$\times \sum_{u,v,w} p_{c,u}\ p_{c,v}\ p_{c,w}\ W(M_c(u,v,w) - M_d(x,y,z))$$
$$- \sum_{x,y,z} n_c(x,y,z)\ p_{c,x}\ p_{c,y}\ p_{c,z}$$
$$\times \sum_{u,v,w} p_{d,u}\ p_{d,v}\ p_{d,w}\ W(M_d(u,v,w) - M_c(x,y,z)) \qquad (1)$$

$$\dot{p}_{c,d} = + \sum_{x,y,z} [2 - 2n_c(x,y,z)]\ p_{d,x}\ p_{d,y}\ p_{d,z}$$
$$\times \sum_{u,v,w} p_{c,u}\ p_{c,v}\ p_{c,w}\ W(M_c(u,v,w) - M_d(x,y,z))$$
$$- \sum_{x,y,z} [4 - 2n_c(x,y,z)]\ p_{c,x}\ p_{c,y}\ p_{c,z}$$
$$\times \sum_{u,v,w} p_{d,u}\ p_{d,v}\ p_{d,w}\ W(M_d(u,v,w) - M_c(x,y,z)), \qquad (2)$$

ahol $n_c(x,y,z)$ jelöli az együttműködő játékosok számát az x,y,z pontokon elhelyezkedő játékosok között, $M_c(x,y,z)$ ($M_d(x,y,z)$) egy együttműködő (áruló) játékos bevétele az x,y,z játékosokkal és egy árulóval (együttműködővel) folytatott fogolydilemma játékból. A stratégiaátvételi függvény argumentumába azt a nyereménykülönbséget írtuk, ami dönt a stratégiaadoptációról. Jelen esetben ez a két egyenlet elegendő a rendszer leírására, hiszen a kompatibilitási feltétel ($p_{c,d} = p_{d,c}$) és a következő nyilvánvaló egyenlőség ($p_{c,c}+p_{c,d}+p_{d,c}+p_{d,d} = 1$) kettővel csökkenti az ismeretlenek számát. (Három stratégia alkalmazásánál a szimmetriák és a különböző megszorító egyenletek alkalmazása után öt megoldandó egyenlet maradna.) A fenti egyenletekből az egyszerűség kedvéért elhagytuk a mindenütt jelenlevő $2p_{c,d}/(p_c^3 \cdot p_d^3)$ faktort, ez ugyanis nincs befolyással az egyensúlyi értékekre. A $\hat{p}_{s,s'}$ egyensúlyi megoldásokat a fenti egyenletek nullává tételével ($\dot{p}_{c,c} = \dot{p}_{c,d} = 0$) és $p_{c,c}$-re és

$p_{c,d}$-re való megoldásával kaphatjuk. A kapott egyensúlyi párvalószínűségekből aztán meghatározhatjuk az egyensúlyi koncentrációkat: $\hat{p}_s = \sum_{s'} \hat{p}_{s,s'}$.

A párközelítés általában nem ad jó eredményeket a kritikus pont közelében, mivel nem tudja kezelni a hosszú távú korrelációkat. Ugyanez a helyzet akkor is, ha a rendszerben nagy méretű klaszterek találhatóak. Ezek a problémák adott esetben kezelhetőek, ha nagyobb klaszterek konfigurációs valószínűségeivel dolgozunk (ez természetesen erősen megnöveli a számítások mennyiségét és ezzel együtt a számítási időt is).

4. Önkéntes részvételű fogolydilemma játék részleges térbeli és időbeli véletlen partnerséggel

Az eddig ismertetett modellekben a játékosok részvétele kötelező volt az aktuális játékokban, melyeket térbeli szomszédaikkal játszottak. Most megvizsgáljuk, mi történik akkor, ha a részvétel önkéntes és a partnerválasztás nem korlátozódik a térbeli szomszédokra. A játékban való részvétel megtagadását egy (az együttműködő és az áruló stratégia melletti) harmadik stratégiaként kezeljük. A szomszédsági kapcsolatokban fellépő időbeli és térbeli rendezetlenség hatásait vizsgáljuk, miközben a szomszédok számát négyre fixáljuk, hogy a szomszédok számának esetleges fluktuációjából adódó hatásokat kiküszöböljük. Megmutatjuk, hogy ha a szomszédokat teljesen véletlenszerűen választjuk (átlagtér határeset), akkor csak a „magányosok" maradnak a rendszerben, míg a négyzetrácson a három stratégia a ciklikus invázió következtében együttél és önszerveződő mintázatot hoz létre. Ha a szomszédsági kapcsolatok (a bevezetett térbeli rendezetlenség miatt) reguláris kisvilág szerkezettel írhatóak le, akkor a rendezetlenség mértékének egy bizonyos küszöbértékét elérve a stratégiák koncentrációjának homogén oszcillációját figyelhetjük meg a rendszerben. Hasonló jelenséget figyelhetünk meg csak nagyobb érzékenységgel, ha a szomszédokat minden iterációs lépésben bizonyos valószínűséggel ideiglenesen véletlen szomszédokkal helyettesítjük.

4.1. Bevezetés

Néhány éve került bevezetésre a „magányos" (loner, L) stratégia, hogy segítségével a térbeli fogolydilemma játékokban nagyobb b értékekre se mindig az abszorbeáló D (áruló) állapot legyen a stacionárius stratégiaeloszlás [19, 20, 21]. Egyfajta értelmezés szerint a „magányos" stratégiát választók képviselik a társadalom azon tagjait, akik félnek attól, hogy kizsákmányolják őket, ezért nem vesznek részt a fogolydilemma játékban, inkább megelégsze-

nek egy alacsonyabb, de biztos bevétellel, amit megosztanak szomszédaikkal. Egy másik lehetséges értelmezés, hogy a „magányos" stratégiát követő játékos döntésével partnerét is hasonló magatartásra kényszeríti.

A térbeli evolúciós játékoknál ciklikus dominancia következményeként (L elfoglalja D-t, D elfoglalja C-t, C elfoglalja L-t) mindhárom stratégia fennmarad és sajátos önszerveződő mintázat alakul ki a térbeli evolúciós fogolydilemma játék folyamán. Hasonló következtetések születtek egy korábbi modellből, melynél a „magányos" stratégiát a „Kölcsön Kenyér Visszajár" („Tit For Tat") stratégia helyettesítette, melyet a játékosok külső kényszer hatására véletlenszerűen a kisebb költségű együttműködő (ehhez nem kell memória) stratégiára cserélhettek[22]. Jelen modellünk azonban sokkal kényelmesebben kezelhető keretet nyújt a ciklikus dominancia és a véletlen szomszédsági kapcsolatok együttes tanulmányozására.

A továbbiakban a stratégiaeloszlásban felbukkanó időbeli és térbeli mintázatokkal és a különböző, részleges, véletlen szomszédsági kapcsolatokból adódó nyereményváltozásokkal foglalkozunk. Két esetet vizsgálunk, és a szomszédok számát mindkettőnél négyre rögzítjük. Az első esetben úgy alakítjuk ki a szomszédsági kapcsolatokat megadó hálózatot, hogy egy négyzetrácson az elsőszomszéd kapcsolatok egy részét bizonyos valószínűséggel átkötjük (természetesen azzal a megszorítással, hogy a végén minden játékosnak négy szomszédja legyen): a későbbiekben ezt térbeli (szerkezeti) rendezetlenségnek fogjuk nevezni. A második esetben a szomszédsági hálózat által megadott játékostársakat iterációs lépésenként bizonyos valószínűséggel ideiglenesen véletlen szomszédokra cseréljük: a későbbiekben időbeli rendezetlenség. Végül összehasonlítjuk a rögzített és az időben változó véletlen szomszédság hatásait. Ez a modell kiszűri a szomszédok számának változásából adódó hatásokat, amelyek higított rácsok [15, 17] és különböző szociális hálózatok [23, 24, 25] esetében merültek fel.

4.2. Önkéntes fogolydilemma játék különböző partnerségi kapcsolatokkal

A „magányos” stratégia bevezetésével a nyereménymátrix a következő alakot ölti:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & \sigma \\ c & 1 & \sigma \\ \sigma & \sigma & \sigma \end{pmatrix}$$

A mátrixban σ $(0 < \sigma < 1)$ jelöli a „magányos” által kapott nyereményt, és mint látszik, ugyanennyit kap partnere is a hagyományos fogolydilemma játék mellőzéséért.

Evolúciós fogolydilemma játékunkban a három választható stratégiát a következő (konstans) egységvektorok jellemzik:

$$s_D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s_L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Minthogy ennél a modellnél a szomszédok száma rögzített, a stratégiaátvételi valószínűség képletében nem szükséges a szomszédok számával normálni a játékosok nyereményét (a normálás csak egy skálafaktor lenne a zajban):

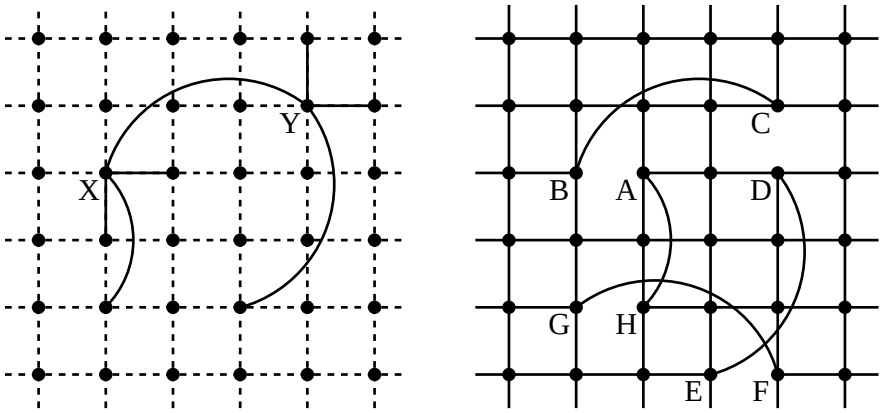
$$W(s_x \leftarrow s_y) = \frac{1}{1 + \exp\left[(M_x - M_y)/K\right]},$$

ahol M_x az X, M_y az Y játékos össznyereménye, K pedig szokás szerint a zaj.

Vizsgálataink folyamán a $c = -0.1$, $\sigma = 0.3$, and $K = 0.1$ paraméterértékeket használtuk.

A 3. ábra jobb oldali részén látható, hogy a rögzített véletlen szomszédságnál a kapcsolatok olyanok, mint egy reguláris kisvilág hálózatban. A térbeli (szerkezeti) véletlenség mértékét Q-val jelöljük. Ez a paraméter adja meg, hogy az eredeti periodikus határfeltétellel ellátott négyzetrácson az elsőszomszéd kapcsolatok mekkora hányadát kötöttük át. A $Q \to 0$ esetben természetesen visszakapjuk a négyzetrácsot, míg a $Q = 1$ eset a véletlen reguláris gráf [26] (minden pont fokszáma négy) határesetnek felel meg, ahol a térbeli koordináták elveszítik jelentésüket. A $Q = 0$ és a $Q = 1$ esetet már a [21] számú referenciában megvizsgálták, ezért jelen dolgozatban 0 és 1 közötti Q paraméterértékeknek megfelelő, a szociális és közgazdasági hálózatokra jellemző [27] kisvilág szerkezeteket fogjuk vizsgálni.

A másikfajta vizsgált rendszerben az alapszerkezet egy periodikus határfeltétellel ellátott négyzetrács, ahol az első szomszédok vannak partnerségi kapcsolatban. A játékosok a standard kapcsolatok helyett P valószínűséggel választhatnak ideiglenes partnereket az adott iterációs lépésben (3. ábra bal oldali része). Mint látjuk, a szomszédok száma itt is négyre fixált minden pontnál. Noha a szerkezeti és az időbeli rendezetlenséget egyszerre is tanulmányozhatnánk, csak olyan esetekre szorítkozunk, ahol vagy $P = 0$ vagy $Q = 0$. Így egy jelenség, amit az adott esetben megfigyelünk, biztos, hogy az abban az esetben alkalmazott rendezetlenség hatása. A $P = Q = 0$ eset megfelel a szabályos négyzetrácsnak elsőszomszéd kapcsolatokkal. A $P = 1$ esetben, mivel ekkor minden lépésben minden szomszéd véletlenül kerül kiválasztásra, természetesen átlagtérszerű viselkedést várunk. Ez a várakozás természetesen nem csak $Q = 0$, hanem tetszőleges Q érték mellett is igaz. Alacsony P érték mellett a rögzített kapcsolatok mentén való stratégiaátvétel az együttműködést támogatja, mint a hagyományos térbeli modelleknél láthattuk [14]: az árulók önmagukat büntetik, ha egy szomszédjuk átveszi a D stratégiát, hiszen ekkor egymástól mindketten „meglehetősen” kevés nyereményt kapnak, míg az együttműködőknél a „példakép” és „tanítványa” is részesül a stratégiaátvétel következtében létrejött kölcsönös együttműködés

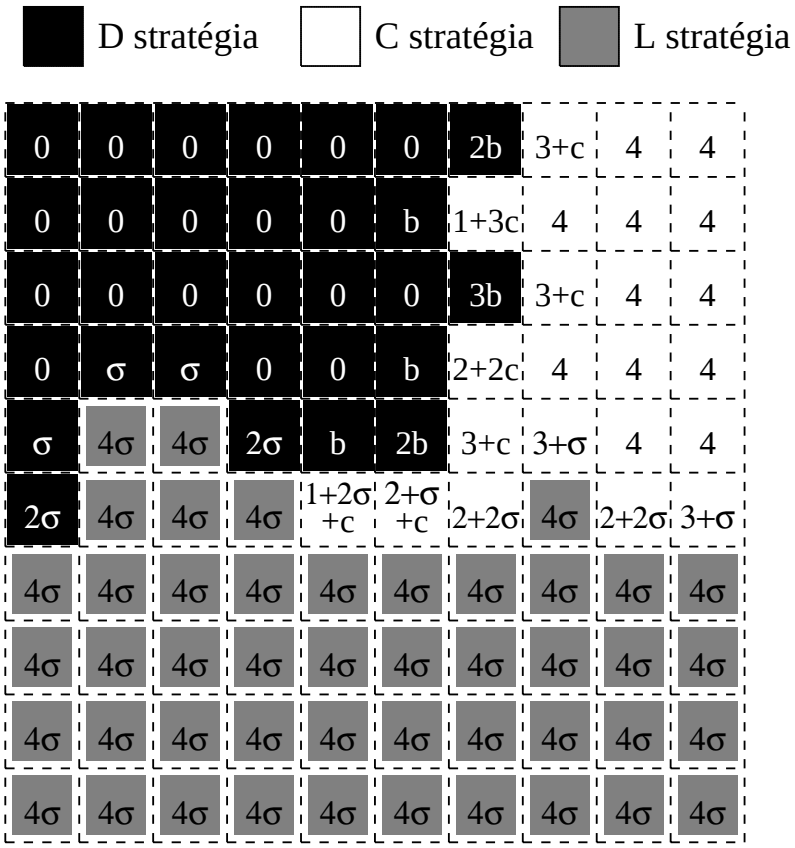


3. ábra. Ideiglenes véletlen szomszédok (bal oldali ábra) és a szerkezetbe beépített véletlen szomszédsági kapcsolatok (jobb oldali ábra). A szaggatott vonalak jelzik a a négyzetrácson elhelyezkedő játékosok standard szomszédait, akiket P valószínűséggel bármely játékban ideiglenesen más játékostársakra cserélhetnek (folytonos vonal): X és szomszédai közül véletlenszerűen választott játékostársa, Y ebben az iterációs lépésben a folytonos vonallal jelzett kapcsolatok alapján „választják" társaikat. Az ábrából kifele mutató kapcsolatok jelzik a periodikus határfeltételt. A jobb oldali ábrán reguláris kisvilág hálózatot láthatunk. A hálózatot egy négyzetrácsból készítjük (a játékosok a négyzetrács pontjai, a szomszédsági kapcsolatok a pontok közötti vonalak): Első lépésként megszüntetjük a kapcsolatot két véletlenszerűen választott szomszédos pont között (A és B), majd véletlenszerűen új szomszédot választunk B-nek: C. Ezután véletlenszerűen megszüntetjük C eddigi kapcsolatai közül az egyiket, majd az így három szomszéddal maradt D számára új kötést létesítünk: E. A kapcsolatok átkötögetését addig folytatjuk, míg az eredeti elsőszomszéd kapcsolatok Q hányadát véletlen kapcsolatok nem helyettesítik. (Ehhez természetesen több lépésre van szükségünk, mint ahány véletlen kapcsolat végül lesz a hálózatban, hiszen a kapcsolatok véletlen megszüntetésénél már korábban megváltoztatott kötéseket is kiválaszthatunk.) Ekkor az utolsó, három szomszéddal maradt játékost (az ábrán H-val jelölve) összekötjük a kezdő játékossal, A-val.

pozitív hatásából.

A stratégiaátvétel következménye, hogy a rendszer homogén abszorbeáló állapotba kerülhet. Ha az összes játékos ugyanazt a stratégiát követi, akkor az evolúciós dinamikának megfelelően ez az állapot marad fenn örökké. A homogén abszorbeáló állapotok közül a C állapotban a legnagyobb a játékosok (és a közösség) összbevétele ($m = 4$ bármely játékos esetében), de ez az állapot instabil az árulók beszivárgásával szemben. Egyetlen áruló megjelenése is majdnem biztosan az abszorbeáló D állapot felé hajtja a rendszert, míg el nem érik a legalacsonyabb átlagos nyereményt: $m = 0$. A homogén D állapot azonban instabil a „magányos" stratégiát követő egyedek beszivárgására, így, ha betörnek, hamarosan elfoglalják az árulók teljes területét. Ezt az állapotot viszont az együttműködők tudják elfoglalni, ha ki tudják használni az együttműködés nyújtotta előnyöket, és vissza is értünk a kör elejére. E folyamat eredményeképpen a paraméterek széles tartományában egy „kő-papír-olló"-szerű dinamika vezérli a rendszert [19, 20, 21]. (A fenti ciklus természetesen nem pontosan úgy játszódik le, ahogy fent leírtuk: a domináns stratégia nem jut el az abszorbeáló állapotig (ha eljutna, akkor a rendszer itt is maradna), csak a másik két stratégia koncentrációja csökken le drasztikus mértékben, majd egy bizonyos határ elérése után az egyik „elnyomott" stratégia elkezdi átvenni az „uralmat".)

Érdemes kihangsúlyozni, hogy a fent leírt ciklikus dominancia nincs beépítve a nyereménymátrixba, hiszen a „magányosok" döntetlent játszanak az együttműködőkkel és az árulókkal is. A ciklikus invázió valójában a homogén domének határai mentén zajlik (4. ábra), a doménképződést pedig a választott stratégiaátvételi mechanizmus támogatja.

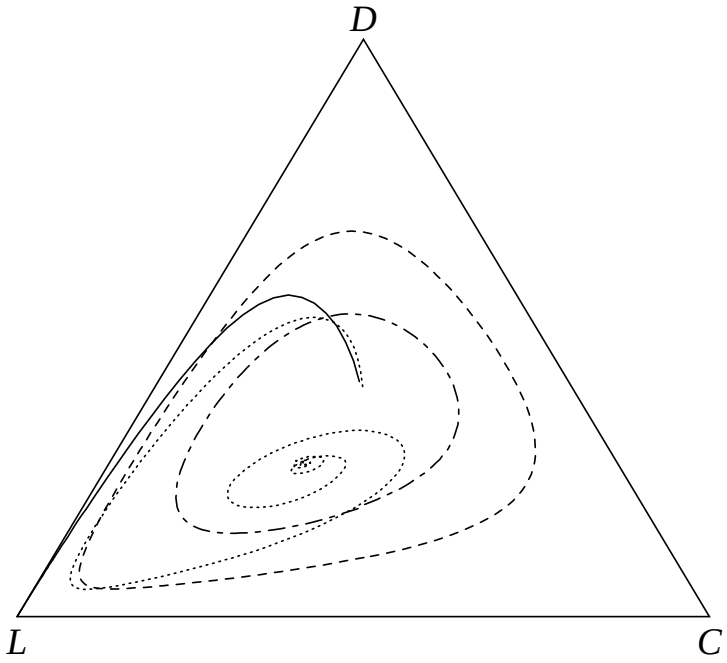


4. ábra. A ciklikus invázió szemléltetése négyzetrácson (elsőszomszéd kölcsönhatás). A különböző színű négyzetek (a színek jelölése az ábra tetején) jelölik a játékosokat, a négyzetekbe írt számok pedig a játékosok összenyereményét mutatják. A D-L doménhatáron a „magányosok”, a C-L határon az együttműködők nyereménye jóval nagyobb, mint a szomszédos stratégiáé. Ennek következtében az L (C) stratégia elfoglalja a D (L) stratégia területét. A C-D doménhatáron az árulók a szabálytalan (nem egyenes) határvonalak mentén tudnak nagyobb nyereményük következtében előrenyomulni (ne felejtsük el, hogy $c < 0$). Ezen folyamatok eredménye a ciklikus invázió: az L-domén elfoglalja a D-domént, a D-domén ezenközben a C-domén területét „támadja”, akik viszont ezalatt az L-domén területére nyomulnak be. Az ábrán látható az is, hogy az árulók nyereménye egy lépéssel az inváziós front mögött azonnal nullára csökken.

4.3. A stratégiapopulációk időfejlődése

A Monte Carlo (MC) szimulációkat a b, Q, és P paramétereket változtatva végeztük, miközben a c, σ, és K paraméterek értéke végig rögzítve volt. A szimulációknál követett eljárás megegyezik a 3.2. fejezetben ismertetettel.

Minthogy a stratégiakoncentrációk összege mindig 1 ($\rho_C(t) + \rho_D(t) + \rho_L(t) = 1$), a rendszer időfejlődését szemléltethetjük háromszögdiagram[7] se-



5. ábra. Véletlen kezdőfeltétellel indított rendszer trajektóriái a háromszögdiagramon, ha a b paraméter értéke 1,5. A folytonos vonal jelöli azt a rendszert, ahol szomszédok teljesen véletlenszerűen kerülnek kiválasztásra ($P = 1$, azaz átlagtér határeset). A pontokkal jelölt vonal mutatja a négyzetrácson ($P = Q = 0$) való időfejlődést, míg gyenge időbeli ($P = 0,03$) vagy térbeli ($Q = 0,03$) rendezetlenség hatására a rendszer a szaggatott illetve a pont-vonallal jelzett határciklushoz tart.

[7] A háromszögdiagram belsejében a pontok különböző stratégiaösszetételű rendszerek-

gítségével. Az 5. ábrán néhány példát láthatunk arra, hogy ugyanolyan b paraméter mellett, csak a partnerségi viszonyokat változtatva mennyire különböző végállapotba juthatunk. Az ábrán látható trajektóriáknál a zaj mértéke körülbelül megegyezik a vonalvastagsággal ($N = 10^6$ rendszerméret).

A várakozásokkal összhangban a $P = 1$ esetben a MC szimulációk is ugyanarra az eredményre vezettek, mint a klasszikus átlagtér-közelítés: a rendszer a kezdőállapottól függetlenül rövid időn belül a homogén „magányos" állapotba kerül [19, 21]. Az eredmény azt jelenti, hogy az ilyen közösség nem tudja kihasználni a kölcsönös együttműködésben rejlő lehetőségeket.

