Fizika Doktori Iskola

Doktori Iskola vezetője: Dr. Horváth Zalán

Részecskefizika és csillagászat program

Programvezető: Dr. Csikor Ferenc

Kompakt kettősrendszerek által keltett gravitációs hullámok

Doktori értekezés

Majár János

Témavezető: Dr. Vasúth Mátyás

MTA KFKI RMKI Elméleti Főosztály

2007

"A tudomány a kultúrának az a része, amely a világgal érintkezik. Apró darabkákat kaparunk ki a világból, és elfogyasztjuk – nem olyan sorrendben, ami számunkra a legkedvezőbb volna, mert senki ezt jótékonyan nem készítette elő, hanem abban a sorrendben, amelyet csak az anyag ellenállása szabályoz. Az atomoknak és a csillagoknak nincs semmi észérvük, nem ellenkezhetnek, ha modelleket találunk ki az ő hasonlatosságukra, nem zárják el előlünk a káros, talán gyilkos tudást.
(...)
Ha az ember nem törődik többé az atomok és a bolygók mozgásával, a világ nagyon védtelenné válik vele szemben, mert az ember akkor úgy magyarázhatja, ahogy akarja. Aki képzeletével harcol, képzeletébe fullad bele. Pedig azt akarná, hogy fantáziája a világra nyitott ablaknak bizonyuljon. Két évig vizsgáltunk egy dolgot – a végénél kezdve, a földre patakzó eredményeinél. Javaslom: induljunk most el a másik irányból."

/Stanisław Lem: Az Úr Hangja (1968), Varsó/

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom Perjés Zoltánnak, aki életem egyik legmélyebb dilemmájából kiutat mutatott, és lehetővé tette, hogy érdemi kutatómunkát végezhessek. Köszönöm Lévai Péternek és Forgács Péternek, hogy Zoltán halála után is biztosították számomra ezt a lehetőséget.

Köszönöm fiatal kollégáimnak, Lukács Árpádnak, Helesfai Gábornak, Mikóczi Balázsnak és Keresztes Zoltánnak a megannyi beszélgetést, amelyek során a munkám alapgondolatai kikristályosodtak. Külön köszönet illeti Fodor Gyulát a dolgozat átnézésében és javításában vállalt szerepéért.

Köszönöm mindazon szeretteimnek, különösen szüleimnek és testvéreimnek, akik a nehéz időkben mellém álltak, támogattak, és ha kétség kerülgetett, gyámolítottak. Általuk mindig volt hová fordulnom, ha szükségem volt rá.

De mindenek előtt köszönettel tartozom Vasúth Mátyásnak, aki a nehézségek ellenére vállalta, hogy a témavezetőm lesz, és a munkám során folyamatosan támogatott, segített. Remélem, hogy a közös utazás tovább folytatódik...

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Az általános relativitáselmélet [1, 2] 1915-ös megszületése után nem sokkal a kutatók a gyenge tér közelítésben az Einstein-egyenleteket linearizálva, azokat hullámegyenlet alakban is felírták. Az egyenlet azt sugallta, hogy bizonyos fizikai rendszerek téridején, mint háttéren a hullámegyenlet szerint terjednek téridő-perturbációk. Ezeknek fontos jellemzője, hogy a gravitáció elméletében a kvadrupól és magasabb rendű multipól momentumokkal rendelkező rendszerek bocsátanak ki gravitációs hullámokat, a rendszerek dipólmomentuma nem sugároz.

Ezen perturbációk leírására született meg a kvadrupólformalizmus, amely a gravitációs hullámok közelítő elméletének legalacsonyabb rendje. Azóta már az egyes források különböző modelljei léteznek, és a kutatásoknak új lendületet adott a Föld felszínén telepített, a gravitációs hullámok közvetlen mérésére épített detektorok megjelenése.

A gravitációs hullámok létezésének első bizonyítéka közvetett, egy neutroncsillag–neutroncsillag kettősrendszer megfigyeléséből származik (PSR 1913 + 16). Az egyik test egy olyan pulzár, amelynek elektromágneses jelét a Földi detektorokkal érzékelhetjük. Ennek a jelnek köszönhetően mérhető volt a pulzár és a kettősrendszer periódusidejének változása, amely egyértelműen a kisugárzott gravitációs hullámok jelenlétére utal. A felfedezést tévő Joseph Taylor és Russel Hulse, azon túl, hogy a jelenleg legismertebb kettősrendszer az ő nevüket viseli, 1993-ban Nobel-díjat kaptak munkájukért. A kettősrendszerek elméletének köszönhetően jelenleg ez a mérés a modern fizika eredményeit legpontosabban reprodukáló megfigyelés.