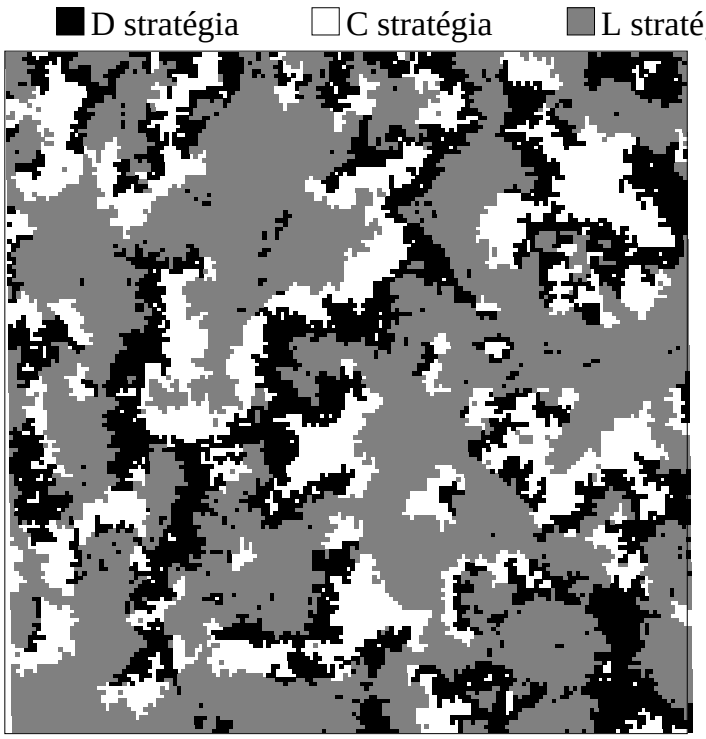
A négyzetrácson ($P = Q = 0$) a stratégiakoncentrációk egy spirál mentén egy fixponthoz tartanak. $N \to \infty$ határesetben a koncentrációk relatív fluktuációja eltűnik a fixpontban. A fixpontban a három stratégia együttélése önszerveződő mintázatot hoz létre. A stratégiák térbeli eloszlásáról készült tipikus pillanatképet láthatunk a 6. ábrán. A mintázat nagyon gyorsan változik (az inváziós frontok mentén halad), miközben a rendszer statisztikus tulajdonságai nem változnak.

Az önszerveződő mintázatot a ciklikus inváziós folyamat (4. ábra) tartja fenn: a D, a C és az L stratégia követi egymást minden pontban (ha a zaj okozta hatásoktól eltekintünk). A lokális ciklikus stratégiaátvételek nincsenek szinkronizálva, mivel térbeli (és ráadásul zajos) modellünkben csak rövidtávú kölcsönhatások vannak. Hasonló mintázatok alakulnak ki, ha P vagy Q értékét megfelelően kicsire választjuk.

Gyökeresen másfajta viselkedést tapasztalhatunk, ha a hosszútávú kölcsönhatások (véletlen kapcsolatok) mennyiségét egy bizonyos érték fölé növeljük. A rendszer egy növekvő vagy csökkenő spirális pálya mentén egy olyan határciklushoz konvergál, amilyet az 5. ábrán is láthatunk. A határciklus jellegzetes pontjaiban létrejövő térbeli stratégiaeloszlást mutatja a 7. ábra. Az egymás utáni pillanatképeken jól megfigyelhető a globális szinkronizált oszcilláció megjelenése.

---

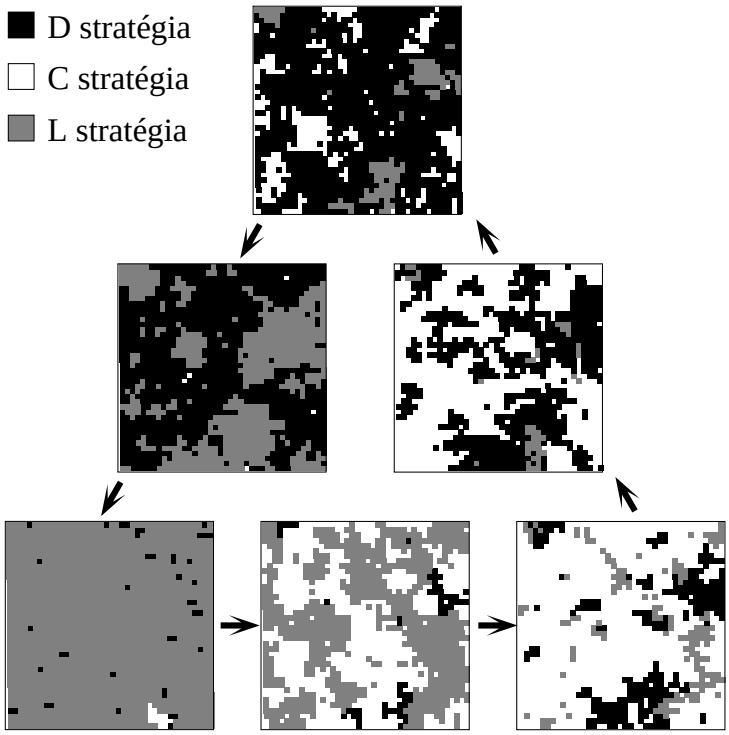
nek felelnek meg. Az egyes koncentrációk értékét a megfelelő oldaltól való távolság jellemzi.



6. ábra. Pillanatfelvétel a három stratégia által létrehozott önszerveződő mintázatról a négyzetrácson $b = 1,5$ paraméterértéknél. A különböző árnyalatok jelentése az ábra tetején látható.

A határciklus mentén a stratégiakoncentrációk periodikusan, tipikusan $\tau \simeq 50$ MCL (Monte Carlo Lépés) periódusidővel követik egymást. A szimulációs vizsgálatok szerint a periódusidő monoton módon nő az amplitúdó növekedtével.

A globális oszcilláció amplitúdója növekszik, miközben P (vagy Q) értékét növeljük, így a paraméterek egy bizonyos értékét elérve – mint később látni fogjuk – a spirálisan „csavarodó” pálya eléri a háromszög oldalát, és az evolúció az egyik homogén abszorbeáló állapotban végződik (Ez látható az 5. ábrán például $P = 1$ értéknél is.).

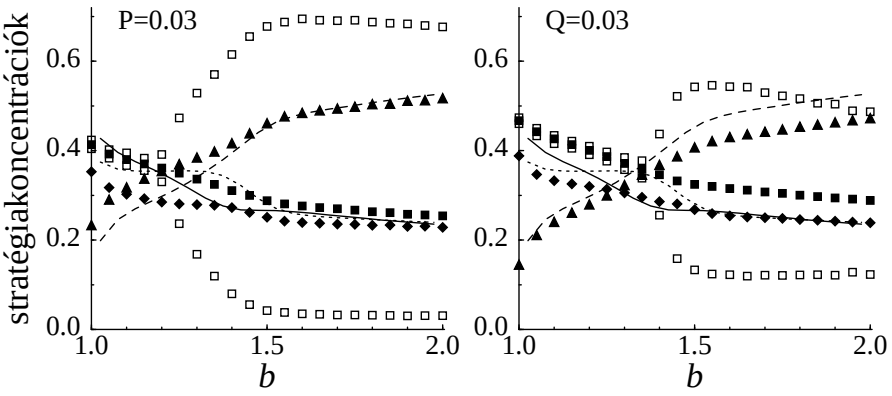


7. ábra. Az 5. ábrán látott határciklus jellegzetes pontjaiban megjelenő tipikus mintázatok. A pillanatképek egy nagyobb (alapvetően hasonlóan kinéző) rendszer kisebb részéről (40×40-es „kivágás") készültek.

4.4. Átlagos stratégiakoncentrációk és nyeremények

Az állapotok számszerű vizsgálatára a koncentrációk átlagértékét $\overline{\rho}_s$ ($s = D$, C és L) és az átlagos nyereményeket $\overline{m}_s$ fogjuk használni. Az átlagértékeket a szimulációk során rögzített adatokból megfelelően hosszú időre vett átlagolással nyerjük. Annak jellemzésére, hogy mennyire jár jól a közösség, az egy főre jutó átlagos összнyereményt is figyeljük: $\overline{m} = \overline{\rho}_D\overline{m}_D + \overline{\rho}_C\overline{m}_C + \overline{\rho}_L\overline{m}_L$. A globális oszcilláció állapotában lévő rendszernél az átlagolást több száz ciklusra végeztük, miközben a stratégiakoncentrációk minimális és maximális értékét is feljegyeztük a globális oszcilláció amplitúdójának jellemzésére.

Először az „árulásra való kísértés” (b) mértékét változtatjuk, és ennek a stratégiakoncentrációkra kifejtett hatását vizsgáljuk három különféle partnerségi viszonyban. Mint már fentebb említettük, a szabályos négyzetrácson ($P = Q = 0$) a háromfajta stratégia stacionáriusan él együtt (a mintázat gyorsan változik, de az átlagértékek a kisebb fluktuációktól eltekintve nem változnak), nincs globális oszcilláció. A 8. ábrán vonalakkal jelölve láthatjuk a Monte Carlo szimulációkból nyert adatokat. A teljesen rendezett szerkezeten kapott adatokat összehasonlíthatjuk a gyenge térbeli ($Q = 0.03$, $P = 0$) és időbeli ($P = 0.03$, $Q = 0$) rendezetlenséggel ellátott szerkezeteken kapottakkal.



8. ábra. A stratégiakoncentrációk az „árulásra való kísértés” (b) függvényében (MC szimulációs adatok). A folyamatos vonal az árulók, a szaggatott a „magányosok”, míg a pontokkal jelölt vonal az együttműködők koncentrációját mutatja a négyzetrácson. A teli négyzetek jelzik az árulók átlagos koncentrációját a partnerségi kapcsolatokban időbeli (bal oldal) és térbeli (jobb oldal) rendezetlenséggel ellátott szerkezeteknél, míg az üres négyzetek mutatják maximális és minimális értéküket (kezdetben a fluktuációk, majd a globális oszcilláció hatása). Élére állított teli négyzet jelzi az együttműködők, teli háromszög a „magányosok” átlagos koncentrációját a rendezetlen rendszerekben.

Az ábrát szemlélve észrevehetjük, hogy az árulók átlagos koncentrációja csökken a b paraméter növelésével, noha ez a külső beavatkozás elvileg őket támogatja. A hagyományos „kő-papír-olló"-játékokban egy stratégia (vagy faj) külső támogatása hasonló komplex hatást vált ki, mint amivel most találkoztunk [28]. A ciklikus invázió folyamán ugyanis a támogatott faj megfelelő mennyiségű táplálékot biztosít a „ragadozójának", míg „prédájának" koncentrációját lecsökkentve mérsékli a „ragadozóját" érő támadást. Ezeknek a hatásoknak az összegeként a külső támogatással valójában a támogatott faj „ragadozója" jár jól. Modellünkben az árulók ragadozója a „magányos" stratégia, s mint megfigyelhető, az ő átlagos koncentrációjuk monoton nő b függvényében. A monoton növekedés az oszcilláló állapotban is folytatódik.

A 8. ábrán látható, hogy $b > b_1$ értékekre a $\rho_D(t)$ maximuma és minimuma ugrásszerűen távolodni kezd egymástól, megkezdődik a globális oszcilláció. A küszöbértékek $b_1(P = 0.03) = 1.20(3)$ és $b_1(Q = 0.03) = 1.38(3)$. A várakozásokkal összhangban hasonló viselkedést figyelhetünk meg, ha $\rho_C(t)$ vagy $\rho_L(t)$ maximumát és minimumát kísérjük figyelemmel, de a szemléltetéstől most eltekintünk, hogy a jelölésbeli zavarokat elkerüljük. A globális oszcilláció vizsgálatakor természetesen szembekerültünk a méreteffektusok okozta hatásokkal, de megfelelően nagy rendszerméretet választva a maximális és minimális koncentrációk függetlenné váltak a rendszermérettől. Ezzel szemben a stacionárius esetben a méret növelésével a koncentrációk maximális és minimális értéke a megfelelő átlagértékhez tartott.

Első pillantásra a szomszédsági kapcsolatokban fellépő gyenge időbeli és térbeli véletlenség hatása hasonlónak tűnik. A két eset összehasonlításánál látszik, hogy $b_1(P) < b_1(Q)$, és az oszcilláció amplitúdója nagyobb az időbeli rendezetlenség bevezetésével, ha $P = Q > 0$. A stratégiapopulációk tehát érzékenyebbek az időbeli véletlen partnerségre.

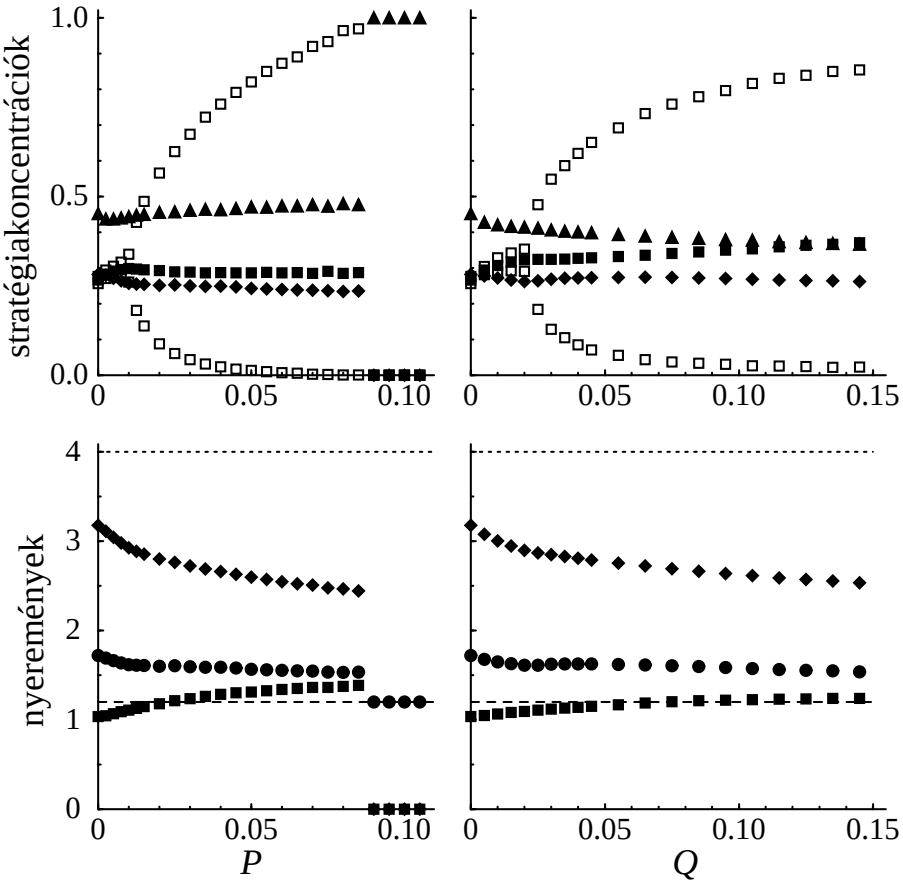
A kétfajta rendezetlenség jobb összehasonlításának érdekében megvizsgáljuk a stratégiakoncentrációk és a nyeremények P- és Q-függését ugyanolyan modellparaméterek mellett ($b = 1.5$, $c = -0.1$, $\sigma = 0.3$ és $K = 0.1$). Az idő-

beli rendezetlenség bevezetésével a 9. ábrán láthatóan a $P < P_1 = 0.011(1)$ tartományban nincs globális oszcilláció, a $P_1 < P < P_2 = 0.086(3)$ értékekre viszont már van, míg a $P > P_2$ tartományban az árulók koncentrációjának minimuma vagy maximuma eléri a 0-t vagy az 1-et, tehát a háromszögdiagramon ábrázolt pálya eléri a háromszög oldalát (5. ábra), és az evolúció az egyik homogén abszorbeáló állapotban végződik. Hogy melyikben, az a modellparaméterektől (beleértve a rendszerméretet is) és a kezdőállapottól függ. A szimulációk azt mutatták, hogy soha nem az árulók halnak ki először. Az övéké lesz a rendszer a végállapotban abban az esetben, ha először az ő „ragadozóik", a „magányosok" halnak ki. Ekkor a rendszer a háromszögdiagram CD élén végighaladva a D állapotba kerül. Eredményeink azt mutatták, hogy a „magányosok" túlélési valószínűsége nő, ha P-t növeljük, és megfelelően nagy P értéknél már biztos, hogy a rendszer végül az abszorbeáló „magányos" állapotba kerül (mint például az átlagtér határesetben az 5. ábrán). A P_1 és P_2 küszöbértékek természetesen függenek a modellparaméterektől.

Ha a térbeli rendezetlenség mértékét (Q) kezdjük növelni, a globális oszcilláció a $Q > Q_1 \simeq 0.020(2)$ értékeknél jelenik meg, és a véletlen reguláris gráfon ($Q \to 1$ határeset) is stabil marad. A b paraméter nagyobb értékeire természetesen létezhet olyan – az időbeli rendezetlenség P_2 küszöbértékéhez hasonló – $Q_2(b, c, \sigma, K)$ érték, aminél nagyobb Q értékekre az evolúció a rendszert az egyik homogén abszorbeáló állapotba viszi.

Ennek az átmenetnek a leírását a határciklushoz való nagyon lassú relaxálás és a méreteffektusok okozta problémák miatt most mellőzzük. A jelenség leírását nehezítő körülmény az is, hogy nincs jól definiált rendparaméter a határciklus jellemzésére. További hosszú időt felhasználó szimulációkra lenne szükség a fázisdiagramok felvételéhez, hogy megtudjuk, hogy a küszöbértékek hogyan függenek a modellparaméterektől.

Mint a 9. ábrán látható, mindig az együttműködők nyereménye a legnagyobb annak ellenére, hogy az árulók megpróbálják kizsákmányolni őket.



9. ábra. A véletlen szomszédság bevezetésének hatása a stratégiakoncentrációkra (két fenti ábra) és az átlagos nyereményekre (alsó ábrák). A MC szimulációkban $b = 1.5$ modellparaméternél vizsgáltuk a stratégiakoncentrációk és az átlagos nyeremények P (bal oldali ábrák) és Q (jobb oldali ábrák) függését. A teli kör az egy játékosra jutó átlagos össznyereményt, a pontozott vonal a kölcsönös együttműködéssel elérhető maximális nyereményt, míg a szaggatott vonal a „magányosok" fix jövedelmét jelöli. A többi jelölés megegyezik a 8. ábrán alkalmazottakkal.

Az árulók nagy bevételre tesznek szert az együttműködőktől az inváziós front mentén, de egy lépéssel a front mögött nyereményük nullára csökken (4. ábra), így átlagos összнyereményük messze az együttműködőké alatt marad. Jelen esetben az árulók átlagos összнyereménye a „magányosok" fix bevétele ($\overline{m}_L = 4\sigma$) körül mozog. Az átlagos összнyereményekre a P és Q értékek változtatása (ugyanúgy, mint b-é is) csak gyenge hatással van. Ez valószínűleg a ciklikus invázió kompenzációs mechanizmusának hatása. P vagy Q növekedtével az együttműködők veszítenek bevételükből ($\overline{m}_C$ monoton csökken), míg az árulók nyereménye mindkét esetben nő. Ez a növekedés azonban nem fedezi az együttműködők veszteségét, így az egy főre jutó összbevétel csökken a véletlen kapcsolatok bevezetésével.

A globális oszcilláció közben az adott stratégiát játszó játékosok nyereménye is oszcillál a koncentrációkkal, de az oszcilláció növekvő amplitúdójának hatása csak akkor mutatkozik meg igazán, ha a rendszer ennek következtében az egyik homogén abszorbeáló állapotba kerül. A 9. ábra bal oldali képein például a „magányosok" uralják a rendszert a $P > P_2 = 0.086(3)$ értékekre, ezért az egy főre jutó összbevétel lezuhan a „magányosok" fix jövedelmének szintjére.

A térbeli rendezetlenség bevezetése a négyzetrácshoz képest „megnöveli" az azonos stratégiájú játékosokból álló domének felszínét (és szabálytalanná is teszi azt). A geometriai tulajdonságok effajta megváltozása befolyással van az inváziós valószínűségekre is. Az „egyenetlen" felszín például az árulóknak kedvez az együttműködőkkel szemben, ahogy azt már a Nowak és May féle sejtautomata modellnél említettük. Látszólag ez a hatás hasonló a b paraméter növeléséhez, azonban a topológia megváltoztatása hatással van a C és L vagy a D és L domének határán végbemenő inváziós folyamatokra is. Az összes hatás eredményeként az árulók átlagkoncentrációja és átlagbevétele monoton növekszik Q függvényében (9. ábra).

Az időbeli rendezetlenséget nélkülöző szerkezeteken ($P = 0$) stratégiaátvétel csak a doménhatárokon fordulhat elő. Az olyan szerkezeteken azonban,

ahol $P > 0$, egy ideiglenes kapcsolaton keresztül egy homogén domén közepén is feltűnhet másfajta stratégia. Ezt a lehetőséget az árulók („magányosok") használhatják ki az együttműködők (árulók) területének gyorsabb meghódítására, míg egy C stratégiát követő játékos egyedül nem tudja megbontani a „magányosok" csoportosulását. Az ideiglenes kapcsolat további hatása, hogy a „szülőáruló" és a „utódáruló" között nem lép fel a büntetőeffektus (két áruló egymástól nem kapna nyereményt). Alacsony P értékeknél a D-doménen belüli árulók is extra bevételhez juthatnak a következő jelenség révén: egy ilyen áruló egy ideiglenes kapcsolaton keresztül nagy valószínűséggel veszi át egy C-doménbeli játékos stratégiáját, és az így keletkező együttműködő „halála" bekövetkeztéig fogja támogatni az őt körülvevő árulókat. A fenti jelenségek következtében az árulók átlagos összbevétele P függvényében gyorsabban nő, mint Q-ében. A többszemélyes fogolydilemma játékokban $\overline{m}_D$ növekedését mindig $\overline{m}_C$ sokkal nagyobb mértékű csökkenése kíséri. Ennek következtében $\overline{m}$ is jelentősen csökken (lásd a 9. ábra alsó részén).

5. Fogolydilemma játék rögzített skálafüggetlen, hierarchikus szerkezeten

Ebben a fejezetben az együttműködő és az áruló stratégia terjedését tanulmányozzuk abban az esetben, amikor a játékosok skálafüggetlen topológiájú gráfon helyezkednek el. Megmutatjuk, hogy az alkalmazott dinamika és a hálózat topológiájának következtében nagyon nagy a szimulációk kezdeti feltétel függése. A nagy klaszterezettségi együttható miatt az erősen összekapcsolt kisebb alhálózatokban még a kísértés mértékének maximális értékre való növelésekor is hosszú időn keresztül megfigyelhető az együttműködő magatartás.

5.1. Bevezetés

Mint tudjuk, a valóságban előforduló hálózatok jelentős része – például a világháló, az elektromos vezetékek gerinchálózata, a sejtekben a különféle vegyületek között végbemenő reakciók hálózata, stb. – skálafüggetlen szerkezetű: az adott fokszámú (adott számú kapcsolattal rendelkező) pontok száma hatványfüggvény eloszlást követ. Matematikailag: annak a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott pontnak k kapcsolata van: $P(k) \sim k^{-\gamma}$, ahol γ a fokszámeloszlás kitevője. Az utóbbi években több jelentős eredmény született az ilyen hálózatokon végbemenő folyamatok vizsgálatában [29]. A másik jelentős tulajdonság, amivel ezek a hálózatok rendelkeznek, a véletlen hálózatoknál jelentősen nagyobb klaszterezettségi együttható. A klaszterezettségi együttható – mint nevéből is következtethetünk rá – a szerkezet összekapcsoltságára ad valamilyen jellemzést: a k_i kapcsolattal rendelkező i-edik csomópont klaszterezettségi együtthatója $C_i = 2n_i/k_i(k_i - 1)$, ahol n_i az i-edik csomópont szomszédai között fennálló kapcsolatok száma. Ez a mennyiség megmutatja, hogy az i-edik csomópont és szomszédai mennyire vannak összekapcsolva, mennyire alkotnak közösséget. Ha $C_i = 1$, akkor az i-edik csomópont és szomszédai egy teljesen összekapcsolt algráfot (klikk)

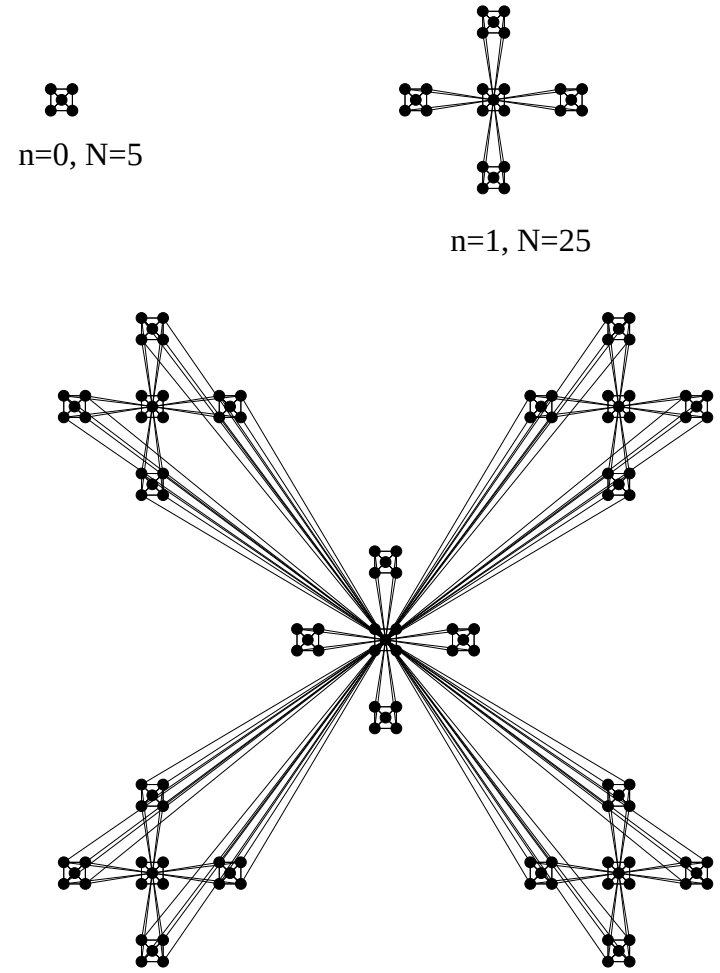
alkotnak, bármely két pont között létezik közvetlen kapcsolat. Ellenben, ha $C_i = 0$, akkor a szomszédok között csak az i-edik ponton át vezet „út”.

Jelen fejezetben a két fent leírt tulajdonsággal rendelkező hálózaton vizsgáljuk az együttműködés terjedését (vagy éppen megszűnését). Mind a két tulajdonságnak jelentős hatása van a kapott eredményekre. A skálafüggetlen szerkezet velejárója a néhány nagy fokszámú pont. Ezek a csomópontok gyorsan közvetítik a változásokat a gráf egymástól messze elhelyezkedő pontjai között, és ezáltal támogatják az átlagtér viselkedéshez hasonló jelenségeket. A nagy klaszterezettségű pontok erősen összekapcsolt közösségeket alkotnak, és ha egy ilyen csoportban egyszer kialakul az együttműködés, akkor azt az áruló stratégia csak nagyon nehezen – a zajnak köszönhetően – tudja megszüntetni. A sok kapcsolat következtében az együttműködő egyedek hatékonyan támogatják egymást, sokáig védelmet biztosítva a külső támadások ellen. Az együttműködés széles körű elterjedéséhez azonban nem elegendő ez a hatás az általunk alkalmazott dinamikával: az ilyen közösségeken kívül nem érvényesül annyira hatékonyan a kölcsönös együttműködésből származó előny, a lokális kölcsönhatások gyengülésével az áruló stratégia kerül előnybe.

5.2. A modell

Skálafüggetlen hierarchikus szerkezetünket a következő algoritmus szerint generáljuk [30]: veszünk egy öt pontból álló teljes gráfot (10. ábra első lépése). Ez a „nulladik” iterációs lépés. Ezután egy iterációs lépés abból áll, hogy az n-edik lépésbeli szerkezet négy másolatának „külső” pontjait hozzákötjük az eredeti hálózat központi csomópontjához. Ez az $(n+1)$-edik iterációs lépés. Az algoritmus segítségével kapott első három gráfot láthatjuk a 10. ábrán. A kapott szerkezet fokszámeloszlás kitevője (ha a végtelenségig folytatjuk az eljárást) $\gamma = 1 + \ln 5/\ln 4$, a klaszterezettségi együttható pedig egy bizonyos méret után a mérettől függetlenül $C \simeq 0.743$.

Ebben a fejezetben, mint már a fejezet elején említettük, a stratégiakészletet az együttműködő és az áruló stratégiára szűkítjük. A stratégiavektorok



10. ábra. A hierarchikus szerkezet felépítésének folyamata. A képen a hálózat generálásának első három iterációs lépését láthatjuk. Az ábrák alatt n jelöli az iterációs lépés számát, N a hálózatot alkotó pontok mennyiségét. Első lépésként ($n = 0$) veszünk egy öt pontból álló teljes gráfot (az ábrán nem látszik, de az átlósan szemben levő pontok is össze vannak kötve). A következő lépésben ($n = 1$) négy, az eredetivel megegyező másolatot készítünk és a másolatok „külső" pontjait hozzákötjük az eredeti gráf középső pontjához. Az eredmény egy 25 pontból álló hálózat. Ezt követően ($n = 2$) a 25-pontos gráf négy másolatának 16-16 külső pontját kötjük az eredeti központi csomóponthoz egy 125 pontból álló szerkezetet kapva. Az algoritmus tetszés szerinti lépésig folytatható.

és a nyereménymátrix tehát a szokásos alakot öltik:

$$s_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s_D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & 1 \end{pmatrix}$$

A stratégiaátvétel valószínűségét definíciójában visszatértünk a 3.1. fejezetben leírthoz, mivel most a szomszédok száma játékosonként különbözhetett[8]:

$$W(s_X \leftarrow s_Y) = \frac{1}{1 + \exp\left[\left(\frac{M_X}{|\Omega_X|} - \frac{M_Y}{|\Omega_Y|}\right)/K\right]},$$

A formulában a jelölések ugyanazok, mint amiket eddig használtunk.

Minthogy a vizsgált hálózaton az egyes pontok szomszédsági kapcsolatai nagy mértékben különböznek egymástól (még azonos hierarchiaszinten belüli pontok környezete is különbözhet), ezért nem lehetett alkalmazni a dinamikus párközelítés módszerét. Így csak Monte Carlo szimulációk segítségével vizsgáltuk a rendszer viselkedését.

5.3. Monte Carlo szimulációk eredményei

A Monte Carlo (MC) szimulációkat a b paramétert változtatva végeztük háromféle zajérték mellett ($K = 0.01, 0.02, 0.05$). A c paramétert Nowak és May munkája [14] alapján 0-ra rögzítettük, így a nyereménymátrix a fogolydilemma játék egy határesetének felel meg, azonban az eredmények alapvetően nem változnak, ha egy kis negatív értéket választunk helyette. A rendszerméretet nem tudtuk túl nagyra választani, mert a bonyolult szomszédsági kapcsolatok nagyon megnövelték volna a szimulációs időket, ezért $N = 5^{H-1} = 5^6 = 15625$ játékost „tettünk” a rendszerbe. Mint látható

[8]Mint az a későbbi kutatások során [18] kiderült, a szomszédok számával való normálás alapvetően befolyásolta a skálafüggetlen gráfokon kapott eredményeket. Ezekről az eredményekről rövid összegzés található a fejezet végén.

a rendszerméret H-val, a hierarchiaszintek számával is jellemezhető. A hierarchiaszinteket a következőképpen vezetjük be: minél nagyobb szerkezet középpontjában van valaki, annál magasabb fokon áll a hierarchiában. A 10. ábrán látható második kép (az első igazából nem hierarchikus, hiszen teljes gráf, így mindenki „egyenlő" benne) tehát három hierarchiaszintet tartalmaz: az első (azaz legmagasabb) szinten egyedül a központi játékos van, hiszen egyedül ő van egy 25 pontból álló gráf középpontjában. A második szinten a 4 „másolat" középpontjai vannak, mint az ötpontos klaszterek „vezetői", míg a harmadik – jelen esetben utolsó – szinten azok foglalnak helyet, akik nincsenek bent a középpontokban (20 ilyen pont van). A szerkezet felépítésénél egy iterációs lépésben eggyel nő a hierarchiaszintek száma, így a 10. ábrán látható utolsó gráf négyszintes: a szinteken rendre 1 (a 125 pontos gráf középpontja), 4 (a 25 pontos gráfok középpontjai), 20 (az 5 pontos gráfok középpontjai), 100 (a „többiek") ponttal.

Általánosságban az első szinten egy játékos van, a h-adikon ($h > 1$) pedig $5^{h-1} - 5^{h-2}$. A h-adik ($h < H$) hierarchiaszinten levő játékosnak $(4^{H+1-h} - 1)/3 - 1$, míg az legalsó, H-adik szinten levőnek 4-től $(3 + H - 1)$-ig terjedő számú szomszédja lehet. A szomszédok számából látszik, hogy a hierarchiában magasan elhelyezkedő pontok közvetítik a hatásokat, erősítik a kisvilág jelleget.

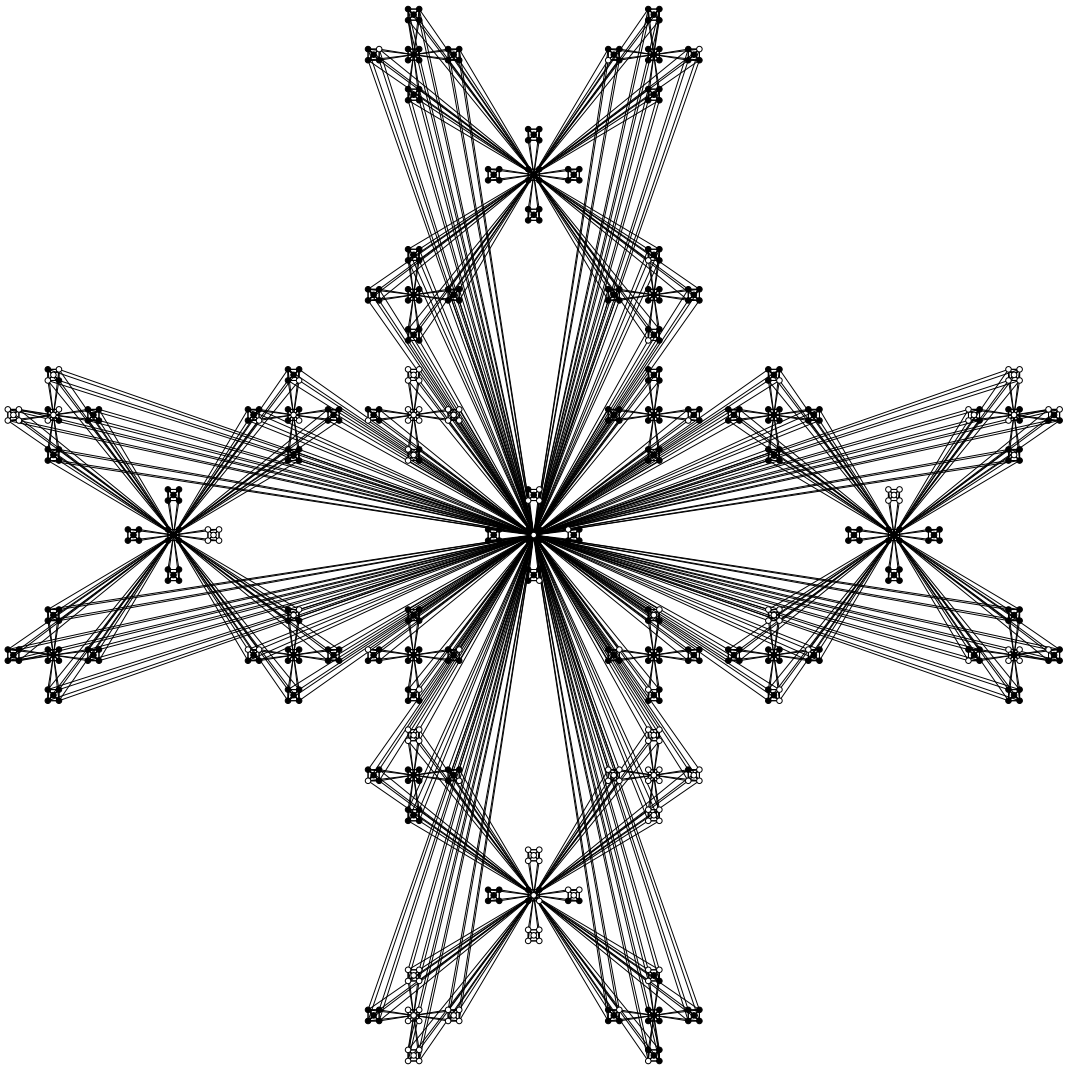
Mint a játékosok számából is látszik, a rendszerben, amelyen a szimulációkat végeztük, hét hierarchiaszint volt. A szimulációkat véletlen kezdőfeltétellel indítva végeztük, a kezdeti állapotban a játékosok fele az együttműködő, fele az áruló stratégiát követte. A stratégiaeloszlások időfejlődését és a játékosok átlagnyereményét is szintenként figyeltük. Ebből természetesen a teljes rendszerre vonatkoztatott adatokat könnyen megkaphattuk.

A rendszer időfejlődésében két különböző szakasz figyelhető meg. Az első egy általános termalizációs folyamat, amelynek eredményeképpen az együttműködők, akik a kezdeti véletlen eloszlás következtében túl kevés együttműködővel kerültek szomszédságba, átveszik az áruló stratégiát. Ezután a C

stratégiának csak azok a csoportjai maradnak, amelyek a kölcsönös együttműködés következtében meg tudják védeni magukat az árulók támadásától. Ez az állapot mintegy 3000-4000 Monte Carlo lépés után következik be. Ilyen állapotot láthatunk a 11. ábrán. Az, hogy ilyenkor a játékosok mekkora hányada követ együttműködő stratégiát, alapvetően nem a b paraméter értékétől függ, hanem a kezdeti véletlen eloszlástól. Mint a 11. ábrán is láthatjuk, az együttműködő csoportok alapegysége a hierarchikus szerkezet induló iterációs lépésében definiált gráf (10. ábra $n = 0$ lépése). Ezek közül most főként azokról beszélünk, amelyekben a központi játékosnak csak 4 szomszédja van, tehát a $(H-1)$-edik hierarchiaszinten helyezkedik el. Ha egy ilyen klikken [26] (klikk az az algráf, mely önmagában szemlélve teljes gráf) belül mindenki együttműködik, akkor a sok belső kapcsolat következtében ezek a játékosok egymást támogatva – a b paraméter értékétől függetlenül – nem engedik betörni az árulókat.[9] Az ilyen egységeket az árulók csak nehezen tudják támadni, hiszen az együttműködők támogatják egymást, és a csoporton belüli szomszédaikon kívül csak kevés kapcsolatuk van a támadó árulókkal, így az egy szomszédra normált nyereményük magas lesz. A támadó árulók a b paraméter értéknek megfelelő mértékben kizsákmányolják ugyan az együttműködőket, de mivel szomszédaik között az árulók vannak túlsúlyban, az egy szomszédra normált nyereményük mégis alacsony lesz. Tehát a topológia következtében az ilyen védett együttműködő csoportokba a D stratégia csak a zajnak köszönhetően tud betörni.

Azonban ha egyszer sikerül bekerülnie az együttműködő klikken belülre, akkor a sok belső kapcsolat már az ő dolgát könnyíti meg, és az összes szomszédját rövid idő alatt árulóvá teszi. Ezért ha kezdetben a véletlen stratégi-

[9]Ez természetesen akkor igaz, ha a rendszerben a C stratégia koncentrációja elég alacsony. Ha nagyon sok ilyen együttműködő egység van, akkor a támadó áruló játékos több helyről is $4b$ nyereményt kaphat, és ez már elegendő lehet ahhoz, hogy normált nyereménye túlszárnyalja az együttműködő csoporton belüli értéket. Ha azonban ez az eset áll fenn, akkor az együttműködés mértéke egy idő után lecsökken annyira, hogy a megmaradt csoportok meg tudják védeni magukat.

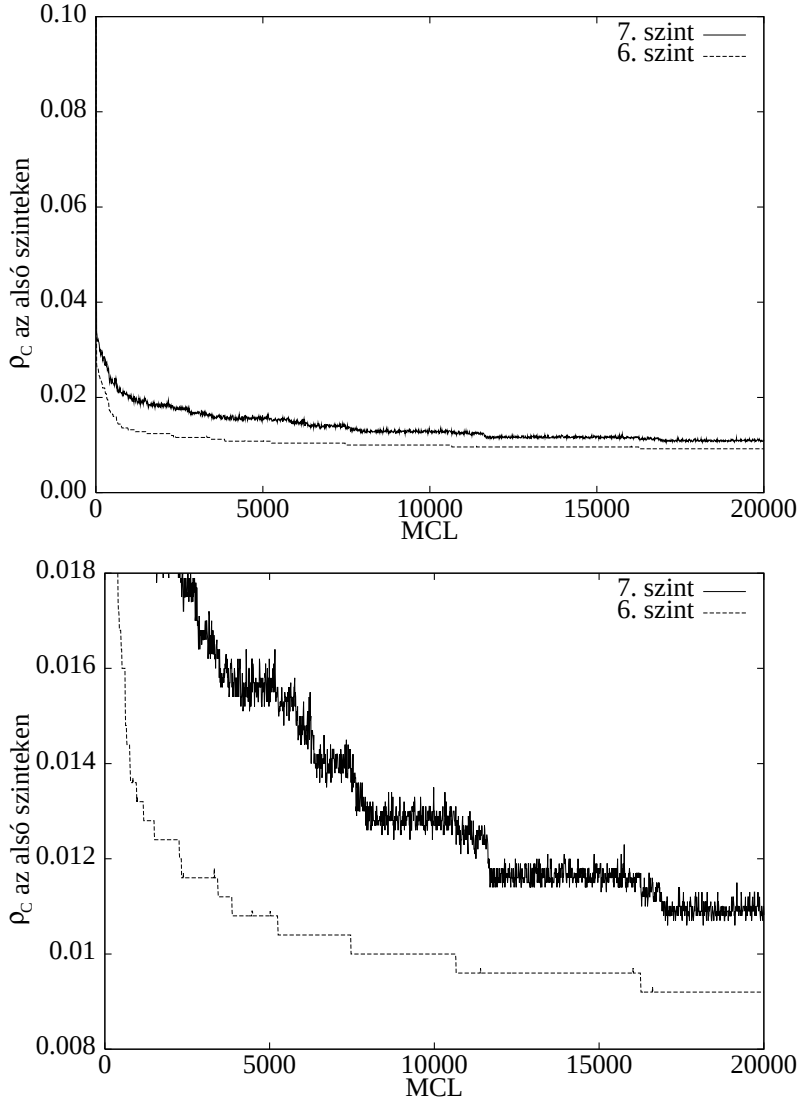


11. ábra. Pillanatkép a termalizációs idő letelte után. Fehér pont jelöli a C, fekete a D stratégiát követő játékosokat. A kis együttműködő csoportok ellenállnak az árulók támadásának. A szemléltetés miatt itt egy 5 hierarchia-szinttel rendelkező szerkezeten ($N = 625$) ábrázoltuk a jelenséget.

akiosztás következtében sok klikk kerül a C stratégia irányítása alá, akkor a termalizációs időszak után nagyobb lesz az együttműködők aránya a rendszerben. Megemlítenénk egy másikfajta lehetséges együttműködő csoportosulást is: ha az ötfős csoport középpontja a $(H-1)$-edik hierarchiaszintnél magasabban van, akkor a csoport másik négy tagja eredményesen támogathatja egymást, hiszen nekik – egymáson kívül – csak a központi játékossal van kapcsolatuk, ezért normált nyereményük 3/4 vagy 1 lesz. A központi játékos ugyan $4b$ nyereményt kap a csoporton belüliektől, de a sok külső kapcsolat eredményeképpen ez meglehetősen alacsony normált nyereményt jelent, ha a C stratégia koncentrációja megfelelően alacsony (és ez a termalizáció után általában igaz).

A rendszer időfejlődésében a termalizáció után először úgy tűnik, hogy a kapott állapot befagy. Mivel a kis együttműködő csoportokon belüli játékosoknak nagyobb az egy szomszédra jutó átlagos nyereménye, mint a külső árulóké, ezért folyamatosan foglalják el az árulók területét. A szerkezet topológiája miatt azonban itt nem tud kialakulni a szoros kölcsönös együttműködés, ezért ezeket a területeket hamarosan újra a D stratégia fogja uralni. Végülis ilyenkor ugyanaz játszódik le, mint a termalizációs idő alatt.

Ha azonban hosszabb ideig figyeljük a rendszert, lassú csökkenést vehetünk észre az együttműködők koncentrációjában. Minthogy a fent leírt együttműködő klikkek a két utolsó hierarchiaszinten vannak, ezért alapvetően ezeket figyeljük. A felsőbb szinteken csak zajszerű időfüggést láthatunk a folyamatos együttműködő területfoglalások és az utána következő áruló dominancia következményeként, ugyanis csak az itt elhelyezkedő játékosok kötik össze a kisebb alhálózatokat. Egyébként a két alsó szinten helyezkedik el a játékosok 96%-a. A 12. ábrán látható, hogy az együttműködők koncentrációja lépcsőszerűen csökken. A $(H-1)$-edik, azaz jelen esetben a hatodik szinten egy lépcső magassága 0.0004, játékosszámban kifejezve éppen 1. A hetedik szinten 0.0011-del csökken a C koncentráció lépcsőnként, ez 13.75 játékosnak felel meg. A jelenség magyarázata, hogy egy-egy lépcsőugráskor az



12. ábra. Az együttműködők koncentrációjának (ρ_C) időfejlődése. A hétszintes rendszer utolsó két hierarchiaszintjének viselkedése (szaggatott vonal: 6. szint, folytonos vonal: 7. szint). Az adott szinten együttműködő stratégiát követő játékosok számát a megfelelő szint összjátékosszámával normáltuk. A fölső ábrán látható, hogy az első 3000-4000 Monte Carlo Lépés (termalizációs idő) után lassan, alig láthatóan csökken az együttműködés mértéke. Az alsó ábrán a termalizációs idő letelte utáni időszakot figyelhetjük meg „közelebbről": jól látható a lépcsőszerű csökkenés. A szimulációt $b = 1.4$ és $K = 0.02$ paraméterek mellett futtattuk. Az időt Monte Carlo lépésekben adtuk meg. Egy-egy pontot 10 MCL átlagaként kaptunk.

árulók a zaj segítségével betörnek az együttműködőknek (fent leírt) egy-egy kis csoportjába, és elfoglalják azt. A csoport központi tagja a hatodik szinten van, ez magyarázza az itt bekövetkezett csökkenést. A klikkben azonban csak négy játékos van a hetedik szinten, mégis majdnem 14-gyel csökken a C stratégiát követők száma. Ez azzal magyarázható, hogy az együttműködő klikk általi folyamatos területfoglalások következtében átlagosan körülbelül 10 játékos követi a C stratégiát a hetedik szinten.

Igaz ugyan, hogy a C stratégia kis csoportjait csak a zaj következtében tudják elfoglalni az árulók, de mivel az együttműködők nem tudnak tartósan terjeszkedni, ezért a csoportok megszűnésének valószínűségére véges érték adódik. Ez az érték kicsi ugyan, de azt jelenti, hogy megfelelően hosszú ideig várva rendszerünk az abszorbeáló D állapotba fut be végül.