Azonban ezen közvetett bizonyítékon túl a kutatások a gravitációs hullámok közvetlen mérését tűzték ki célul. Az első próbálkozások rezonáns detektorok segítségével próbálták ezt elérni az 1960-as évektől kezdve, azonban ezek a detektorok csak a nagyméretű fémhengerek rezonanciafrecvenciájának közelében, kis frekvenciasávban lettek volna képesek mérni. Ma elsősorban a felfüggesztési és a rezgések mérésének módszerét fejlesztik, hogy a különböző zajforrások hatásait megfelelő hatékonysággal tudják kiküszöbölni.

A másik módszer, az interferometrikus detektorok mérési alapelve, hogy két, minél hosszabb detektorkar relatív megnyúlásának különbségét mérjék lézer-interferométerrel. A mérés során a lézernyalábot a detektorkar végén visszaverő tükrök helyzetét úgy változtatják, hogy interferenciakép ne jelenjen meg, a két karban futó nyalábok a kivezetési szakaszon kioltsák egymást. A mérés eredménye lényegében a tükrök helyzetét ily módon moduláló elektromágnesek vezérlő jele.

Eddig az interferometrikus elven működő gravitációs hullám detektorokból összesen négy épült. Az első mérési eredményeket a Japánban, Mitaka városában épített, $300m$ karhosszúságú TAMA300 detektor [3] szolgáltatta 2000 tavaszán, azonban a várható jel alacsony, lényegében a zajjal azonos nagyságrendű (vagy kisebb) amplitudója miatt gravitációs hullámokat azóta sem detektáltak. Ezután épült fel az Egyesült Államokban a két, $4km$ karhosszúságú detektorból álló LIGO (Hanford, Washington és Livingston, Louisiana) [4], az Olaszországban, Cascina-ban található VIRGO ($3km$ karhossz) [5], és a GEO600 ($600m$ hosszú karokkal) Németországban, Hannoverben [6].

Ezen gravitációs hullámdetektorok, mivel a forrás iránya és típusa nehezen meghatározható, több, különböző forrás jelét fogják mérni egyszerre. A legnagyobb amplitudójú jeleket összeolvadó kettősrendszerekből, szupernova-robbanásokból, illetve gyorsan forgó, aszimmetrikus csillagokból, pulzárokból várják. Azonban ezen túl szisztematikus zajként jelenik meg a csillagászati objektumok n-test rendszerei és a forgó, aszimmetrikus csillagok által kisugárzott jelalak, illetve a korai univerzum perturbációiból itt maradt primordiális gravitációs hullámok is. Ez utóbbiakat nevezik legtöbbször a mért jelalakban fellépő sztochasztikus háttérnek.

Emellett megannyi egyéb zajforrást kell folyamatosan kiszűrni az alkalmazott lézernyaláb kvantumfluktuációitól kezdve egészen a Földfelszín és a közeli emberi tevékenység akusztikus zajáig. Ezt több, különböző formában próbálják megoldani. Egyrészt a detektor karhosszúságának növelésével (például félig áteresztő tükrök segítségével egy-egy nyaláb többször is végighalad a kar mentén), a tükrök felfüggesztésének és vezérlésének minél finomabb megvalósításával (ebben a VIRGO detektor jár élen), adott komplexumban több, egymással párhuzamos nyaláb vizsgálatával (LIGO II), az adatkiértékelés és a zajforrások minél szélesebb kutatásával, és természetesen a világ különböző pontjain települt detektorok munkájának összehangolásával, a mérési eredmények egyeztetésével.

A technológia rohamos fejlődésének köszönhetően a LIGO I-II rendszer mára a gravitációs hullámok detektálásának küszöbére ért, és néhány éven belül a VIRGO is képes lesz erre. Eközben már mindkét esetben olyan új technológiák bevezetését tervezik, amelyeknek köszönhetően lényegében már beindultak az "Advanced LIGO" [7] és "Advanced VIRGO" projektek. A másik két detektor, a GEO és a TAMA méretüknél fogva nem elsősorban a hullámok detektálását, hanem éppen ezen technológiák és zajszűrési rendszerek fejlesztését tűzték ki fő célként. A teljesség kedvéért meg kell említsem a Japánban tervezett új, $3km$ karhosszúságú LCGT detektort, mely egészen új technológiák alkalmazásával próbálja majd a gravitációs hullámok mérését megvalósítani. Ezen technológiák tesztelésére építik a $100m$ karhosszúságú CLIO detektort.