Az együttműködő csoportok kihalásának karakterisztikus idejére adhatunk egy becslést. Vegyük az együttműködők szempontjából a legrosszabb esetet, tehát azt amikor a H-adik szinten levő játékosnak a legtöbb, azaz $(2 + H)$ darab szomszédja van, ezért a normált nyereménye a legkisebb lesz (a kisebb szomszédszámú esetekkel összehasonlítva). Ezt a játékost támadja a lehető legkevesebb szomszéddal rendelkező áruló egyed, aki tehát a $(H-2)$-edik szinten van (a $(H-1)$-edik szinten levő szomszéd beletartozik az együttműködő csoportba), így 20 szomszédja van. Ezekből a szomszédokból négyen követik a C stratégiát (a meghódítandó csoport tagjai), a többiek azonban szintén árulók, mivel a C stratégia koncentrációja alacsony. Így a „támadó" áruló játékos egy szomszédra jutó nyereménye $4b/20$ lesz. Az együttműködő játékos nyereményének megbecsléséhez H értékét vegyük 7-nek, mint ahogy a szimulációkban is szerepelt. Minthogy a fenti leírásnál kiderült, hogy egy együttműködő csoport átlagosan 10 játékost tart a C állapotban a csoporton kívül, ezért feltehető, hogy a csoporton kívüli 5 szomszéd közül átlagosan 1 mindig a C stratégiát követi. Ebből következően az együttműködő játékos normált nyereménye $5/9$ lesz. A stratégiaátvétel valószínűsége $T = 0.02$ zajértékre és b maximális értékére ($b = 2$):

$$P = \frac{1}{1+\exp(\frac{5/9-(4\cdot 2)/20}{0.02})} = \frac{1}{1+\exp(7.778)} = \frac{1}{2388}$$

Ez azt jelenti, hogy mintegy 2400 Monte Carlo lépésen belül foglalják el az együttműködők bázisát. Csak szemléltető céllal közlünk néhány más adatra vonatkozó stratégiaátvételi valószínűséget is: ugyanezen feltételek mellett, ha $b = 1.4$, akkor $P = 1/962971$. Ha pedig $b = 1.4$ és azt tesszük fel, hogy a C stratégiát követő játékos bevétele átlagosan 4.5/9, akkor $P = 1/59875$. Az utolsó esethez közeli feltételeket láthatunk a 12. ábrán, hiszen P-t az együttműködő csoportok számával is meg kell szorozni, hogy egy csoport eltűnésének a valószínűségét megkapjuk (minden csoportnak körülbelül ugyanakkora esélye van az árulók támadása ellen). Így egy-egy csoport kihalása kezdetben kb. 3000 lépésenként történik, és ez az idő a csoportok számának csökkenésével fordítottan arányosan nő. A zaj növelése természetesen csökkenti a kihalás karakterisztikus idejét (tehát növeli P-t).

A fenti becslésből az látszik, hogy a rendszerben végbemenő folyamatok a termalizációs időszak után nagyon lassan mennek végbe. A szimulációk végigfuttatásához (addig, amíg a rendszer valóban stacionárius helyzetbe kerül) nagyon nagy gépidő lenne szükséges, ezért a vizsgálatot ezen a ponton befejeztük. A vizsgált körülmények mellett a kölcsönös együttműködés egy (meglehetősen hosszú) idő után eltűnik a rendszerből.

Mivel ez a hálózat az emberi kapcsolatrendszerek jó modellje, ezért természetesen más kutatócsoportok figyelmét is felkeltette. Santos és Pacheco [18] hasonló modellt vizsgált azzal a jelentős dinamikabeli különbséggel, hogy a játékosok nyereményét nem normálták a szomszédok számával. Ez a látszólag kis változtatás drasztikus következményekkel járt az együttműködésre nézve: a C játékosok aránya 80-90%-ra növekedett a rendszerben a teljes b paramétertartományban. A változást a nagy fokszámú együttműködő játékosok idézték elő. Mi történik, ha egy központi (sok szomszéddal rendelkező) játékos a D stratégiát követi? Sok szomszédja miatt – melyek között kezdetben valószínűleg sok együttműködő is akad – magas nyereményre tesz szert

(mivel a nyereményt nem normáljuk), így rövid idő alatt árulóvá teszi környezete nagy részét. Ennek következtében nyereménye drasztikusan lecsökken és könnyen kolonizálhatóvá válik egy szomszédos, kisebb csomópont kooperatív játékosa számára. Ha viszont egy nagyobb központban levő játékos C stratégiát követ, akkor a sok szomszéd – közöttük bizonyos számú együttműködő is – következtében nyereménye magas lesz, így még több szomszédja kezdi követni az együttműködő stratégiát, ezzel megerősítve a központi C játékos pozícióját. Ez a mechanizmus végül oda vezet, hogy a hálózatban található összes nagyobb csomópontot az együttműködők fognak uralni, ezzel meglehetősen kooperatívvá téve a teljes közösséget. Természetesen ebben az esetben a nagyfokú kezdeti feltétel függés is eltűnik a rendszerből.

6. Hierarchikus rácsszerkezetek

6.1. Bevezetés

A skálafüggetlen szerkezetek után olyan hierarchikus hálózatokat kerestünk, amelyeken a kölcsönös együttműködés nagyobb mértékben képes elterjedni[10] [6]. Egyre növekvő (2 hatványai szerint) rácsállandójú négyzetrácsokat „helyeztünk" egymás fölé, így a (hierarchiában) magasabban levő szintekre arányosan kevesebb játékos került. Egy játékosnak négy „alárendeltje" van az alatta, és egy „felettese" a fölötte levő szinten. Egy szinten belül a négyzetrács elsőszomszéd kapcsolatai határozzák meg az evolúciós szomszédokat. A hálózat vizsgálatának megkezdése előtt azonban megnéztük, hogyan viselkedik egymással szemben az együttműködő és az áruló stratégia az egyszerű négyzetrácson és köbös rácson. A négyzetrácsot azért vizsgáltuk, hogy lássuk, hogy mi változik a hierarchia bevezetésével, a köbös rácsot pedig a növekvő szomszédszám hatásainak vizsgálata miatt tanulmányoztuk. Várakozásainknak megfelelően azt kaptuk, hogy a négyzetrácson az együttműködők koncentrációja a b paraméter függvényében az irányított perkolációs univerzalitási osztályba tartozó fázisátalakulással tűnik el.

Miután az alapszerkezetet megvizsgáltuk, elkezdtük növelni a hierarchiaszintek számát (Q). A különböző szinteken lévő C stratégia egyensúlyi koncentrációja erős szintfüggést mutatott. Az abszorbeáló D állapotba való fázisátmenet a hierarchia bevezetése után is megmaradt, ahogy a b paramétert növeltük. A kritikus b érték megnövekedett a négyzetrácshoz képest, és a hierarchiaszintek számának függvényévé vált. A hierarchiaszintek számának növelése közben egy másik érdekes jelenséget is megfigyelhettünk: kezdetben az együttműködők koncentrációja a szinteknek megfelelően változott, tehát a legmagasabb szinten volt a legmagasabb és lefelé monoton csökkent. Amikor azonban az ötszintes rendszert vizsgáltuk bizonyos b érték alatt a második

[10]Ekkor még nem volt ismert, hogy a skálafüggetlen szerkezeteken a normálás elhagyásával az együttműködés domináns stratégiává válhat [18].

szinten volt a legnagyobb az együttműködés mértéke, a hatszintes rendszerben pedig nagyon sokáig a harmadik szint „vezetett". A kritikus ponthoz közeledve azonban a C stratégia koncentrációja – a hierarchiaszintek számától függetlenül – mindig visszarendeződött a hierarchiának megfelelő sorrendbe. A hierarchiaszintek számának optimalizációját tekintve arra a megállapításra juthatunk, hogy a négyszintes hierarchia a legmegfelelőbb, hiszen itt a legnagyobb az egy főre jutó átlagos nyeremény, tehát itt a legnagyobb a társadalmi összbevétel.

6.2. A modell

Ebben a fejezetben a játékosok az összes szerkezet vizsgálatánál csak az együttműködő és az áruló stratégia közül választhattak. Ennek következtében a modell leírása – a hálózatok leírásán kívül – teljes egészében megegyezik az előző fejezetben ismertetettel.

A szomszédok számával való normálást most az azonos szomszédszámú esetekben is alkalmaztuk (négyzetrács, köbös rács), hogy az összes struktúrát azonos zajértékek mellett tanulmányozhassuk. Az azonos szomszédszámú esetekben ez csak egy skálafaktort jelent a zajparaméterben.

A vizsgált szerkezeteknél a $c = 0$ és a $K = 0.02$ paramétereket fixen tartottuk, és a b paraméter és a szerkezet változtatásának hatásait vizsgáltuk. Minthogy most többfajta hálózatot fogunk egymás után vizsgálni, ezért a szerkezetek leírását mindig a hozzájuk tartozó eredmények előtt közöljük.

6.3. Rácsszerkezetek hierarchia nélkül

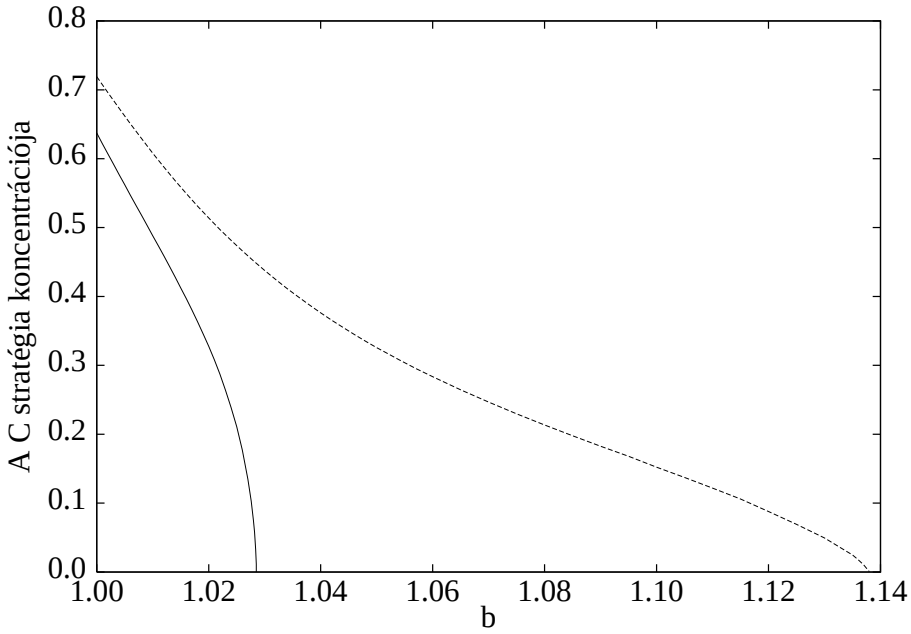
A négyzetrács és a köbös rács tárgyalása előtt a teljesség kedvéért érdemes megvizsgálni az egydimenziós „rács" (lánc) esetét is. A játékosok egy lánc mentén helyezkednek el, és az elsőszomszéd kapcsolatok definiálják az „evolúciós" szomszédokat, tehát minden játékosnak két szomszédja van. Azonnal látszik, hogy ebben az esetben a rendszer rövid időn belül teljesen az áru-

lók hatalmába kerül. Nézzük meg ugyanis, hogy mi történik egy árulókból és egy együttműködőkből álló klaszter határán (egy klaszter állhat akár egyetlen pontból is). Vegyük az árulók szempontjából legrosszabb esetet: a határon levő együttműködő játékos másik szomszédja C stratégiát követ, míg az áruló szomszédja szintén áruló (ebben az esetben a lehető legnagyobb az együttműködő és a lehető legkisebb az áruló játékos nyereménye). Ebben az esetben az együttműködő játékos nyereménye egységnyi, míg az áruló megkapja az árulásért járó nyereményt b-t. Látszik, hogy az árulók számára legkedvezőtlenebb esetben is nagyobb nyereményt kapnak az együttműködőknél, így a klaszterek határvonala mindig a C stratégia kárára fog elmozdulni, ha a zaj által okozott kisebb fluktuációktól eltekintünk. A kölcsönös együttműködés tehát rövid időn belül eltűnik a rendszerből. Erre az eredményre jutunk természetesen akkor is, ha Monte Carlo szimulációkat futtatunk, vagy a dinamikus párközelítést alkalmazzuk.

A négyzetrács és a köbös rács esetében is elsőszomszéd kölcsönhatással dolgoztunk (a szimulációknál a rács szélén periodikus határfeltételt alkalmaztunk). Minthogy a klaszterezettségi együttható mindkét esetben nulla, így a kapott eredmények arról adhatnak információt, hogy dimenzióváltáskor és a szomszédok számának növelésekor mi történik.

A b-függést vizsgáló Monte Carlo szimulációk eredményei a 13. ábrán láthatóak. Az ábrázolt pontokat a termalizációs idő utáni hosszú idejű futtatás átlagaként kaptuk. A szimulációkat szokás szerint véletlen kezdeti feltétellel indítottuk: az egyes stratégiák kezdeti koncentrációja 1/2 volt. A rendszerméret a négyzetrács esetében $N = 10^6$, köbös rács esetében: $N = 512000$ volt.

Látszik, hogy az együttműködők koncentrációja mindkét esetben másodrendű fázisátalakulással tűnik el. A kritikus pontok értékei: négyzetrácson: $b_{cr} = 1.0285(2)$, köbös rácson $b_{cr} = 1.137(5)$. Négyzetrácson a kritikus pont közelében további szimulációkat végeztünk és a kritikus exponens ($\beta = 0.58 \pm 0.03$) kimérésével megmutattuk, hogy a fázisátalakulás az



13. ábra. Monte Carlo szimulációs eredmények négyzetrácson (folyamatos vonal) és köbös rácson (szaggatott vonal).

irányított perkolációs univerzalitási osztályba [31] tartozik.

A köbös rácson a hosszú futtatási idők miatt nem vizsgáltuk meg a kritikus pont közvetlen környékét, de a modell univerzális tulajdonságai miatt valószínűleg ez a fázisátalakulás is az irányított perkolációs univerzalitási osztályba tartozik.

A dinamikus párközelítés módszerét is megpróbáltuk alkalmazni, de nem kaptunk jó egyezést a szimulációs adatokkal. Ennek az az oka, hogy a C stratégiát követő játékosok nagyobb csoportokba tömörülve segítik egymást, a párközelítés azonban csak néhány pontból álló klasztert tud kezelni.

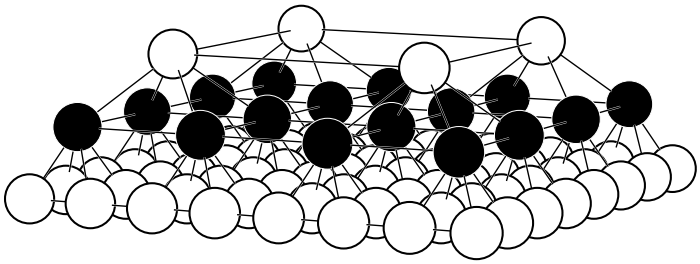
Végeredményben megállapíthatjuk, hogy a modell körülményei között a szomszédok számának a dimenzióváltáskor bekövetkező növelése pozitívan hatott a kölcsönös együttműködés kialakulására, hiszen a köbös rács esetében a kritikus pont jelentősen kitolódott.

6.4. A stratégiapopulációk koncentrációja és az átlagos nyeremények hierarchikus rácsokon

Hierarchikus szerkezetünket a bevezetőben említett módon Q darab egymás fölé helyezett négyzetrács segítségével építjük fel fel. A rácsállandót szintenként felfelé haladva mindig duplázzuk. A szinteket felülről lefelé a $q = 1, ..., Q$ indexekkel jelöljük. Egy-egy szinten belül elsőszomszéd kölcsönhatással dolgozunk és a széleffektusok kiküszöbölésére periodikus határfeltételt alkalmaztunk minden szinten. A $q = 2, ..., Q$ szinteken a játékosok 2×2-es blokkokba vannak osztva és egy, a $(q-1)$. szinten, geometriailag fölöttük elhelyezkedő játékoshoz vannak kötve. Tehát minden játékosnak van négy „beosztottja" és egy „főnöke". Természetesen a legfelső ($q = 1$) és a legalsó ($q = Q$) szinten hiányoznak a „főnökök" illetve a „beosztottak". A felső, középső és alsó szinteken elhelyezkedő játékosoknak tehát rendre nyolc, kilenc és öt szomszédjuk van, míg a klaszterezettségi együttható [32] rendre 1/7, 1/6 és 1/5. Technikai szempontok miatt az alsó szint lineáris méretét $L = 2^k$ ($k > Q$) nagyságúra választottuk. Ekkor a játékosok összlétszáma a hálózaton $N = 4[4^k - 4^{(k-Q)}]/3$ lesz. Egy három hierarchiaszintből felépített szerkezetet láthatunk a 14. ábrán.

Kis rendszerméretekre a szimulációk hamar belefutnak az egyik (C vagy D) homogén abszorbeáló állapotba, ezért ennek a kiküszöbölésére megfelelően nagy ($N \simeq 10^5 - 10^6$) játékosszámot használtunk. A Monte Carlo szimulációk esetében véletlen kezdőfeltételt alkalmaztunk, kezdetben a játékosok fele az együttműködő, fele az áruló stratégiát követte. A stacionárius végállapotok adatait úgy kaptuk meg, hogy 2000-50 000 Monte Carlo lépés (MCL) hosszú termalizációs idő után 16 000 MCL-en keresztül átlagoltuk a megfelelő mennyiségeket. A stratégiaeloszlások időfejlődését és a játékosok átlagnyereményét is szintenként figyeltük. Később ebből számoltuk a teljes rendszerre vonatkozó adatokat (társadalmi összbevétel, az egész rendszerre vonatkoztatott stratégiaeloszlás, stb.).

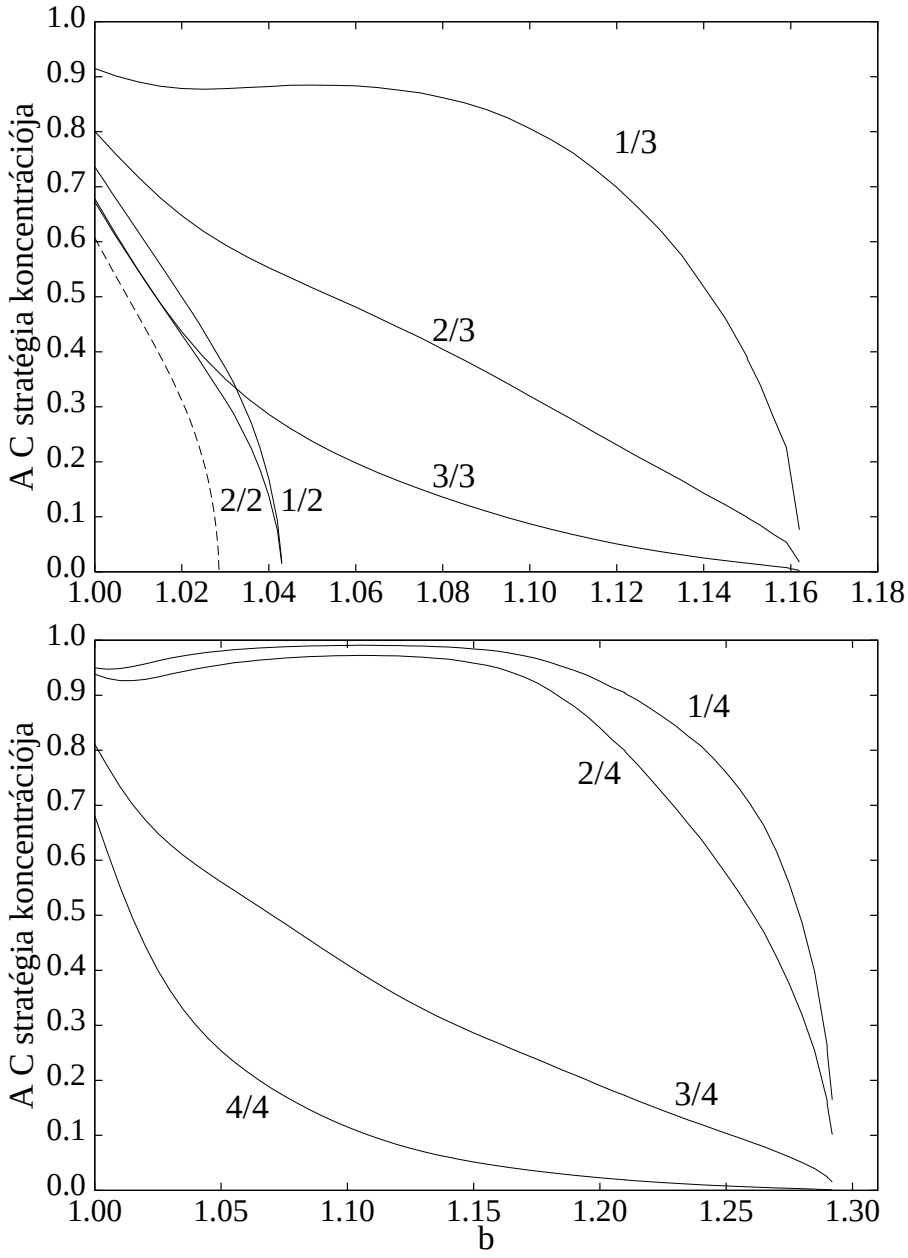
Először a stratégiapopulációk koncentrációjának Q és b függésével foglal-



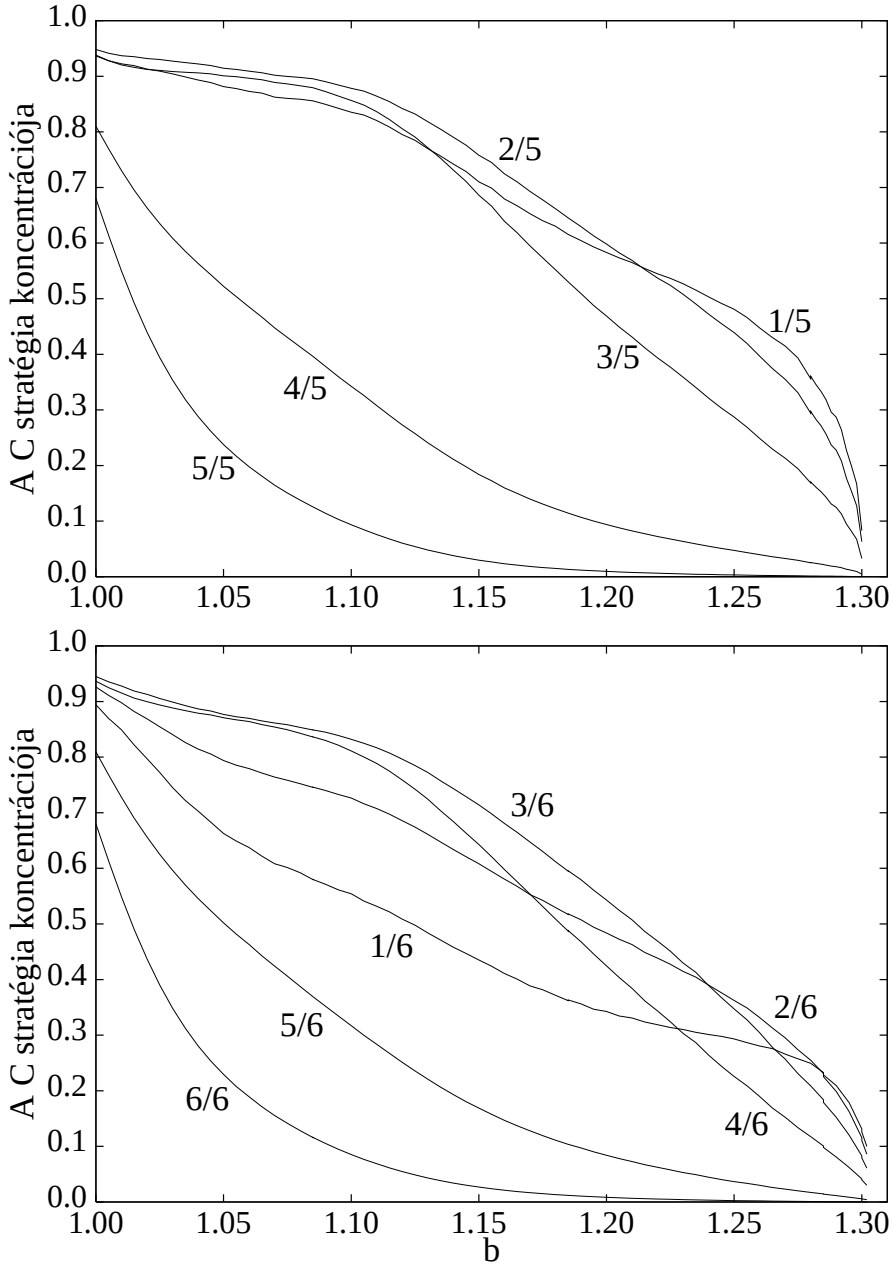
14. ábra. Négyzetrácsokból felépített háromszintes hierarchikus szerkezet. A szinteken belül az elsőszomszédok között van kapcsolat, az alsóbb szinten pedig az „alattuk" elhelyezkedő 4 játékossal. Ez egyben definiálja a fölső szomszédot is. Az adott szinteken periodikus határfeltételt használtunk, azonban ezt az ábrán nem jelöltük, hogy a kép jól áttekinthető legyen. A képen a színezés csak demonstrációs célokat szolgál: az első és a harmadik szinten elhelyezkedő játékosokat fehér, míg a másodikon levőket fekete gömbökkel jelöltük.

koztunk. A 15. ábrán láthatóak a két-, három- és négyszintes szerkezeten, a 16. ábrán pedig az öt- és hatszintű hierarchiában kapott eredmények. A rendszerméret rendre $N = 81920, 344064, 348160, 349184$ és 349440 volt. Az ábrákon látható, hogy a hierarchiaszintek számától függetlenül mindig létezik b-nek egy kritikus értéke (b_{cr}), amelynél nagyobb b-kre az együttműködés nem tud fennmaradni a rendszerben. A kritikus érték azonban függ a hierarchiaszintek számától ($b_{cr}(Q)$). A kritikus pontok pontos értékét azért nem határoztuk meg, mert a b_{cr}-ek környékén végzett szimulációknál a termalizációs idő és a fluktuációk is gyorsan növekszenek, ezért nagyon hosszú ideig tartana egy-egy pont pontos meghatározása (ezért is hiányoznak az ábrákon az utolsó pontok). Nagy valószínűséggel igaz azonban az a sejtés, hogy a fázisátmenetek az irányított perkolációs univerzalitási osztályba tartoznak.