Az interferometrikus detektorok másik családjának első tagjai jelenleg még az építés és a technológia fejlesztésének időszakában tartanak, ezek az űrbe telepített detektorok, detektorrendszerek. Ezek közül az első a nemzetközi együttműködéssel épülő LISA (Laser Interferometric Space Antenna) gravitációs hullám detektor [8, 9].

A három műholdból álló rendszer a tervek szerint a Föld pályáján, vagyis lényegében átlagosan egy csillagászati egységre a Naptól, a Földtől 20°-al lemaradva fog keringeni a Nap körül. A három, egymástól $5 \cdot 10^6 km$ távolságban, egy szabályos háromszög csúcsaiban lévő műhold így három, egymással 60°-ot bezáró detektorkart jelent, ami a kalibráció és az eredmények ellenőrzése tekintetében külön előnyt jelent a Föld felszínén telepített mérőberendezésekkel szemben.

A LISA a tervek szerint a legalább 10 Naptömegű fekete lyukak alkotta kettősrendszerek összeolvadásának utolsó éveiben kisugárzott, vagy fekete lyukba hulló csillagok által keltett gravitációs hullámokat lesz képes detektálni. A kalibrálást közeli fehér törpe - fehér törpe kettősökkel tervezik elvégezni, mivel ezeket vizuálisan is érzékelhetjük, és ekkor a forrás irányát és távolságát is a méréstől függetlenül meghatározhatjuk. Jelenleg a technológia próbái, ezen belül a detektor két műholdjának űrbeli próbájának előkészítése (LISA pathfinder) zajlanak.

A legnagyobb amplitudójú és frekvenciájú jelek esetében a LISA a felszínen telepített detektorokkal együttműködve még pontosabb eredményeket szolgáltathat majd, így a projekt célkitűzése ezen esetekben már nem csupán a gravitációs hullámok létezésének visszaigazolása és detektálása, hanem a forrás adott tulajdonságainak mérése is.

Jelenleg a projekt a technológia tesztelésénél és kipróbálásánál tart, a mérés megkezdését eredetileg 2015-re tervezték, de a folyamatos csúszások miatt a mérés elkezdésének időpontja előre nem jósolható. A rendszer beindulása és a kalibrálási időszak után a tervek szerint öt éven keresztül fogja mérni a gravitációs hullámok jelalakjait, eközben folyamatosan zajlik majd az adatok feldolgozása, és a számtalan zaj kiszűrése a detektált jelből.

A különböző típusú források között kiemelt helyet foglalnak el a kettősrendszerek, mivel azok dinamikája és az általuk keltett gravitációs hullámok elméletében az egyes öszefüggések meghatározása adott feltételek mellett analitikusan is lehetséges. Azonban egy tipikus csillag-csillag kettős összeolvadásának leírása a közöttük zajló anyagtranszport miatt, illetve az egyes objektumok saját kvadrupól aszimmetriája miatt kisugárzott hullámoknak köszönhetően roppant nehézkes, ráadásul az ilyen rendszerek által keltett hullámok amplitudója túl kicsi, hogy a jelenleg rendelkezésre álló detektorokkal mérni lehessen.

Azonban kompakt objektumok (például fekete lyukak, vagy neutroncsillagok) alkotta kettősrendszerek esetében a közöttük zajló heves folyamatoknak köszönhetően már remélhető, hogy az összeolvadás során keltett hullámok elég nagy amplitudójúak a detektáláshoz. Az elméleti leírás szempontjából további előnye ezen rendszereknek, hogy az egyes objektumok aszimmetriájának hatása csak a közelítések magas rendjében releváns, illetve a közöttük zajló anyagtranszport elhanyagolható, vagy egyáltalán nincs. Éppen ezért az ezen források dinamikájának és az általuk keltett gravitációs hullámoknak a leírása a jelenkori elméleti kutatások egyik fő irányvonala.

Kompakt objektum alatt a továbbiakban lényegében neutroncsillagokat és fekete lyukakat értünk, illetve minden olyan további csillagászati objektumot, amelynek a tömege összemérhető a karakterisztikus méretével. Ez utóbbi megkötést szokás a kompakt objektumok definíciójának tekinteni. Az elmélet határmezsgyéjén megjelennek a fehér törpe – fehér törpe kettősrendszerek, mivel ezekre is nagyságrendileg fennáll a kompaktság feltétele. Ez különösen fontos a LISA projekt számára, mivel a tervek szerint a detektor kalibrációját a közeli fehér törpe – fehér törpe kettősök segítségével végzik majd el.

A kompakt objektumok kötött kettőseinek dinamikáját három fő szakaszra bonthatjuk. Az első szakaszban, amelyet közelítési vagy bespirálozási (angolul "inspiral") szakasznak nevezünk a két objektum a sugárzás hatására egyre kisebb sugarú, egyre kisebb excentricitású pályán közelít egymáshoz. Elméleti szempontból ezt a korszakot tudjuk egy adott sorfejtés segítségével analitikusan leírni elég nagy pontossággal. Fontos kiemelnem, hogy az objektumok kompaktságának következményei ebben a korszakban könnyítik meg a leginkább a leírást, hiszen a közeledés során a két test jól szeparáltnak tekinthető.

A közeledési korszakban kibocsátott hullámokat azok jellemző frekvenciája és alacsony amplitudója miatt várhatóan az űrbe telepített detektorrendszerek, elsőként a LISA lesz képes mérni.

A második korszak magának az összeolvadásnak a korszaka ("merger"), amikor a két, korábban különálló objektum lényegében összeolvad. Ebben az esetben olyan heves folyamatok játszódnak le, a téridő olyan gyors iramban és nagy amplitudóval változik, hogy a dinamika vizsgálatára eleddig csak számítógépes szimulációk állnak rendelkezésünkre.

Az összeolvadáskor kibocsátott hullámok mérését próbálják a Föld felszínén telelpített detektorokkal megvalósítani, mivel ezeknek az amplitudója elég nagy ahhoz, hogy reményünk legyen a földi környezetben halmozódó zajforrások kiszűrésére. Ezen kívül ezen detektorok mérete korlátozza a detektálható jelalak frekvenciáját is, a detektálható frekvencia pedig éppen az összeolvadási időszakra jellemző.

Az egyes jelek előrejelezhetőségét nagyban növeli, hogy a közeledési szakaszból az összeolvadási szakaszba történő átlépés környékén a sugárzás hatására csökkenő pályasugárnak köszönhetően a kettősrendszer jellegzetes, úgynevezett "chirp" jelalakot generál. Ennek segítségével könyebben beazonosítható egy kompakt ketősrendszer által kibocsátott hullámforma, és ezek után a rendszer iránya is könnyebben meghatározható. Ezt optikai megfigyelésekkel kiegészítve az irány meghatározásának hibája nagy mértékben csökken [10].

A kettősrendszer életének utolsó szakasza a lecsengő ("ringdown") szakasz, amikor a téridő fluktuációi lecsengenek, és a két objektum összeolvadása lényegében véget ér. A dinamika ezen szakaszát a fekete lyuk perturbációs technikák, kvázinormál módusok segítségével [11], illetve az összeolvadást modellező szimulációk végállapotaként vizsgálták.

A közeledési és lecsengő szakaszok dinamikájának minél pontosabb ismerete a LISA projekten túl további relevanciával bír, mivel a magát az összeolvadást modellező szimulációk számára fontos a kezdeti feltételek minél részletesebb, analitikus ismerete a paramétertér minél nagyobb tartományában.

A dolgozatban a kettősrendszer dinamikájának és a kisugárzott hullámoknak a leírását a közeledési szakaszban tárgyalom, mivel ebben a korszakban rendelkezünk a megfelelő analitikus, elméleti leírással. Ezt a leírást a poszt-newtoni források által keltett hullámok poszt-minkowski multipólsorfejtésének a kompakt kettősökre való alkalmazásával adjuk meg.

Mielőtt ennek részletes bemutatására rátérnék, meg kell említenem, hogy a gravitációs hullámok elméletének kiindulópontját, legalacsonyabb rendjét a kvadrupól-formalizmus jelenti. A jelenkori elméletek ennek általánosítását jelentik, lényegében a magasabb rendű effektusok és magasabb momentumok figyelembe vételével, és ezekkel szemben elvárás, hogy legalacsonyabb rendben megegyezzenek a kvadrupól-formalizmus eredményeivel.