A $Q = 2$ esetet a négyzetráccsal összehasonlítva (15. ábra) láthatjuk, hogy a kritikus pont értéke megnőtt. Ez valószínűleg annak a következménye, hogy a hierarchia bevezetésével nőtt a szomszédok átlagos száma (4-ről 5.6-re) és



15. ábra. A C stratégiát követők koncentrációja két- ($Q = 2$), három- ($Q = 3$) és négyszintes ($Q = 4$) rendszer különböző szintjein (q) a b paraméter függvényében. A szinteket q/Q alakban jelöltük. Az $1/Q$ jelű szint található a hierarchia „tetején". Referenciaként szaggatott vonallal berajzoltuk a négyzetrácson ($q = Q = 1$) kapott eredményeket is.



16. ábra. A C stratégiát követők koncentrációja az öt- ($Q = 5$) és hatszintes ($Q = 6$) rendszer különböző szintjein a b paraméter függvényében. A jelölések ugyanazok, mint a 15. ábránál.

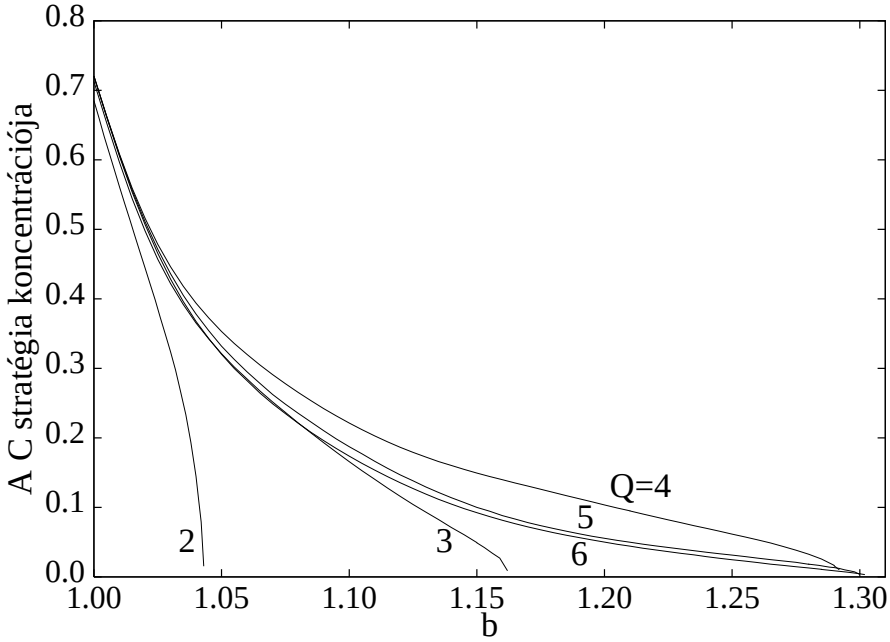
az átlagos klaszterezettségi együttható is (nulláról 0.189-re). A hierarchiaszintek növelésével egyébként mindkét érték monoton növekszik: az átlagos szomszédszám határértéke $\lim_{Q\to\infty}(N_{\text{szomsz}}) = 6$, az átlagos klaszterezettségi együtthatóé pedig $\lim_{Q\to\infty}(C_{\text{átl}}) = 23/120 = 0.191\dot{6}$. Ezzel magyarázható, hogy a további hierarchiaszintek bevezetésével a kritikus pont egyre jobban kitolódik.

Mint az ábrákon is látszik, az együttműködők koncentrációja erősen különbözik a szinteken. Az abszorbeáló D állapotba való fázisátmenet azonban ugyanazon Q-függő kritikus b értéknél következik be minden szinten. Tehát a túlélő, együttműködő kolóniák az összes szinten jelen vannak, de a szintenkénti koncentráció q-függő.

A numerikus eredmények egy másik feltűnő jellegzetessége, hogy az együttműködés mindig a legalsó szinten a legkisebb mértékű. Azonban az, hogy melyik a legkooperatívabb szint, függ Q-tól és b-től. Q kisebb értékeire ($Q \leq 4$) a legmagasabb hierarchiaszinten a legnagyobb az együttműködők aránya, és minél lejjebb megyünk a hierarchiában, annál kevesebben követik a C stratégiát. Ennek a rendeződésnek a magyarázatát valószínűleg a fölső és az alsó szint különböző szomszédsági viszonyai adják.

Ha azonban $Q > 4$ értéket választunk, az előbb leírt rendeződés „felborul". Az ötszintes esetben a b paraméter egy széles intervallumában a második szinten a legnagyobb az együttműködők aránya és csak a kritikus pont közelében haladja meg ezt az értéket a fölső szinten levő C játékosok koncentrációja. A hatszintes rendszernél még kisebbé válik az a tartomány, ahol a legfelső szint a legkooperatívabb. Ennél a szerkezetnél megfigyelhető továbbá két olyan intervallum, ahol a harmadik illetve a második szint mutatja a legnagyobb mértékű együttműködést. Érdemes megemlíteni, hogy a b paraméter egy nagyon széles tartományában a negyedik szinten is több a C játékos, mint a legfelső szinten.

A kritikus pont közvetlen közelében azonban a szintenkénti kooperáció ismét teljesen rendezetté válik, a legfelső szinten lesz a legnagyobb és monoton

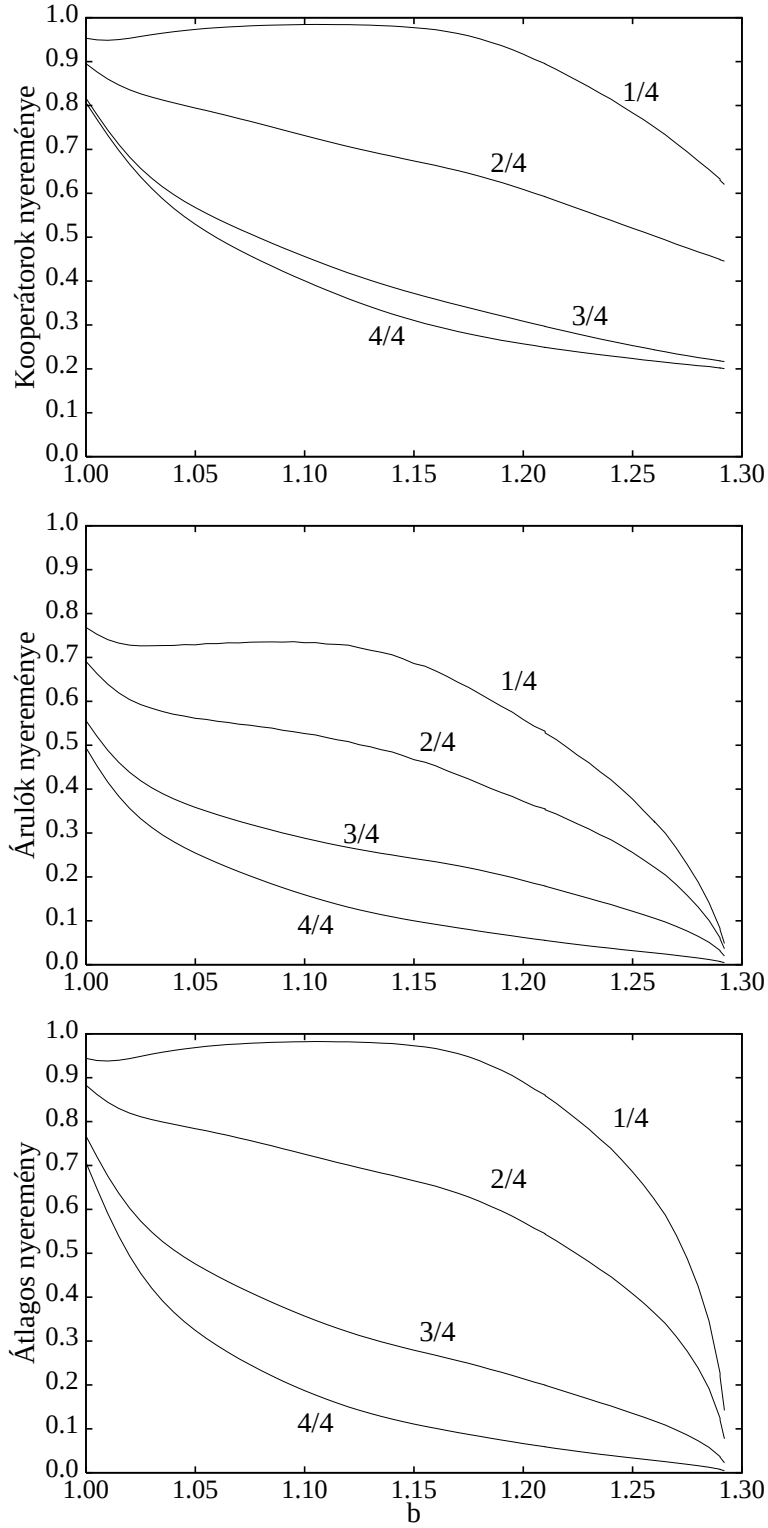


17. ábra. Az együttműködő stratégiát követők koncentrációja a teljes rendszerben a hierarchiaszintek számának (Q) és a b paraméternek függvényében. A kölcsönös együttműködés a négyszintes rendszerben a legnagyobb.

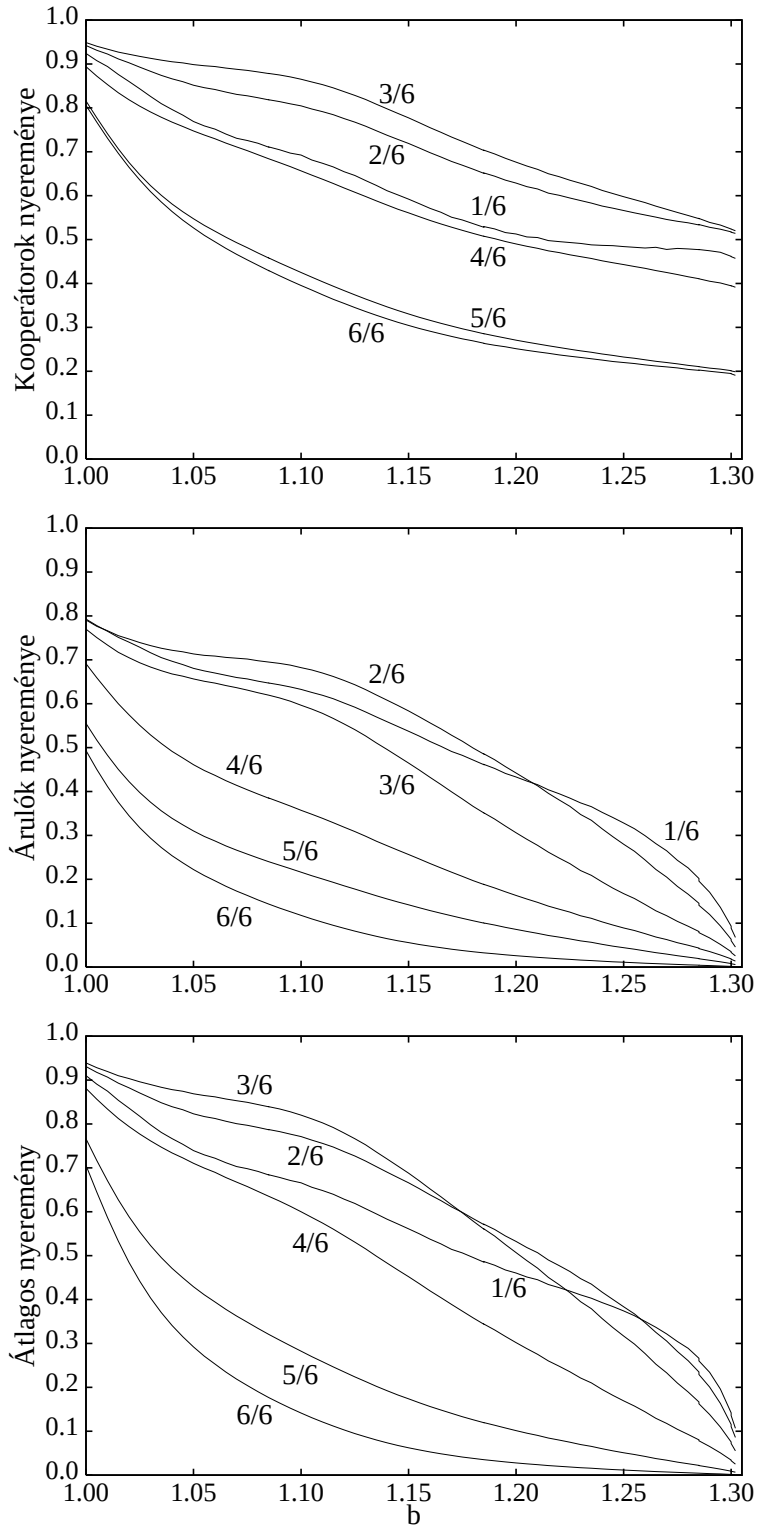
csökken a szinteken lefelé haladva.

A különböző szintek adatait összevonva megkaphatjuk az együttműködők arányát a teljes rendszerre vonatkoztatva. Az átlagértékek meglehetősen alacsonyak, mivel a legkevésbé kooperatív (legalsó) szinten található a legtöbb játékos. Mint a 17. ábrán is láthatjuk, a C játékosok koncentrációja a négyszintes rendszerben a legnagyobb majdnem az összes b értékre. Megfigyelhető, hogy a $b_{cr}(Q)$ értékek monoton nőnek Q növelésével és valószínűleg egy, a hatszintes rendszer kritikus pontja közelében lévő értékhez konvergálnak. Ez a trend valószínűleg az átlagos szomszédszám és a klaszterezettségi együttható fentebb már említett, monoton növekedésének eredménye.

A stratégiapopulációk koncentrációja után nézzük meg, mi történik az átlagos nyereményekkel. A 18. és a 19. ábra mutatja, hogy különböző Q ér-



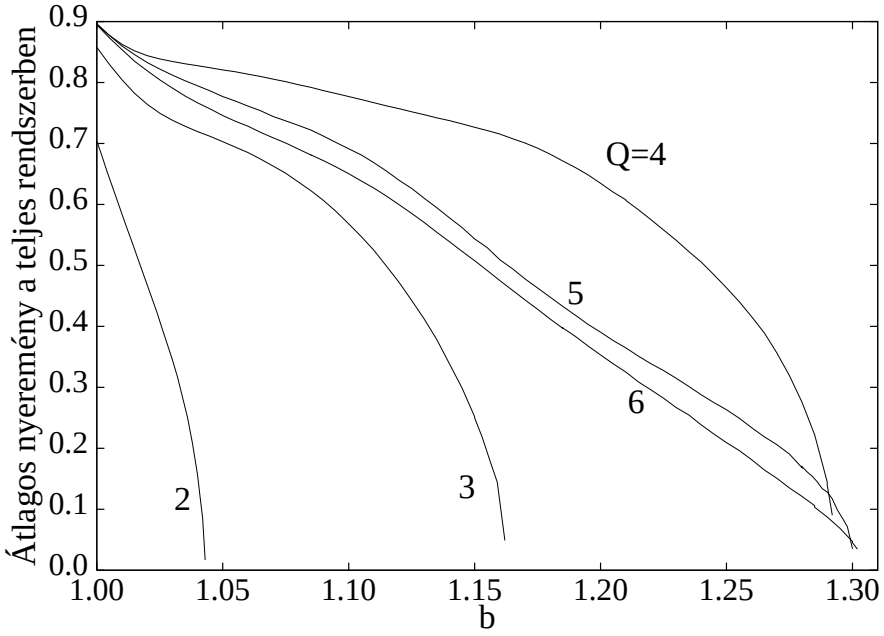
18. ábra. Hierarchiaszintenkénti egy főre jutó (normált) átlagos nyeremények négyszintes rendszerben a b paraméter függvényében. A felső (középső) ábra mutatja az együttműködők (árulók) átlagos nyereményét, míg az alsó ábrán a teljes populációra vonatkoztatott átlagos nyeremény látható.



19. ábra. Hierarchiaszintenkénti egy főre jutó (normált) átlagos nyeremények a hatszintes rendszerben a b paraméter függvényében.

tékek mellett szintenként mekkora az együttműködők és az árulók bevétele. Ezen kívül feltüntettük még a szintenkénti átlagos bevételt is. Ezeket az ábrákat az ugyanakkora Q-hoz tartozó, koncentrációkat ábrázoló görbékkel összehasonlítva nagy hasonlóságot fedezhetünk fel. A hasonlóság oka alapvetően az, hogy a nyeremény nagysága a kooperatív partnerek számától függ az együttműködők és az árulók esetében is. (Egy n kooperatív szomszéddal rendelkező C (D) játékos össznyereménye n (bn).) Emellett az is hozzájárul a hasonlóság kialakításához, hogy az együttműködők csoportokba tömörülve támogatják egymást, így az ő nyereményük adja az össznyeremény nagyobb részét is (bármely szinten magasabb a nyereményük, mint az adott szinten levő árulóké). Ez magyarázza azt is, miért jóval kisebb az árulók nyereménye az együttműködőkénél: ők ugyanis csak az együttműködő és az áruló klaszter határán kapják meg az árulásért járó b nyereményt, de egymás között kölcsönös büntetésként már nulla lesz a bevételük. Az együttműködők ellenben a klaszter szélétől eltekintve egységnyi „hasznot” biztosítanak egymásnak. Ez az oka annak, hogy az együttműködők szintenkénti átlagnyereménye nem nullához tart, ahogy a kritikus ponthoz közeledünk: ameddig létezik néhány játékos, aki a C stratégiát követi, csoportba tömörülve relatíve magas átlagnyereményt tudnak összegyűjteni. Az együttműködő játékosok számának csökkenésével azonban egyre rövidebb lesz a kétfajta stratégia által alkotott klaszterek határvonala, így az árulók bevétele lassan nullához tart. A kritikus ponthoz közeledve a szintenkénti átlagos bevétel mindig nullához tart, mert bár az együttműködők bevétele nem, de a koncentrációjuk nullává válik, ahogy b tart b_{cr}-hez.

A hatszintes rendszerben az árulók átlagos nyereményének szintenkénti rendeződése különbözik az együttműködőkétől. Az árulók átlagos nyereménye az első és a második szinten a legnagyobb. Ez annak a következménye, hogy $Q = 6$ esetére a legnagyobb kooperativitás a közbenső szinteken ($q = 2, 3$) figyelhető meg és a hálózat geometriai tulajdonságainak következtében ezeket az együttműködőket a fölöttük elhelyezkedő árulók tudják



20. ábra. Az egy főre jutó átlagos nyeremény a hierarchiaszintek számának és a b paraméternek függvényében. A négyszintes rendszerben a legnagyobb az össztársadalmi bevétel.

leginkább kizsákmányolni.

A két- és háromszintes rendszerben megfigyelhető átlagos nyeremények hasonlóan viselkednek, mint a négyszintes rendszernél látottak, míg az ötszintes rendszer nyereményei a $Q = 6$ esettel analógok.

A 20. ábrán az össztársadalmi bevételt ábrázoltuk Q és b függvényében. Ugyanúgy mint a szintenkénti bevételek, ez az ábra is meglehetősen hasonlít a megfelelő, koncentrációt ábrázoló képhez (17. ábra). Ez tehát azt jelenti, hogy ilyen kapcsolati szerkezet mellett az átlagos össszbevételnek a $Q = 4$ értéknél van a maximuma.

7. A fogolydilemma játék fázisdiagramjai

A hierarchikus rácsokon végzett vizsgálatok után figyelmünket a dinamikai szabályban található zaj tanulmányozása felé fordítottuk. Kiderült ugyanis, hogy a zaj és a szomszédsági hálózat topológiája együttesen nagy hatással lehet az együttműködők stacionárius koncentrációjára. Bizonyos esetekben a zaj növelése nagy mértékben növelheti az együttműködés mértékét a rendszerben.

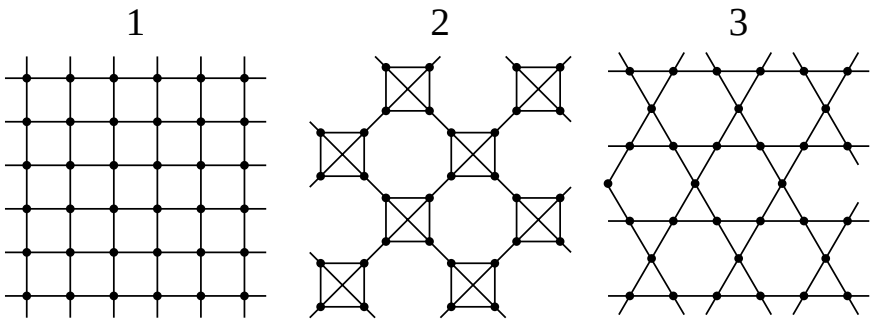
A jelenség tanulmányozására az egyszerű, két-stratégiás (C és D) fogolydilemma játékot vizsgáltuk különböző hálózatokon a zaj (K) és az árulásra való kísértés (b) mértékét szisztematikusan változtatva. A stratégiavektorok, a nyereménymárix, egy adott játékos összbevételének kiszámítása tehát megegyezik az 5. fejezetben leírttal, a stratégiaátvételi valószínűség kiszámításánál azonban (általában) nem szükséges normálni a szomszédok számával, mivel ebben a fejezetben majdnem csak olyan rácsokkal foglalkozunk, amelyeknél minden játékosnak négy szomszédja van (kivéve az utolsó alfejezet végén található Newman-Watts kisvilág szerkezetet).

7.1. Kétdimenziós rácsszerkezetek

Minthogy az evolúciós játékelmélet térbelivé tételekor elsősorban kétdimenziós térbeli szerkezeteket használtak, ezért vizsgálatainkat mi is az ilyen típusú hálózatokon kezdtük.

A vizsgált szerkezetek a 21. ábrán láthatóak: a négyzetrács (1), a kagome[11]-rács (3) és egy négy játékosból álló klikkek alkotta négyzetrács (2). A második szerkezet alapegysége a négyes klikk (a klikk olyan algráf, ahol bármely két pont között van közvetlen kapcsolat) és ezen klikkek pontjai egy-egy kötéssel kapcsolódnak a legközelebbi klikkhez egy szabályos négyzetrácsot képezve. A fenti rácsokat jól elkülöníthetjük a háromszögekhez (hármas klikkek) való viszonyukat nézve. A négyzetrácson egyáltalán nin-

[11] bambusznádfonat-rács



21. ábra. Kétdimenziós rácsszerkezetek, melyeken a fogolydilemma-játékot vizsgáljuk. Balról jobbra: négyzetrács, négyes klikkekből álló négyzetrács, kagome-rács.

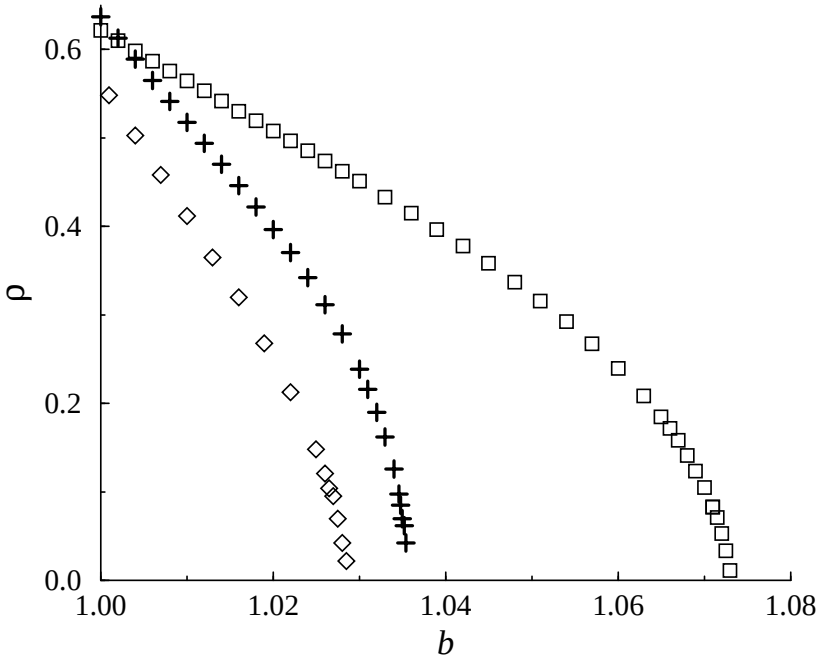
csenek háromszögek, a klaszterezettségi együttható $\mathcal{C} = 0$. A 2. és 3. gráfon rendre $\mathcal{C} = 1/2$ és $\mathcal{C} = 1/3$, míg azonban a kagome-rácson perkolálnak az átlapoló háromszögek[12], a 2. rácson csak izolált négyes klikkeket alkotnak.

A vizsgálatok során az egyszerűség kedvéért a Nowak és May [14] által javasolt $c \to -0$ határesetet használjuk.

A 22. ábrán a négyzetrácson elhelyezkedő együttműködők koncentrációjának b-függését láthatjuk három különböző K értékre. Az adatokat $L \times L$ méretű periodikus határfeltétellel ellátott négyzetrácson végzett Monte Carlo (MC) szimulációk eredményeként kaptuk. A rács lineáris mérete $L = 400$ és $L = 2000$ között volt. A nagyobb méretekre az együttműködők kihalásának közvetlen közelében volt szükség a véges méret effektusok kiküszöbölése végett. A kritikus átmenetek (függetlenül a zaj értékétől) a kritikus exponensek szerint az irányított perkolációs (DP) univerzalitási osztályba tartoznak.

Az együttműködők stacionárius koncentrációja monoton csökken a b paraméter növelése mellett. Egy adott küszöbérték ($b > b_{cr}$) felett pedig mindig kihal a C stratégia és a rendszer az abszorbeáló D állapotba kerül. A kritikus

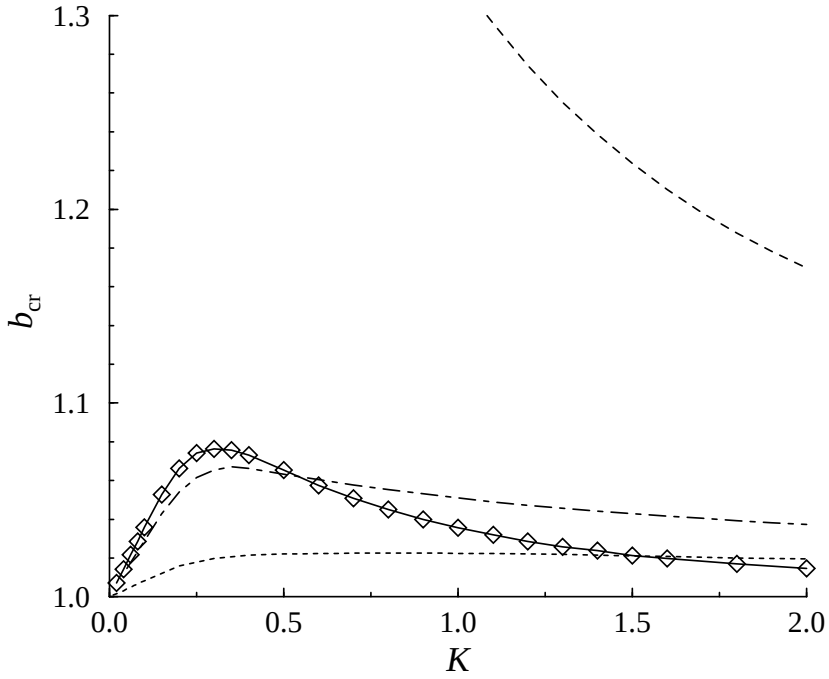
[12]A teljes gráfot be lehet úgy járni, hogy olyan háromszögeken lépkedünk, melyeknek van közös pontja.



22. ábra. Monte Carlo eredmények az együttműködők koncentrációjára négyzetrácson a b paraméter függvényében három különböző zajérték mellett: $K = 0.1$ (plusz-jelek), 0.4 (négyzetek), and 1.2 (gyémánt-szimbólumok).

b érték azonban erősen függ a zaj mértékétől, ezért definiálhatjuk a $b_{cr}(K)$ függvényt. Szisztematikus MC szimulációkkal sok különböző K érték mellett meghatároztuk a kritikus értékeket, az eredmények a 23. ábrán láthatóak. A görbe $K = 0.32$ körül éri el maximumát. Érdemes megjegyezni még, hogy $b_{cr}(K)$ 1-hez (vagyis a fogolydilemma játék minimális b értékéhez) tart, ha K nullához vagy végtelenhez tart. A 23. ábrát tekinthetjük fázisdiagramnak is, hiszen a kooperáció csak a szimbólumokat összekötő görbe alatti paramétertartományban maradhat fenn, a görbe felett a rendszer egy idő után biztosan az abszorbeáló D állapotba kerül.

A kapott fázisdiagram jelentősen különbözik a 3.3. fejezetben leírt átlagtérközelítés eredményeitől ($b_{cr}^{(mf)}(K) = 1$, azaz a közelítés szerint az együttmű-



23. ábra. Kritikus b értékek a zaj függvényében a négyzetrácson. A gyémánt szimbólumok mutatják a Monte Carlo eredményeket, míg a szaggatott, pontozott és a pont-vonallal jelölt vonalak a 2-, 2×2- és 3×3-pontos klaszterek segítségével végzett dinamikus klaszterközelítés jóslatait ábrázolják.

ködés kihal minden paraméterkombináció esetén). Pontosabb elméleti közelítést kaphatunk, ha a párközelítést alkalmazzuk. Ez a módszer már képes leírni a C és a D stratégia együttélését, de a kritikus b értékeket erősen túlbecsli, főként a $K \to 0$ határesetben, ahol a közelítés szerint b_{cr} 2-höz tart a szimulációk által adott 1 helyett (lásd a szaggatott vonalat a 23. ábrán). Nagyobb méretű klasztereken végzett dinamikus klaszterközelítés segítségével azonban már meglehetősen jó egyezést lehet elérni a MC szimulációkkal. A technikai részletek mellőzésével most csak az eredményeket közöljük, melyeket a négy- és kilenc-pontos klaszterközelítéssel kaptunk (pontozott és pont-vonal görbe a 23. ábrán). A nagyobb méretű klaszterekre való általáno-

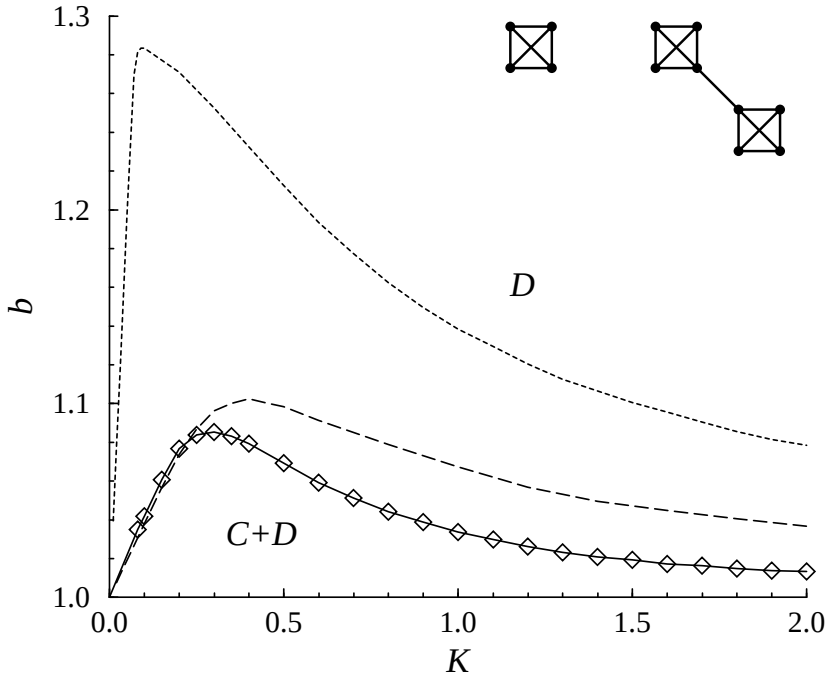
sítás könnyedén elvégezhető, de meglehetősen sok számolást igényel, ezért itt most nem részletezzük. Mindkét nagyobb méretű klaszterközelítés helyesen reprodukálja a fázisdiagram főbb tulajdonságait, tehát a $b_{cr}(K)$ görbének van egy maximuma egy véges K értéknél és $b_{cr} = 1$, ha K tart nullához vagy végtelenhez. A közelítés pontossága nyilvánvalóan egyre javul, amint fokozatosan nagyobb klasztereket vizsgálunk, a kisebb méretű klasztereket alkalmazó modszerek jóslatai között fennálló nagy különbségek pedig az alulfekvő gráf topológiája által is befolyásolt komplex, rövid távú kölcsönhatások fontosságát mutatják.

Ez a típusú fázisdiagram azt jelenti, hogy egy adott, fix b értékhez létezik egy olyan zajérték, ami a legnagyobb mértékű együttműködést teszi lehetővé a rendszerben az adott körülmények között. Emellett érdemes még megjegyezni, hogy két egymás utáni másodrendű fázisátalakulást (mindkét fázisátalakulás a DP univerzalitási osztályba tartozik) figyelhetünk meg, ha K értékét nulláról növeljük egy fix $b < \max(b_{cr})$ érték mellett.

A 2. rácson kapott Monte Carlo eredmények meglehetősen hasonlóak a négyzetrácson kapottakhoz (lásd 24. ábra), az eltérés a szimbólumok nagyságával összemérhető. Olyan mintha a fogolydilemma-játék egyfajta, egylépéses renormálási csoport transzformációt hajtott volna végre a rácson, a négyes klikkeket egy pontba húzva, így a rácsot közönséges négyzetráccsá alakítva.

A négyzetráccsal ellentétben itt a négypontos klaszterközelítés túlbecsli az MC eredményeket. A nyolcpontos közelítés azonban nagyon jól illeszkedik az alacsony zajú ($K < 0.3$) MC adatokhoz. A nyolcpontos közelítés valószínűen jól illene egy olyan, nem-térbeli szerkezeten játszott fogolydilemma játékhoz, ahol egy négyes konnektivitású véletlen reguláris gráf (vagy Bethe-rács) pontjait négyes klikkekkel helyettesítenénk.

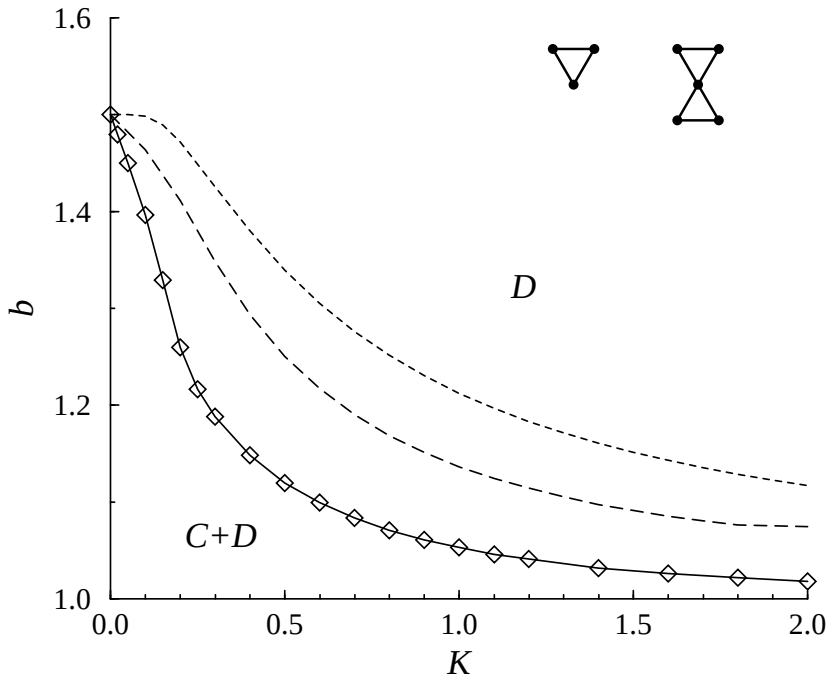
Alapvetően másfajta viselkedést figyelhetünk meg a kagome-rácson (25. ábra). A legszembetűnőbb dolog, hogy a kritikus b értékek itt monoton csökkennek K növelésével és hogy $b_{cr}(K = 0) = 3/2$ a dinamikus klaszterkö-



24. ábra. A 21. ábrán látható második szerkezet $b - K$ fázisdiagramja. A gyémánt-szimbólumok jelölik a MC eredményeket, a pontozott és szaggatott vonalak pedig a dinamikus klaszterközelítés jóslatait mutatják az ábra jobb felső sarkában látható négy- és nyolcpontos klaszterekre.

zelítések jóslatával összhangban.

Annak érdekében, hogy az együttműködést az alacsony zaj határesetben elősegítő releváns topológiai tulajdonságokról teljesebb képet kapjunk, megvizsgáltunk néhány további kapcsolati hálózatot is. Várakozásainkkal összhangban a 25. ábrán láthatóhoz hasonló fázisdiagramokat kaptunk a következő szerkezetek esetében: négyzetrács első- és másodszomszéd kölcsönhatással ($z = 8$), háromszög-rács ($z = 6$) és a tércentrált köbös rács ($z = 8$). A fentebbi hálózatok közös tulajdonsága, hogy az átlapoló háromszögek perkolálnak rajtuk. Érdekes lenne megvizsgálni, hogy mi történik a $K \to 0$ határesetben olyan rácsokon, ahol más, nagyobb átlapoló klikkek perkolál-



25. ábra. Fázisdiagram a kagome-rácson (a 3. struktúra a 21. ábrán). A gyémánt-szimbólumok mutatják a MC eredményeket, a pontozott és szaggatott vonalak pedig a dinamikus klaszterközelítés jóslatait mutatják az ábra jobb felső sarkában látható három- és ötpontos klaszterekre.

nak a szerkezeten. Az azonban valószínűleg igaz, hogy ha túl nagy méretű klikket választunk, akkor az a kooperáció ellen fog dolgozni, hiszen a rendszer átlagtér-szerű viselkedést fog mutatni, ami, mint már a 3.3. fejezetben megmutattuk, a D stratégia dominanciájához vezet.

A fenti feltevéssel összhangban az együttműködés eltűnik a redszerből a nulla zaj határesetben a köbös rácson ($z = 6$) és a hatszög rácson (méhsejtrács) ($z = 6$) is, mivel ezeken a rácsokon nincs háromszög-perkoláció.

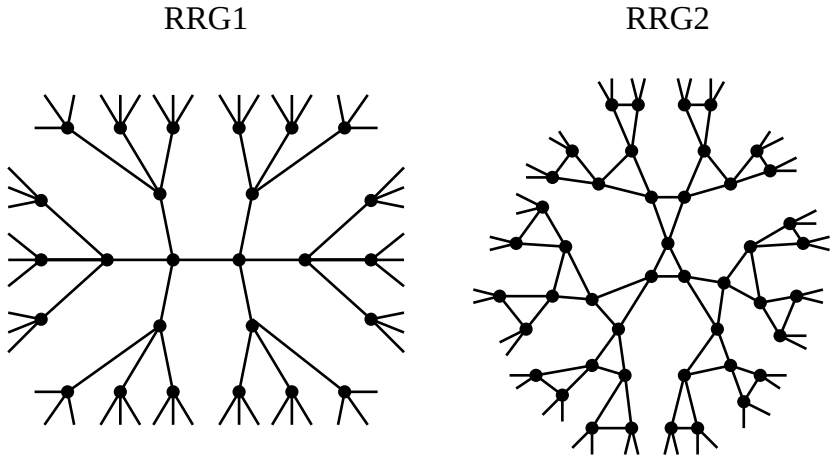
7.2. Véletlen reguláris gráfok

Az előző fejezetben tanulmányozott kétdimenziós, térbeli szerkezetek után a véletlen gráfokkal folytattuk a zaj-analízises vizsgálatokat. Az eredmények könnyebb összehasonlítása végett és a szomszédok számának különbözőségéből adódó nehézségek elkerülése végett vizsgálatainkat a négyes konnektivitású ($z = 4$) véletlen reguláris gráfokra korlátoztuk.

A modell részletei (stratégiák, nyereménymátrix, stratégiaátvételi valószínűség) teljesen megegyeznek az előző fejezetben leírttal.

A vizsgált gráfok a 26. ábrán láthatóak. A szerkezetekre a hosszas körülírást elkerülendő az RRG1 és RRG2 néven fogunk hivatkozni.

Az RRG1 hálózat a Bethe-rács szimulált változata. Lokálisan faszerkezete van, ha a gráf pontjainak számával (N) tartunk a végtelenhez. Azonban véges számú pont esetében (amilyenek a szimulációk is) a hálózatban vannak hurkok. Az ebből a tulajdonságból fakadó hatások elhanyagolhatóvá válnak, ha elegendően nagy méretű gráfot vizsgálunk. A félreértések elkerülése végett



26. ábra. Kétfajta véletlen reguláris gráf (random regular graph (RRG)), amelyeken a fogolydilemma-játék zajfüggését vizsgáljuk.

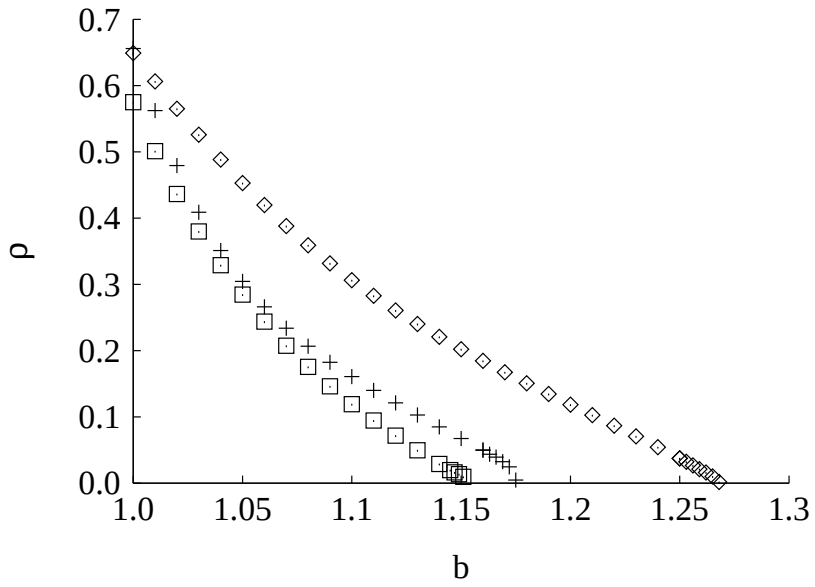
és a jobb ábrázolás érdekében a 26. ábra az RRG1 gráfnak egy ideális (hurok nélküli) részét mutatja.

Az RRG2 gráf egy háromszögekből álló véletlen reguláris gráf. A gráf háromszögei megfeleltethetőek egy alulfekvő hármas konnektivitású ($z = 3$) véletlen reguláris gráf pontjainak, ahol a pontok közti kötéseket az eredeti (RRG2) gráf (két háromszöghöz tartozó) pontjai definiálják. Ez a hálózat lokálisan a kagome-rácshoz hasonlít, de később látni fogjuk, hogy bizonyos esetekben a véletlen reguláris gráf-jelleg dominál.

Az azonos koordinációs szám ($z = 4$) ellenére a két véletlen hálózat topológiája alapvetően különbözik. Míg a háromszögek koncentrációja RRG1-en az $N \to \infty$ határesetben nullához tart ($\mathcal{C} = 0$), addig RRG2-n a háromszögek perkolálnak, a klaszterezettségi együttható $\mathcal{C} = 1/3$.

Elsőként az RRG1 hálózaton vizsgáltuk azt a tartományt, ahol az együttműködés fennmaradhat. A 27. ábrán látható az együttműködők koncentrációjának (ρ) b-függése különböző zajparaméterek mellett. Az adatok nagy méretű rendszereken (a méret $N = 4 \times 10^4$ és $N = 4 \times 10^6$ között változott) végzett MC szimulációkból származnak. A stacionárius értékeket t_s hosszúságú mintavételi időn keresztül való átlagolással kaptuk (t_s 10^4 és 10^6 Monte Carlo lépés között változott). A nagy N és t_s értékekre az együttműködők kihalásának közvetlen környékén volt szükség, mivel a variancia közelítőleg $\chi \propto \rho^{-2}$ szerint divergált kis koncentrációértékek és alacsony zaj esetén. További nehézséget okoztak a méreteffektusok kis zajértékek esetén. Ezeket az effektusokat valószínűleg a hálózatban jelenlévő kis méretű hurkok okozták. A hurkoknak az együttműködés mértékére gyakorolt hatását később tárgyaljuk részletesen.