Az egyes források poszt-newtoni leírásának lényege, hogy a közelítés érvényességi körében elhanyagolhatjuk az ultrarelativisztikus és extrém gravitációs effektusokat, vagyis az objektumok tipikus sebességének és a fénysebességnek a hányadosa elhanyagolható, illetve azonos nagyságrendbe esik a gravitációs potenciál dimenziótlan értékével. Lényegében ennek segítségével vezetjük be az $\epsilon \sim v^2/c^2 \sim GM/c^2r$ poszt-newtoni paramétert. Itt kell megjegyeznem, hogy a sorfejtésben a félegész poszt-newtoni rendű járulékok a formálisan az $1/c$ páratlan hatványait tartalmazó kifejezésekként lépnek fel. Kompakt kettősrendszerek esetén ilyen járulékokhoz vezet a testek forgása miatt fellépő spin-pálya kölcsönhatás és a sugárzási visszahatás is.

A gravitációs hullámok leírásakor a metrika perturbációit jellemző tenzort a gyenge tér közelítésen belül a poszt-minkowsi formális sorfejtés segítségével bontjuk fel [12]. Ennek a sorfejtésnek az az előnye, hogy ezen belül a detektálható hullámformának elkészíthető a multipólkifejtése [13].

A poszt-newtoni közelítés szempontjából a téridő két, jól elkülöníthető tartományra bomlik: a forrást magába foglaló belső, és az azon kívül lévő külső tartományokra. A hullámok posztminkowski elmélete szempontjából pedig elkülönül a közeli és a sugárzási zóna. A közeli zónában a tipikus méretskála elhanyagolható a hullámok jellemző hullámhosszához képest, a sugárzási zónában pedig összemérhető azzal.

A poszt-newtoni források által keltett hullámok leírásához szükséges, hogy a két felosztásnak legyen közös metszete, vagyis létezzen a külső közeli zóna, ugyanis a két elmélet ebben a tartományban illeszthető konzisztensen egymáshoz [14]. Ebben az esetben a multipólkifejtésben formálisan megjelennek $1/c$ hatványai, vagyis a két közelítő módszer rendről rendre összeegyeztethetővé válik. Lényegében a hullámok olyan kifejtésére jutunk, amelynek a momentumaiban a forrás energia-impulzus tenzorának poszt-newtoni alakja szerepel, vagyis a detektálható hullámformát a forrás dinamikájának figyelembe vételével határozhatjuk meg [15, 16, 17, 18].

A kompakt objektumok alkotta kettősök leírására a poszt-newtoni formalizmust alkalmazzuk. Ennek során a célunk olyan mozgásegyenletek megadása és megoldása, amely a két test mozgását relatív mennyiségekkel (szeparációs vektor, relatív sebesség és gyorsulás) fejezi ki. Ennek érdekében a metrika perturbációit ϵ hatványai szerint kifejtve az egyes objektumokra vonatkozó geodetikus egyenletet oldjuk meg rendről rendre. A módszer első lépésében ezen egyenlet alapján a relatív gyorsulásvektor alakját kapjuk meg, lényegében ez lesz a megoldandó mozgásegyenletünk [19, 20, 21, 22].

Kompakt kettősök esetén leggyakrabban a pontrészecske modellt alkalmazzuk, ami alól kivételt csak azok a munkák jelentenek, amelyek a testek forgását is figyelembe veszik [23, 24]. Ekkor ugyanis jól szeparált, mereven forgó, gömbszimmetrikus, ideális folyadékmodellt alkalmazunk az egyes objektumokra. A mozgás leírásában ez a tömegközéppont geodetikus egyenletésnek megoldására vezet, a forgás bevezetése a tömegközépponti rendszer definíciójában jelenik meg.

A forgás bevezetésekor azonban a forgást jellemző spinvektor alakjának megválasztásában mértékszabadságunk van [25]. Ennek feloldására, a spinvektor alakjának rögzítésére születtek meg a különböző SSC (spin supplementary condition) mértékválasztások [26, 27, 28, 29]. Ezek a mozgás leírásában lényegében különböző tömegközépponti rendszereket definiálnak, vagyis a tömegközéppontra vonatkozó geodetikus mozgásegyenlet, és ezzel a relatív gyorsulásvektor alakja különböző lesz.

A testek forgásának és az általa okozott effektusoknak a teljes leírásához a mozgásegyenleten kívül szükségünk van a spinvektorok dinamikáját leíró spinprecessziós egyenletekre is [30, 31, 32, 33, 34].

A mozgás leírásának poszt-newtoni sorfejtésében a legalacsonyabb rend a dinamika newtoni leírása. Ehhez képest vizsgáljuk az egyes effektusok relatív rendjét. A mozgás relativisztikusságának köszönhetően a newtoni rendhez minden egész poszt-newtoni rendben korrekciók járulnak. Ezeken kívül figyelembe kell vennünk a rendszerre jellemző további effektusok hatását is.

A testek forgása által generált spin-pálya kölcsönhatás 1,5 PN rendű korrekciót jelent, míg a két test forgásának spin-spin kölcsönhatása 2 PN rendűt. Szintén másodrendű effektus az egyik test kvadrupólmomentumának és a másik test monopólmomentumának kölcsönhatásából származó QM kölcsönhatás, illetve formálisan ide tartozik a két test elektromágneses dipól-dipól kölcsönhatásának járuléka is.

A kisugárzott gravitációs hullámok visszahatása a rendszer dinamikájára 2,5 PN és annál magasabb rendben jelenik meg a perturbációs képben a mozgásállandók változásán keresztül. Ezek a változások a pálya excentricitásának és méretének csökkenését eredményezik. Mivel a Földön telepített detektorok számára a mozgás és hullámforma 3-3,5 PN rendű megadása a cél, ezen felsorolásban meg kell említenem a becslések szerint 3,5 PN rendben megjelenő, az egyes kompakt objektumok alakjának kvadrupólmomentumából származó effektust is. Természetesen az egyre magasabb rendekben az itt felsorolt korrekciók szorzatai is megjelennek a leírásban.

A mozgásegyenletek megoldásának első lépése a két objektumot összekötő szeparációs vektor hosszára vonatkozó radiális egyenlet kiintegrálása. Excentrikus pálya esetén be kell vezetnünk a newtoni rendben érvényes kepleri pályaparaméterezés valamely általánosítását. Ennek segítségével impliciten meghatározható a szeparációs vektor hosszának periodikus változása, illetve a sugárzás hatására bekövetkező folyamatos csökkenése.

Körpálya határesetben a 2,5 PN sugárzási rendnél alacsonyabb rendben a pálya sugarát állandónak tekintjük, sugárzási, vagy annál magasabb rendben pedig a hullámok kibocsátásának következtében a rendszer energiát veszít, a pályasugár folyamatosan csökken. Ezt az esetet nevezzük kvázi-körpálya határesetnek.

A pálya paraméterezésével több kutatócsoport is foglalkozik, többféle módszer ismert a radiális egyenlet kiintegrálására. Ezen munkák ma már a spin-pálya és spin-spin kölcsönhatások figyelembe vételét is megcélozzák. A forgásmentes esetben ismert paraméterezések már a 3 PN rendű relativisztikus effektusokat is sikeresen leírják [35]. A testek forgását is figyelembe vevő legmagasabb rendű ismert pályaparaméterezés 3 PN rendig érvényes [36], azonban ez a spin-pálya kölcsönhatást csak a legalacsonyabb rendben tartalmazza, és a sugárzási visszahatást is elhanyagolták. Ennek fő oka, hogy a spin-pálya és spin-spin kölcsönhatások poszt-newtoni (2,5 és 3 PN rendű) korrekcióinak a relatív gyorsulásvektorhoz adandó, vagyis a mozgásegyenletekben megjelenő járulékai a legfrissebb kutatási eredmények közé tartoznak.

Egy másik, a munkám során fontos pályaparaméterezés a valódi anomália paraméterezés, amely a kepleri megoldás általánosítása. Ez a pályaleírás tartalmazza az 1 PN relativisztikus járulékokat, a spin-pálya és spin-spin kölcsönhatások korrekcióit, és a kvadrupól-monopól kölcsönhatást is [37, 38, 39, 40, 41].