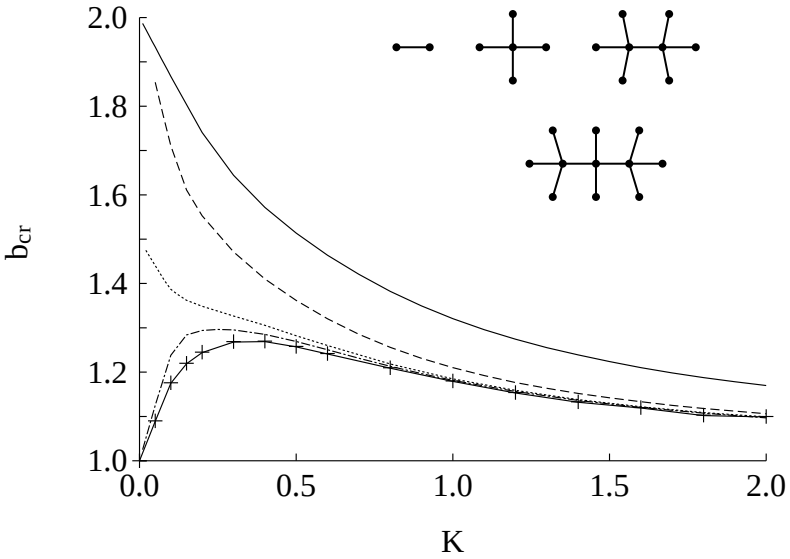
A fluktuáló ($C + D$) fázisból az abszorbeáló fázisba való átmenet gyakran az irányított perkolációs univerzalitási osztályba tartozik. Ahogy várható volt, az alulfekvő hálózat véletlen gráfra való változtatásával a $\rho(b)$ függvény viselkedése átlagtérszerűvé vált (27. ábra). Az együttműködők stacionárius koncentrációja lineárisan csökken a kritikus pont közelében. Ha b értékét



27. ábra. Monte Carlo szimulációk eredményei az együttműködők koncentrációjára a b paraméter függvényében az RRG1 gráfon három különböző zajértékre: $K = 0.1$ (plusz-jelek), 0.3 (gyémánt-szimbólumok) és 1.2 (négyzetek).

túl nagyra növeljük ($b > b_{cr}$), akkor a kooperáció egy kezdeti tranziens után eltűnik és a rendszer a homogén D fázisba kerül.

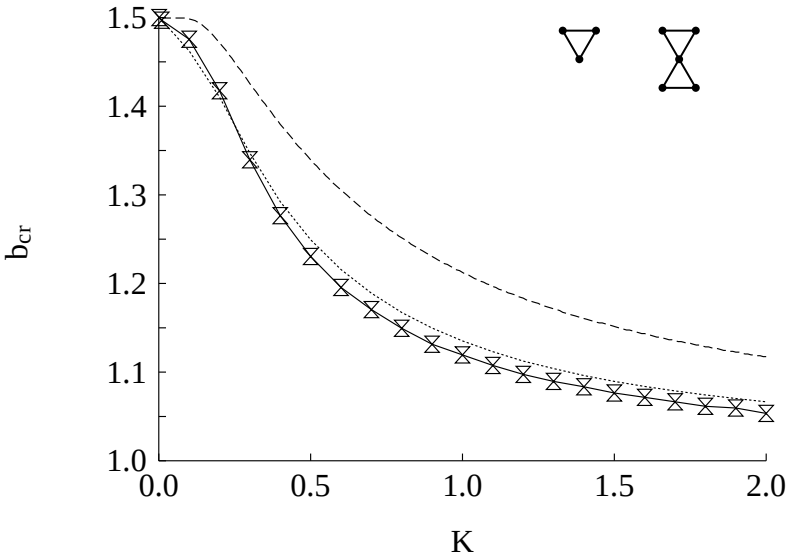
Sok különböző zajparaméterre meghatároztuk a kritikus b értékeket, az eredményül kapott fázisdiagram a 28. ábrán látható. A $b_{cr}(K)$ görbének maximuma van $K \approx 0.37$-nél és 1-hez tart, ha b tart nullához vagy végtelenhez. A fázisdiagram tehát alapvetően a négyzetrács – azaz a háromszögperkoláció nélküli szerkezetek – fázisdiagramjához hasonlít. Hasonló koherencia-rezonancia lehetőségéről számoltak be Traulsen és munkatársai [33], akik a „win-stay-lose-shift” („ha nyersz, maradj, ha vesztesz, válts”) stratégián alapuló evolúciós szabályt alkalmaztak, és Perc is koherencia-rezonanciát kapott, amikor a nyereménymátrix elemeihez véletlen perturbációkat adott egy négyzetrácson vizsgált evolúciós fogolydilemma játék során [34]. Hasonlóan a zaj által előidézett rezonancia-jelenséget figyeltek meg gerjesztett dinamikai



28. ábra. Kritikus b értékek a zaj függvényében RRG1-en. Plusz-jelek mutatják a Monte Carlo eredményeket, a folytonos, szaggatott, pontozott és a pont-vonallal jelölt görbék pedig a dinamikus klaszterközelítés jóslatait mutatják a jobb felső sarokban látható 2-, 5-, 8- és 11-pontos klaszterekre.

rendszerek esetében [35, 36] is.

A fázisdiagram analitikus reprodukciója meglehetősen időigényes feladatnak bizonyult. Mint azt már korábban leírtuk, az átlagtér-közelítés szerint a homogén C és D fázis között hirtelen ugrással következik be a váltás, és ez minden K értékre ugyanott történik $b_{cr}^{(mf)}(K) = 1$. A párközelítés ugyanazt az eredményt adja az azonos koordinációs számmal rendelkező, háromszögek nélküli hálózatok esetén, tehát itt is ugyanazt kapjuk, mint például a négyzetrácsnál. Pontosabb becslés eléréséhez itt is nagyobb klasztereket kellett használnunk a dinamikus klaszterközelítésnél. Mint a 28. ábra is mutatja, az öt- és nyolcpontos klaszterek is kevésnek bizonyultak a helyes trend leírására az alacsony zaj határesetben, noha a nagy zajértékekre adott becslés pontossága folyamatosan növekedett a használt klaszterméret növelésével. Ha azonban összehasonlítjuk az öt- és a nyolcpont-közelítés eredményeit a

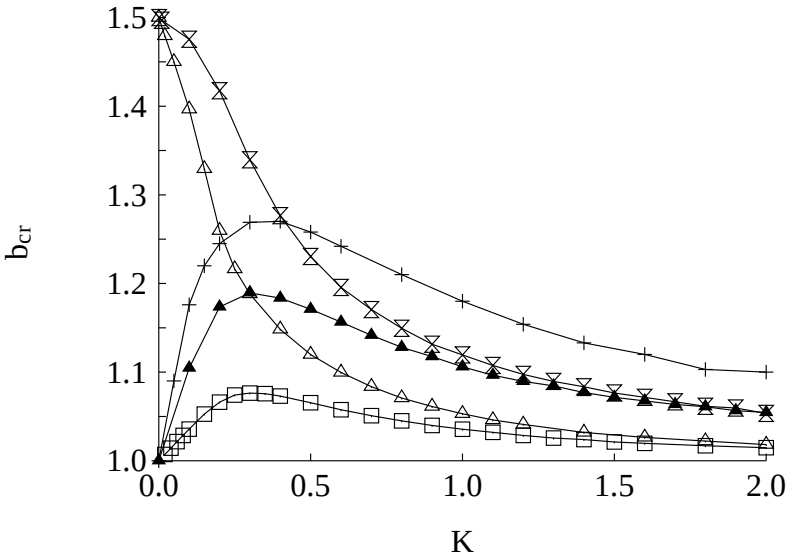


29. ábra. Fázisdiagram az RRG2 hálózaton. A szimbólumok jelölik a MC eredményeket. A szaggatott és a pontozott vonalak a kép felső részén látható klaszterek segítségével végzett három- és ötpont-közelítés jóslatait mutatják a D és a $C + D$ fázisokat elválasztó határvonalra.

$K \to 0$ határesetben, láthatjuk, hogy jelentős javulás figyelhető meg. Emiatt kiterjesztettük a közelítést a meglehetősen sok számítást igénylő 11-pontos klaszterre is, ami végre már minőségileg jó eredményt adott. A dinamikus klaszterközelítéseknek ezen sorozata jól jelzi a hosszabb távú kölcsönhatások fontosságát az alacsony zaj határesetben.

Alapvetően másfajta viselkedést tapasztaltunk az RRG2 gráfon (29. ábra). Az előző fejezetben megfogalmazott sejtés szerint a $b_{cr}(K)$ függvény monoton csökken és tart 1-hez K növelésével, ha az átlapoló háromszögek lefedik a teljes hálózatot. Az RRG2-n kapott eredmények is támogatják ezt a sejtést.

A 29. ábrán összehasonlítjuk a Monte Carlo eredményeket a három- és ötpont-közelítés adataival. Érdemes megemlíteni, hogy a három- és ötpont-közelítés pontosan ugyanazt az eredményt adja, mint a kagome-rácson, mivel lokálisan azonos szerkezetű az RRG2 gráffal. Az ötpont-közelítés azonban



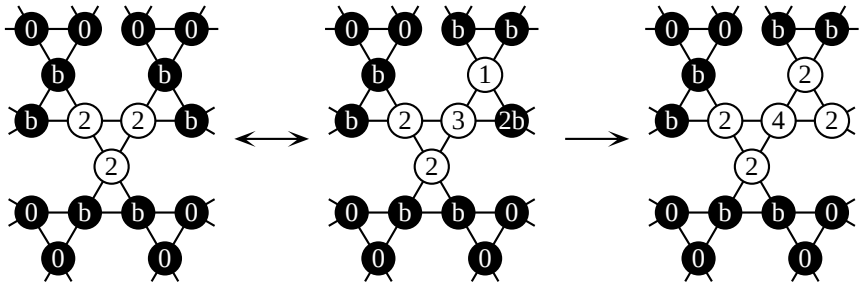
30. ábra. Fázishatárok a D és a $(C+D)$ fázisok között az RRG1 (plusz-jelek) és RRG2 (homokóra-szimbólumok) gráfokon, a négyzetrácson (négyzetek), a kagome-rácson (üres háromszögek) és a hármas konnektivitású véletlen reguláris gráfon (teli háromszögek).

sokkal inkább összhangban van az RRG2 hálózaton kapott MC adatokkal. Ez a közelítés ugyanis nem tudja kezelni a (háromszögeknél nagyobb) hurkokat, amelyeknek a koncentrációja az RRG2-n kicsi (a Bethe-rács esetében nulla lenne), míg a kagome-rács csupa hat pontból álló gyűrűből épül fel.

A négyes konnektivitású ($z = 4$) reguláris szerkezetek közül az RRG2 képes a legtovább biztosítani a kooperáció fennmaradását biztosító feltételeket az alacsony zaj határesetben (30. ábra). Első pillantásra ez meglepő eredmény lehet, hiszen a térbeli kapcsolati hálózatokat azért vezették be, hogy az együttműködők kolóniákat hozhassanak létre [12, 14].

A fenti eredmények segítettek, hogy egy egyszerű magyarázatot találjunk, ami megerősíti az egy ponton átlapoló háromszögek fontosságát a kapcsolati hálózatokban. Vegyünk egy három együttműködő játékos által alkotott háromszöget egy D domén belsejében. A C játékosok nyereménye kettő, a

szomszédos árulóké b, az összes többi áruló pedig nem kap semmit. Ebben a helyzetben (alacsony zaj esetén) a legvalószínűbb evolúciós lépés, hogy az egyik szomszédos D játékos átveszi a sikeresebb C stratégiát. Az újonnan született együttműködő nem stabil, rövid időn belül visszaváltozhat árulóvá. Amíg azonban együttműködő állapotban van, addig a másik szomszédos D játékos ($b < 3/2$ esetén) nagy valószínűséggel veheti át a C stratégiát az eredeti háromszögben levő együttműködő játékostól, így egy újabb (immár stabil) együttműködő háromszöget alkotva (31. ábra). Ez a folyamat az együttműködő háromszögek faszerkezetének növekedéséhez vezet. A növekedés akkor áll meg, amikor két ág találkozik egymással, mert ekkor a találkozási pontban levő áruló(k) mindkét ág C játékosait ki tudják zsákmányolni, ezért a bevételük nagyobb lesz az együttműködőkénél. Ilyen találkozási pontokból meglehetősen sok van a térbeli szerkezeteken, míg a faszerű hálózatokon (mint például a Bethe-rács) nyilvánvalóan nincsenek. Így a hurkok hiánya (természetesen az egy ponton átlapoló háromszögek által alkotott hurkokról van szó) elősegíti a kooperáció terjedését RRG2-n. A fenti magyarázat akkor érvényes teljesen, ha kezdetben csak egy együttműködő háromszög van



31. ábra. Egy új együttműködő háromszög kialakulásának folyamata egy ponton átlapoló háromszögek által alkotott hálózaton. Az együttműködő játékosokat fehér, az árulókat fekete körök jelölik. A körökben látható számok az adott játékos nyereményét mutatják. A nyilak a legvalószínűbb átmenetek irányát jelölik az alacsony zaj határesetben.

a rendszerben. Véletlen kezdőfeltétel esetén több növekvő együttműködő fa lesz, és ezen fák ágai akadályozhatják egymást a találkozási pontjaikon még az RRG2 gráfon is. A stacionárius állapotban végül a növekedési jelenségek a zaj mértéke által is befolyásolt egyensúlyba kerülnek a találkozási pontok miatti defektor inváziós folyamatokkal. Nyilvánvalóan a zaj következtében az árulók be tudnak törni az együttműködő háromszögekbe, de ennek az eseménynek a valószínűsége kicsi az alacsony zaj határesetben. Ezeknek a folyamatoknak az eredményeképp a $\rho(K)$ függvény monoton csökken K növelésével bármely $b < b_{cr}$ esetére.

Ezen vizsgálatok alapján azt a sejtést fogalmazhatjuk meg, hogy ha az egy ponton átlapoló háromszögek perkolálnak egy d-dimenziós ($d \geq 2$) vagy egy nem-térbeli (azaz Bethe-rács vagy véletlen reguláris gráf) kapcsolati hálózaton, akkor az adott szerkezeten kapott fázisdiagram főbb jellemzőit tekintve a 29. ábrán látható diagramhoz lesz hasonló. Tehát az átlapoló háromszögek biztosíthatják az optimális topológiai feltételeket az együttműködés fenntartására az alacsony zaj határesetben.

Amint a 30. ábrán látható, a magas zaj határesetben a háromszögek kooperációt elősegítő szerepe eltűnik. Hasonló egylépéses renormálási csoport transzformáció-szerű dolgot figyelhetünk meg RRG2 esetében, mint amit az előző fejezetben a négyzetrács és a négyes klikkekből álló hálózat kapcsán már láthattunk. A magas zaj határesetben az RRG2 szerkezet teljesen úgy viselkedik, mint a hármas konnektivitású ($z = 3$) véletlen reguláris gráf.

Érdekes módon magasabb zaj esetén sem a térbeli szerkezetek az előnyösebbek az együttműködés számára. A $K > K_{th} \simeq 0.4$ értékekre az RRG1 gráf biztosítja a C stratégia túlélését a legnagyobb b tartományban. Mint látható, a második helyen a hármas konnektivitású véletlen reguláris gráf áll. Tehát a hurkok jelenléte a kapcsolati hálózatban nehezíti a C stratégia túlélését a magas zaj határesetben. Más szóval a rögzített szomszédsági kapcsolatoknak a kooperáció fenntartására gyakorolt pozitív hatását gyöngíti a kapcsolati hálózat térbeli jellege.

7.3. Egydimenziós lánc és a Newman-Watts kisvilág-módosítás

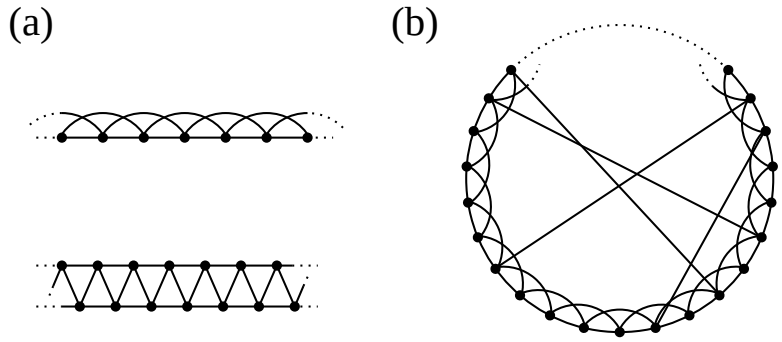
Mint a 6.3. fejezetben láttuk, az egydimenziós láncon elsőszomszéd kölcsönhatással az együttműködés nem tud fennmaradni. Felmerült a kérdés, hogy mi történik első- és másodszomszéd kölcsönhatás esetén ($z = 4$). Ez a szerkezet ugyanis két olyan, jelentős topológiai tulajdonsággal rendelkezik, amelyek erősen befolyásolhatják a rendszer viselkedését az alacsony zaj határesetben. A szerkezet alapvetően egydimenziós, ami a homogén állapotok kialakulását segíti elő doménnövekedési folyamatokon keresztül, ugyanakkor az átlapoló háromszögek perkolálnak rajta, ami az együttműködés elterjedését segíti elő az alacsony zaj határesetben. Ezen kettősség eredményeképpen a struktúrán kapott fázisdiagram különbözik azoktól a diagramoktól, melyeket az eddig tanulmányozott átlapoló háromszögekkel rendelkező szerkezeteken kaptunk. A fejezet végén megmutatjuk, hogy a fázisdiagram jelentősen megváltozik, ha az alapszerkezeten Newman-Watts kisvilág módosítást [37] hajtunk végre.

A vizsgált modell alapvetően ugyanaz (nyereménymátrix, stratégiák, stratégiaátvételi függvény), mint amit az előző két fejezetben alkalmaztunk, csak itt a játékosok nyereményét normáljuk a szomszédjaik számával, mivel a kisvilág módosítás következtében a vizsgált gráf nem-regulárissá válik. Annak érdekében azonban, hogy a fázisdiagramokat könnyen összehasonlíthassuk az előző fejezetekben kapottakkal, beledefiniálunk egy konstans négyes faktort a játékosok nyereményébe (ez igazából csak egy skálafaktort jelent a zajban). Ennek következtében az x helyen lévő játékos nyereményét a következőképpen számolhatjuk ki:

$$U_x = \frac{4}{|\Omega_x|} \sum_{y \in \Omega_x} \mathbf{s}_x^+ \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_y \ , \tag{3}$$

ahol $\mathbf{s}_x^+$ az adott játékos stratégiavektorának transzponáltja és az összegzés a játékos összes szomszédját (Ω_x) sorraveszi.

A vizsgált szerkezetek a 32. ábrán láthatóak. Az első hálózat egy egydi-



32. ábra. Különböző kapcsolati hálózatok, melyeken a fogolydilemma-játékot tanulmányozzuk. (a) Egydimenziós lánc első- és másodszomszéd kölcsönhatással ($z = 4$). Az alsó ábra topológiailag ekvivalens a felsővel, az átlapoló háromszögstruktúra bemutatására szolgál. (b) Egydimenziós lánc Newman-Watts kisvilág módosítással.

menziós lánc első- és másodszomszéd kölcsönhatással periodikus határfeltétellel. A második hálózatot az elsőből készítettük úgy, hogy új kapcsolatokat adtunk a meglévő szerkezethez a Newman-Watts kisvilág módosítás szerint azzal a plusz megkötéssel, hogy egy játékosnak maximálisan öt szomszédja lehet. Mivel a Newman-Watts módosítás során az eredeti kapcsolatok megmaradnak, ez a további feltétel kellett ahhoz, hogy ne alakuljanak ki túlságosan nagy fokszámú pontok. Emellett így nagyobb esély van arra, hogy a dinamikus klaszterközelítés egy jövőbeli kiterjesztését alkalmazni tudjuk rajta. A módosított hálózatot az eredeti és az új kötések arányszámával (p) jellemezzük.

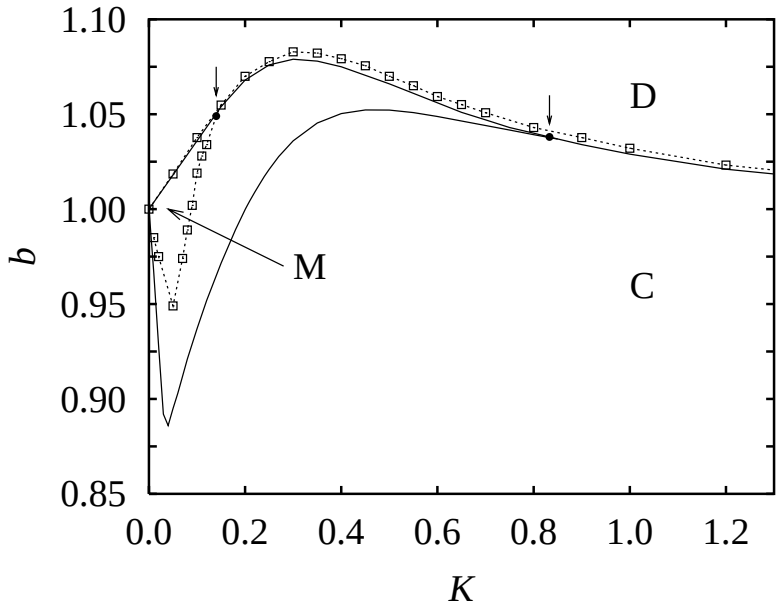
A Monte Carlo szimulációkat $N = 10^5 - 10^6$ pontból álló rendszereken végeztük. Kétféle módszert alkalmaztunk a fázishatárok meghatározására. Az első a „szokásos” volt: véletlen kezdőfeltételből indítottuk a rendszert és egy megfelelő tranziens idő letelte után átlagolással határoztuk meg az együttműködők stacionárius koncentrációját (az átlagoláshoz felhasznált idő

körülbelül megegyezett a tranziens idejével). A tranziens hossza a paraméterek értékétől függően 2×10^4 és 10^6 MC lépés között mozgott. A másik, sok esetben sokkal hatékonyabban alkalmazott módszer az úgynevezett magnövekedéses módszer volt. Itt a szimulációkat úgy indítottuk, hogy csak egy játékos volt defektor, a többiek mind az együttműködő stratégiát követték. Ezután néhány ezer független futtatásra átlagolással mértük az árulók túlélési valószínűségét különböző b értékekre fix K mellett (részletes leírásért lásd [38]). Az árulók koncentrációjának időfüggéséből is értékes adatokat lehetett kinyerni. Ezt a módszert alapvetően azoknak a fázishatároknak a detektálására lehetett használni, ahol az árulók tűntek el a rendszerből, tehát a D $\rightarrow$ C és M $\rightarrow$ C átalakulások esetén (M: kevert (mixed) fázis, ahol az együttműködők és az árulók együtt élnek).

A futtatások eredményeképp a rendszer háromféle végállapotot érhet el a b és K paraméterek értékének függvényében. Az állapotokat jellemezhetjük az együttműködők stacionárius koncentrációjával (ρ). Együttműködés uralkodik az egész rendszerben ($\rho = 1$), ha $b < b_{c1}$, azonban elegendően magas $b > b_{c2}$ értékre az árulók dominálnak ($\rho = 0$). Általában létezik egy közbenső tartomány ($0 < \rho < 1$, míg $b_{c1} < b < b_{c2}$), ahol a C és a D stratégia dinamikus egyesúlyban együtt él. Annak érdekében, hogy teljesebb képet kapjunk és mindkét kritikus értéket meghatározhassuk, kiterjesztettük a vizsgált b-tartományt a $b < 1$ tartományra is. Az ebben a tartományban lévő nyereménymátrix-értékek egy másik szociális dilemmát, az úgynevezett szarvasvadászat játékot (Stag Hunt game [39]) írják le.

Az egydimenziós lánc ideális szerkezet a dinamikus klaszterközelítés alkalmazására. Szisztematikus vizsgálatokat végeztünk a klaszterméret (n) növelésével, és azt találtuk, hogy a kapott fázisdiagram főbb jellemzőit tekintve nem változik $n \geq 5$ méretű klaszterek esetén. A közelítés eredményeit $n = 10$ nagyságú klaszterekre a 33. ábrán hasonlítjuk össze a MC eredményekkel.