Hasonló nagyságrendi különbségek jellemzik a mozgás szögfüggő részére vonatkozó mozgásegyenletek, vagyis a mozgás teljes leírásának az irodalomban szereplő eredményeit. Azonban a helyzetet ekkor tovább súlyosbítja, hogy míg a tisztán relativisztikus, illetve a sugárzási effektusok a pályasík tulajdonságait nem változtatják, addig a testek forgása összetett módon a pálya precesszióját okozza [42]. Tovább bonyolítja a helyzetet, hogy bár a spinvektorok hossza 2 PN rendig mozgásállandó, maga a spinvektor a pályasíkhoz hasonlóan precesszál, és ez a két effektus a spin-pálya kölcsönhatásban szorosan csatolódik egymáshoz.

Amíg a testek forgásának elhanyagolásával a dinamika leírása egyetlen szögmennyiség mozgásegyenletének megoldásával teljessé tehető, addig a forgás figyelembe vételével a spinvektorokat, a pályasíkot és a szeparációs vektor irányát jellemző szögmennyiségek csatolt differenciálegyenletrendszerét kell megoldanunk. Éppen ezen okokból kifolyólag, míg a tisztán relativisztikus poszt-newtoni effektusok figyelembe vételével a mozgás teljes leírása már 2-3 PN rendben ismert, ugyanez a testek forgását is figyelembe véve csak próbatest határesetben, 1,5 PN rendig adott [37, 43].

A detektálható gravitációs hullámok korábban említett multipólkifejtésének eredménye a metrika perturbációit leíró transzverzális spúrtalan tenzor alakja. Azonban ahhoz, hogy ezt a mért jelalakkal, vagyis a detektorok karhosszúságának változásával összefüggésbe hozhassuk, meg kell határoznunk a detektálható jelalak polarizációs állapotait. Lényegében maga a jelalak egyértelműen felbontható a "plusszos" és "keresztes" polarizációk lineárkombinációjaként.

Ezeket a polarizációs állapotokat a transzverzális spúrtalan tenzorból egy adott projekcióval számolhatjuk ki. A projekció elvégzéséhez szükség van a detektor és a forrás pályasíkjának a relatív helyzetét jellemző ortonormált vektortriádra. A triád első vektora a detektort és a forrás tömegközéppontját összekötő egyenes irányvektora, a második egy erre merőleges, a pálya síkjában fekvő egységvektor, a harmadik pedig ezek keresztszorzataként áll elő. Ez a vetítési eljárás köti össze a poszt-newtoni források által keltett poszt-minkowski multipólsorfejtés elméletét a detektorokban mérhető jelalakkal.

A gravitációs hullámok leírásával foglalkozó kutatások elsősorban a transzverzális spúrtalan tenzor alakjának meghatározását tűzik ki célul rendről rendre [44, 45, 46, 47, 48, 49] 2,5 PN rendig. A sugárzási rendben eddig csak a sugárzás legalacsonyabb rendű és annak spin-pálya korrekciójának alakját határozták meg [50]. Az általuk kiszámított eredmények formálisak abban az értelemben, hogy a rendszer dinamikájának jellemzőit (szeparációs vektor, relatív sebességvektor, az ortonormált vektortriád egyes komponensei, a spinvektorok) csak formálisan tartalmazzák, az ezekre vonatkozó mozgásegyenleteket nem integrálják ki.

Ezen munkák érvényességi körét is nagyban befolyásolja a testek forgásának figyelembe vétele, illetve elhanyagolása. A kutatások egyik irányának célkitűzése minél magasabb rendben megadni a transzverzális spúrtalan tenzor alakját, a másik irányvonal minél szélesebb körű leírásra törekszik, de ennek következtében ezek eredményei csak alacsonyabb rendben érvényesek.

Az egyik vagy mindkét test forgásának elhanyagolásával és körpályákat feltételezve már 3–3,5 PN rendben érvényes eredmények is születtek [51]. Ezek célja, hogy a jelenleg működő hullámdetektorok számára jóslatokat adjanak meg. A körpálya határeset vizsgálatát az indokolja, hogy közvetlenül az összeolvadási szakasz előtt általában elhanyagolhatóvá válik a pálya excentricitása. Azonban ebben az esetben a forrás pontrészecske kettős modellje miatt 3 PN, és annál magasabb rendben különböző regularizációs eljárásokat kell alkalmazni a fellépő divergenciák kezelésére [52, 53].