Láthatjuk, hogy a Monte Carlo adatok és a dinamikus klaszerközelítés is lépcsőszerű átmenetet mutatnak a homogén C fázisból a D fázisba a $K \rightarrow 0$



33. ábra. Fázishatárok a $b-K$ síkon az egydimenziós lánc esetén (32/a ábra). Folytonos vonal jelöli a dinamikus klaszterközelítés jóslatát $n = 10$ pontos klaszterre, a négyzetek pedig a MC eredményeket mutatják. A fázishatárok elválasztják egymástól a homogén együttműködő (C), a homogén áruló (D) és a kevert (M) fázist, ahol az együttműködők és az árulók együtt élnek. A MC eredményekhez és dinamikus klaszterközelítés eredményeihez tartozó trikritikus pontokat nyilak és teli körök jelölik.

határesetben. Az elsőrendű fázisátalakulás $b = 1$ értéknél következik be, tehát itt $b_{c1} = b_{c2} = 1$. Hasonló fázisátmenet történik a $K \to \infty$ határesetben is. Ezek az esetek tehát egyeznek az átlagtér-közelítés jóslataival. Hasonlóan elsőrendű fázisátalakulást láthatunk a C fázisból a D-ba ($b_{c1} = b_{c2} > 1$), ha b értékét változtatjuk fix zajérték mellett a $K > K_{tric}^{(MC)} \approx 0.15$ tartományban. Kisebb zajértékekre az elsőrendű fázisátalakulás két folytonos átmenetre szakad, melyek az irányított perkolációs univerzalitási osztályba tartoznak. Az átalakulási pontnál ($K = K_{tric}$), ahol a két folytonos kritikus átmenet meg-

jelenik, egy trikritikus pontot ($b = b_{tric}^{(MC)} \approx 1.05$) figyelhetünk meg, ahol mindhárom fázis (C, M, D) jelen van.

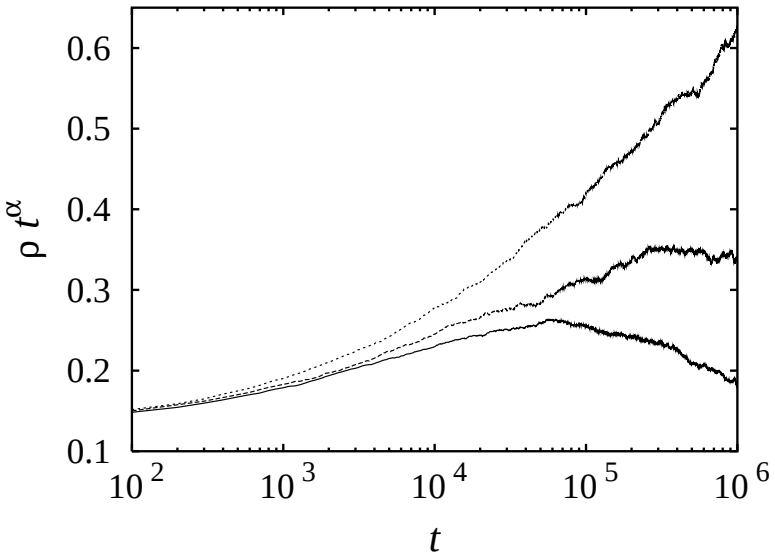
A C és a D fázisba való folytonos kritikus átmenet közelében a rendparaméter (a C vagy a D stratégiát követők koncentrációja) egy hatványfüggvény szerint tűnik el, ha b-t vagy K-t változtatjuk. Ugyanekkor a korrelációs hossz, a relaxációs idő és a rendparaméter szórása hatványfüggvény szerint divergál, ezért az itt végzett mérések meglehetősen sok időt igényelnek. A kritikus pontban a rendparaméter a következő hatványfüggvény szerint tűnik el, ha hosszú ideig figyeljük a rendszert:

$$\rho(t) \propto t^{-\alpha}$$

A kritikus exponensek értéke univerzális (nem függ a modell részleteitől), egymással összefüggenek és függenek a modell térbeli dimenziójától. Az irányított perkolációs univerzalitási osztályba tartozó átmenetekre $\alpha = 0.159464(6)$ egydimenziós modell esetén [40]. Az univerzális viselkedés demonstrálásaként a 34. ábrán az idő függvényeként ábrázoltuk a ρt^{α} görbét, mely a kritikus ponthoz tartozó paraméterek mellett konstanssá válik. Az ábrán 30 független futtatás átlaga látható.

Amint azt a 33. ábrán láthatjuk, a dinamikus klaszterközelítés a főbb tulajdonságokat tekintve jó közelítést ad a MC adatokra. Számszerűleg is meglehetősen jó az egyezés a $b_{c2}(K)$ függvény esetében bármely K-ra, azonban az alsó fázishatár becslése már nem ilyen jó a trikritikus pont alatt. Az eltérést valószínűleg a hosszú távú korrelációknak a D stratégia kihalásában játszott fontos szerepe okozza.

A $b_{c2}(K)$ fázishatárt vizsgálva láthatjuk, hogy létezik egy olyan zajszint, ami az együttműködők túlélése szempontjából a legmegfelelőbb. Ennek következtében ha például $b = 1.03$ érték mellett növeljük K-t nulláról, akkor a következő három fázisátalakulást figyelhetjük meg: D $\rightarrow$ M $\rightarrow$ C $\rightarrow$ D. Tehát a fázisdiagram főbb jellemzőit tekintve hasonló azokhoz a diagramokhoz, melyeket átlapoló háromszögstruktúrával nem rendelkező hálózatokon



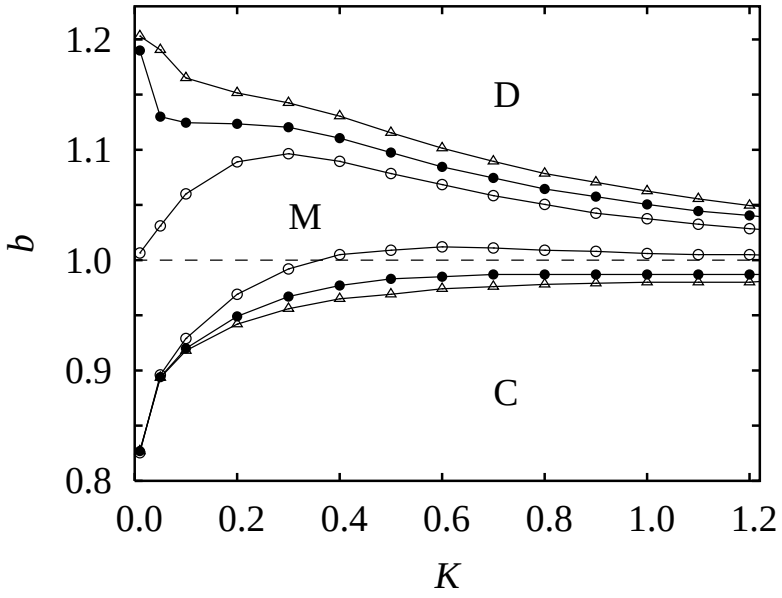
34. ábra. Az együttműködők koncentrációjának változása $b = 1.03$ mellett három különböző zajértékre ($K = 0.0791$, 0.0790 és 0.0789 föntről lefelé). A középső görbe mutatja a kritikus pontbeli tipikus viselkedést ($\alpha = 0.159$).

kaptunk.

Egy másik, hasonló koherencia rezonancia jelenséget láthatunk a C és az M fázisokat elválasztó határvonalnál is.

A 33. ábrán tehát láthatjuk, hogy az átlapoló háromszögek ellenére a kooperáció nem tud fennmaradni a nulla zaj határesetben. A szerkezet egydimenziós jellegének következtében a növekedő klaszterek nem tudják kikerülni egymást. Ez a korlátozó effektus megszűntethető, ha további kapcsolatokat adunk a hálózathoz (32/b. ábra).

Az új kapcsolatoknak a $b-K$ fázisdiagramra gyakorolt hatását láthatjuk a 35. ábrán különböző mennyiségű hozzáadott kötés esetén. A kapcsolatok hozzáadásával a trikritikus pont azonnal eltűnik, és az M fázis a teljes vizsgált K intervallumban megtalálható lesz, sőt egyre szélesebbé válik, minél nagyobb az extra kapcsolatok aránya. A $b_{c1}(K)$ függvény határértéke



35. ábra. Az alsó $b_{c1}(K)$ és felső $b_{c2}(K)$ fázishatár a Newman-Watts szerkezeten különböző p értékekre. A jelek jelentése a következő: $p = 0.02$ (üres kör), 0.06 (teli kör) és 0.10 (háromszög). A folytonos vonalak a jobb áttekinthetőséget segítik, a szaggatott vonal pedig a $b = 1$ értéknél levő alapvonalat mutatja.

egynél kisebb lesz a $K \to 0$ limeszben. Ezek az alapvető változások a kisvilág tulajdonságok megjelenésének és az egydimenziós szerkezet egyidejű megszűnésének az eredményei. A felső fázishatár (ami a D és az M fázist választja el egymástól) kisebb p értékekre egyhez tart az alacsony zaj határesetben, de ha a hozzáadott kapcsolatok száma átlép egy bizonyos küszöbértéket $p_{tr} = 0.04(2)$, akkor az egydimenziós jelleg annyira lecsökken, hogy a fázisdiagram hasonlóvá válik a többi átlapoló háromszögstruktúrával rendelkező gráfon kapott diagramhoz. A p_{tr} küszöbértéket nem határoztuk meg pontosabban, mert a $K \to 0$ limeszben divergáló relaxációs idők túlságosan hosszú szimulációkat tettek volna szükségessé.

8. Összefoglalás

Jelen dolgozatban az evolúciós fogolydilemma játék modelljét felhasználva vizsgáltuk a kölcsönös együttműködés kialakulását önző egyedekből álló közösségekben. A közösségeken belüli kapcsolatok modellezésére különféle térbeli szerkezeteket alkalmaztunk.

A 4. fejezetben a részlegesen véletlen szomszédságnak az együttműködés mértékére kifejtett hatását vizsgáltuk az önkéntes fogolydilemma játék keretében. Bizonyos körülmények között a különböző stratégiájú játékosok által alkotott domének közötti ciklikus inváziós folyamat fontos szerepet játszik az együttműködés fenntartásában. Az önkéntesség bevezetésével nagy különbségeket fedezhetünk fel a térbeli modellek és az átlagtér-közelítés eredményei között. Az átlagtér elmélet jóslata szerint csak a „magányosok" maradhatnak meg a rendszerben a kezdeti állapot után. Ezzel szemben a négyzetrácson a háromfajta stratégia (D, C és L) a ciklikus inváziós folyamat következtében együtt él és önszerveződő mintázatot hoz létre.

Tanulmányoztuk a két viselkedésfajta közötti átmenetet is. Ennek érdekében kétfajta, részlegesen véletlen kapcsolatokkal ellátott hálózatot vizsgáltunk. Az első esetben a négyzetrács elsőszomszéd kapcsolatait P valószínűséggel helyettesítettük ideiglenes (tetszőlegesen távol elhelyezkedő) partnerekkel. A P paraméter növelésével folytonosan eljuthatunk a szabályos négyzetrács szerkezettől az átlagtér elméletnek megfelelő modellig. A paraméter változtatása közben két átmenetet találtunk. Az első küszöbérték alatt ($P < P_1$) a ritka ideiglenes kapcsolatok csak csekély mértékben befolyásolták az önszerveződő mintázatot. A középső intervallumban ($P_1 < P < P_2$) globális oszcilláció figyelhető meg, melynek amplitúdója nő P növelésével, és „telítésbe" megy P_2-nél. A második küszöbérték fölött ($P > P_2$) a rendszer az egyik homogén abszorbeáló állapot felé tart, P növelésével egyre nagyobb valószínűséggel a homogén „magányos" állapotba.

Hasonló viselkedést találtunk a második esetben is, amikor a részlege-

sen véletlen (de nem ideiglenes, hanem rögzített) kapcsolatokkal rendelkező hálózatot az evolúciós folyamat indítása előtt generáltuk. A részlegesen véletlen kapcsolatokat a kisvilág hálózatok [27] mintájára készítettük úgy, hogy a pontok fokszáma ne változzon. Az állandó (rögzített) kapcsolatok miatt a kölcsönhatások lokálisak, és ez az együttműködés kialakulása szempontjából előnyös lehet. Ennek eredményeképp az effajta véletlenség hatása kisebb, mint az első esetben bevezetetté. A fázisok közötti átmenetek nagyobb mértékű véletlenség mellett következnek be, bizonyos paramétertartományban a második átmenet el is tűnhet. Ezekben az esetekben a „magányosok uralma" még a $Q \to 1$ határesetben sem következik be.

Vizsgálatainknak a szociológia és a közgazdaságtan szempontjából értékelhető eredményeként látható, hogy a szomszédsági kapcsolatokban fellépő növekvő véletlenség a kizsákmányoló (áruló) stratégiát alkalmazók érdekeit szolgálja. Ezzel együtt a társadalom összbevétele csökken az együttműködők veszteségei miatt. Ezeket a hatásokat jelentősen befolyásolja a „magányos" stratégia bevezetése (lehetővé válik a ciklikus invázió). Az együttműködés fenntartásában fontos „lokális kölcsönhatásokat" az ideiglenes szomszédsági kapcsolatok sokkal erőteljesebben rombolják, mint a rögzített véletlen szomszédság hatásai. Ha a partnerségben fellépő időbeli véletlenséget egy (a nyereményektől, zajtól, stb. függő) meglepően alacsony küszöbértékig növeljük, akkor a szimulációk szerint egy egyre nagyobb mértékű globális oszcilláció után megszűnnek az együttműködési és kizsákmányolási törekvések, és a játékosok mind a „magányos" stratégiát alkalmazzák.

A részlegesen véletlen szerkezetek után az emberi kapcsolatrendszereket jól leíró skálafüggetlen gráf definiálta a szomszédsági kapcsolatokat. Ebben az esetben a játékosok csak a C és a D stratégia közül választhattak. Először úgy tűnt, hogy a klikkekbe tömörülő együttműködő játékosok egymást támogatva képesek ellenállni az árulók támadásának. A klikkeken kívül azonban nem tudtak tartósan a C stratégiát követő csoportokat létrehozni, ezért a zaj következtében egy idő után a D stratégia uralma alá kerültek. A klikkbe

bekerülő áruló játékos a sok belső kapcsolat következtében nagyon nagy nyereségre tett szert, és gyorsan elterjesztette a D stratégiát. Társadalmi szempontból a jelenség a következőképpen írható le: ha egy közösségen belül az emberek jól ismerik egymást és a baráti kapcsolatokat rendszeresen ápolják is, akkor a közösségen belül kialakult egységes önzetlen magatartás kívülről, egy távoli ismerős által nagyon nehezen rombolható le. Egy másik kutatócsoport másfajta dinamika alkalmazásával arra az eredményre jutott, hogy a skálafüggetlen hálózatokon az együttműködés a domináns stratégia a teljes paramétertérben. A dominancia kialakulásának lényege, hogy a központi C játékosok a sok kapcsolat következtében nagy nyereményhez jutnak és a többieknek „példát mutatva" elterjesztik környezetükben az együttműködést. A központi áruló játékosok azonban, mivel kezdetben nagy lesz a nyereményük, elterjesztik maguk körül a D stratégiát. Ezzel végülis önmagukat büntetve addig csökken a bevételük, amíg egy szomszédos együttműködő C játékossá nem alakítja őket, egy újabb együttműködő csomópontot létrehozva.

Ezután megvizsgáltuk mi történik, ha hierarchikus rácsokat választunk alapszerkezetként. A skálafüggetlen hálózatokhoz hasonlóan itt is az együttműködő és az áruló stratégia versengett egymással, de az előző modellel szemben itt a paraméterek egész széles tartományában fennmaradt az együttműködés a rendszerben. Az együttműködés mértéke erős függést mutatott a hierarchiaszintek számától (Q). Alacsony Q értékekre ($Q \leq 4$) a legmagasabb hierarchiaszinten volt a legnagyobb a C stratégia koncentrációja, az ennél jobban struktúrált szerkezeteken ($Q > 4$) azonban már egy széles paramétertartományban a közbenső rétegeken volt a legtöbb C stratégiát követő játékos. A nyeremények rendeződése is hasonlóképpen alakult, hiszen az együttműködő csoportokon belül a játékosok a kölcsönös együttműködés jutalmával gazdagodtak, míg az árulók a kölcsönös árulás büntetéseképpen többnyire semmit nem kaptak. A társadalmi összbevételt vizsgálva arra az eredményre jutottunk, hogy ebből a szempontból létezik optimális szintszámú rendszer: a játékosok átlagos nyereménye a négyszintes rendszerben

volt a legnagyobb.

Az utolsó fejezetben a stratégiaátvételi valószínűség függvényében definiált zaj változtatásának hatásait vizsgáltuk többfajta alapvetően reguláris strukúrán. Az alulfekvő hálózat topológiájának alapos vizsgálata több alapvető, fontos tulajdonságra is fényt derített. Kiderült, hogy az alacsony zaj határesetben azokon a szerkezeteken tud fennmaradni az együttműködés a legtovább, amelyeken az egy ponton átlapoló háromszögek az egész hálózaton megtalálhatóak. A nagyobb hurkok jelenléte viszont gátolja a kooperáció terjedését, ezért a $z = 4$ konnektivitású hálózatok közül a legelőnyösebb a háromszögekből felépített véletlen reguláris gráf (26. ábra: RRG2). A nagy zaj határesetben szintén a hurok nélküli szerkezetek az előnyösek, itt tehát a négyes konnektivitású véletlen reguláris gráf biztosítja a legkedvezőbb feltételeket (a $z = 4$ konnektivitású hálózatok között). Tehát levonhatjuk a következtetést, hogy a rögzített szomszédsági kapcsolatoknak a kooperáció fenntartására gyakorolt pozitív hatását alapvetően gyöngíti a kapcsolati hálózat térbeli jellege.

Vizsgálataink során számos kérdés merült fel további szisztematikus kutatást igényelve, és tovább buzdítva arra, hogy a hasonló közösségekben fellépő együttműködés fenntartását támogató további feltételeket és folyamatokat keressünk. A modelleket további tulajdonságokkal bővítve (pl.: rokonsági szelekció, indirekt kölcsönösség) az együttműködés evolúciójának újabb tulajdonságaira találhatunk magyarázatot. Másrészről a jelenségek mélyebb megértése érdekében szükséges lenne néhány vizsgálati módszer (pl.: dinamikus klaszterközelítés) továbbfejlesztése is.

Hivatkozások

[1] John von Neumann and Oskar Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton University Press, Princeton, 1944.

[2] John Maynard Smith. *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[3] H. Gintis. *Game Theory Evolving*. Princeton University Press, Princeton, 2000.

[4] Josef Hofbauer and Karl Sigmund. *Evolutionary Games and Population Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[5] György Szabó and Jeromos Vukov. Cooperation for volunteering and partially random partnerships. *Phys. Rev. E*, 69:036107, 2004.

[6] Jeromos Vukov and György Szabó. Evolutionary prisoner's dilemma game on hierarchical lattices. *Phys. Rev. E*, 71:036133, 2005.

[7] György Szabó, Jeromos Vukov, and Attila Szolnoki. Phase diagrams for an evolutionary prisoner's dilemma game on two-dimensional lattices. *Phys. Rev. E*, 72:047107, 2005.

[8] Jeromos Vukov, György Szabó, and Attila Szolnoki. Cooperation in the noisy case: Prisoner's dilemma game on two types of regular random graphs. *Phys. Rev. E*, 73:067103, 2006.

[9] Jeromos Vukov, György Szabó, and Attila Szolnoki. Evolutionary prisoner's dilemma game on the Newman-Watts networks. *arXiv*, physics.soc-ph:0709.0316, 2007.

[10] Karl Sigmund. *Az élet játékai*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1995.

[11] László Mérő. *Mindenki másképp egyforma*. Tericum Kiadó, Budapest, 1996.

[12] Robert Axelrod. *The Evolution of Cooperation.* Basic Books, New York, 1984.

[13] Paul E. Turner and Lin Chao. Prisoner's dilemma in an RNA virus. *Nature*, 398:441–443, 1999.

[14] M. A. Nowak and R. M. May. The spatial dilemmas of evolution. *Int. J. Bifurcat. Chaos*, 3:35–78, 1993.

[15] M. A. Nowak, S. Bonhoeffer, and R. M. May. More spatial games. *Int. J. Bifurcat. Chaos*, 4:33–56, 1994.

[16] György Szabó and Csaba Tőke. Evolutionary prisoner's dilemma game on a square lattice. *Phys. Rev. E*, 58:69–73, 1998.

[17] Mendeli H. Vainstein and Jeferson J. Arenzon. Disordered environments in spatial games. *Phys. Rev. E*, 64:051905, 2001.

[18] F. C. Santos and J. M. Pacheco. Scale-free networks provide a unifying framework for the emergence of cooperation. *Phys. Rev. Lett.*, 95:098104, 2005.

[19] Christoph Hauert, Silvia De Monte, Josef Hofbauer, and Karl Sigmund. Volunteering as red queen mechanism for cooperation in public goods game. *Science*, 296:1129–1132, 2002.

[20] György Szabó and Christoph Hauert. Phase transitions and volunteering in spatial public goods games. *Phys. Rev. Lett.*, 89:118101, 2002.

[21] György Szabó and Christoph Hauert. Evolutionary prisoner's dilemma games with voluntary participation. *Phys. Rev. E*, 66:062903, 2002.

[22] György Szabó, Tibor Antal, Péter Szabó, and Michel Droz. Spatial evolutionary prisoner's dilemma game with three strategies and external constraints. *Phys. Rev. E*, 62:1095–1103, 2000.

[23] Guillermo Abramson and Marcelo Kuperman. Social games in a social network. *Phys. Rev. E*, 63:030901(R), 2001.

[24] Beom Jun Kim, Ala Trusina, Petter Holme, Petter Minnhagen, Jean S. Chung, and M. Y. Choi. Dynamic instabilities induced by asymmetric influence: Prisoner's dilemma game in small-world networks. *Phys. Rev. E*, 66:021907, 2002.

[25] Holger Ebel and Stefan Bornholdt. Coevolutionary games on networks. *Phys. Rev. E*, 66:056118, 2002.

[26] B. Bollobás. *Random Graphs.* Academic Press, New York, 1985.

[27] D. J. Watts and S. H. Strogatz. Collective dynamics of 'small world' networks. *Nature*, 393:440–442, 1998.

[28] K. Tainaka. Paradoxial effect in a three-candidate voter model. *Phys. Lett. A*, 176:303–306, 1993.

[29] Albert-László Barabási. *Behálózva.* Magyar Könyvklub, 2002.

[30] Erzsébet Ravasz and Albert-László Barabási. Hierarchical organization in complex networks. *Phys. Rev. E*, 67:026112, 2003.

[31] Haye Hinrichsen. Non-equilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states. *Adv. Phys.*, 49:815–958, 2000.

[32] B. Bollobás. *Modern Graph Theory.* Springer, New York, 1998.

[33] Arne Traulsen, Torsten Röhl, and Heinz Georg Schuster. Stochastic gain in population dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 93:028701, 2004.

[34] M. Perc. Coherence resonance in spatial prisoner's dilemma game. *New J. Phys.*, 8:22, 2006.

[35] Arkady S. Pikovsky and Jürgen Kurths. Coherence resonance in a noise-driven excitable system. *Phys. Rev. Lett.*, 78:775–778, 1997.

[36] M. Perc. Spatial coherence resonance in excitable media. *Phys. Rev. E*, 72:016207, 2005.

[37] M. E. J. Newman and D. J. Watts. Renormalization group analysis of the small-world network model. *Phys. Lett. A*, 263:341–346, 1999.

[38] J. Marro and R. Dickman. *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[39] B. Skyrms. *Stag-Hunt Game and the Evolution of Social Structure*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[40] Iwan Jensen. Universality class of a one-dimensional cellular automaton. *Phys. Rev. A*, 43:3187–3189, 1991.