A kutatások másik irányvonala a testek forgását is figyelembe veszi, és a forrást jól szeparált, mereven forgó, gömbszimmetrikus objektumok kettősének tekinti, és a leírás alkalmazható excentrikus pályák esetére is. Ebben az esetben adottak a relativisztikus poszt-newtoni korrekciók 2 PN rendig, a spin-pálya kölcsönhatás járulékai 1–1,5 PN rendben, illetve a spin-pálya kölcsönhatás 2 PN rendben [48, 54, 55, 56].

Meg kell említenem, hogy külön kutatási irányvonalat jelent a perturbációkat leíró tenzor magasabb hatványaival jellemezhető korrekciók vizsgálata. Ezek közül a legalacsonyabb rendű, 1,5 PN rendben fellépő faroktag leírása a legszélesebb körben tárgyalt effektus [57, 58, 59]. A következő kvadratikus effektus a 2,5 PN rendű [60], a kvadrupólsugárzás négyzetét tartalmazó memóriaintegrál, azt követi 3 PN rendben a faroktag farokjáruléka [61].

A detektálható jelalakot, illetve annak polarizációs állapotait a legszélesebb körben a testek forgásának és a pálya excentrikusságának elhanyagolásával határozzák meg, 3,5 PN rendig [17]. Megengedve a pálya excentrikusságát, felhasználva az adott rendben érvényes paraméterezést a legteljesebb vizsgálat a [62] és [63] cikkekben található, az ezekben közölt eredmények 2 PN rendig érvényesek, azonban a testek forgását ők is elhanyagolták. Mivel a spin-pálya kölcsönhatás a pálya precesszióját okozza, a pályasíkhoz kötött projekció elvégzése a testek forgásának figyelembe vételével még bonyolultabbá teszi a leírást [64].

A kompakt kettősrendszerek poszt-newtoni elméletének harmadik fő irányvonala a sugárzásnak a pályaelemekre gyakorolt hatása. Az effektus 2,5 PN rend fölött több, különböző hatást is gyakorol a kettősrendszer mozgására.

A sugárzási visszahatás közvetlenül az egyes mozgásállandók értékének változását okozza [37, 38, 39, 65, 66]. A magasabb rendű perturbációktól eltekintve lényegében a rendszer energiája és impulzusmomentuma folyamatosan csökken. Természetesen a magasabb PN rendű korrekciók a sugárzási visszahatásban is okozhatnak periodikus, vagy éppen növekvő járulékokat, de ezek elhanyagolhatóak a mozgásállandók csökkenésének üteméhez képest. A mozgásállandók sugárzási veszteségeit a testek forgásának elhanyagolásával egészen 5,5–6 PN rendig leírták már, a spin-pálya kölcsönhatást figyelembe véve pedig 4 PN rendig.

Ezeknek a sugárzási veszteségeknek fontos következménye a pálya alakjának folyamatos változása. Az excentrikus pályák esetén kimutatták, hogy a sugárzás hatására a pálya excentricitása csökken [67, 68]. Éppen ezért szokták az összeolvadás időszakának megközelítését célzó kutatásokban a körpálya határesetet vizsgálni, mivel a legtöbb esetben addigra a sugárzás hatására lényegében körpálya alakul ki. Megmutatták azonban azt is, hogy elképzelhetők olyan fizikai rendszerek, ahol a pálya cirkularizációja nem elég gyors ahhoz, hogy az összeolvadásig a pálya excentricitása elhanyagolható legyen.

Excentrikus pályák és körpályák esetén is belátható, hogy a rendszer energia- és impulzusmomentum vesztése a pályasugár, illetve excentrikus esetben a pálya kis és nagytengelyének csökkenését okozza. Ennek során a testek mozgása felgyorsul, és a gravitációs potenciál abszolútértéke is megnő, vagyis a poszt-newtoni közelítés elveszíti érvényességi körét. Körpályák esetében a közelítés érvényessége határának a legbelső stabil körpálya elérését szokták tekinteni.

Azonban ennek a folyamatnak van egy komoly következménye a poszt-newtoni elméletben. A csökkenő pályasugárnak és a növekvő relatív sebességnek köszönhetően maga a poszt-newtoni paraméter is változik, amíg el nem éri a becslések alapján meghatározott $\epsilon \sim 1/100, 1/10$ határértéket. Ezen túl a poszt-newtoni formalizmus nem alkalmazható.

Mivel sugárzási rendben az ϵ paraméter az idő függvényében változik, az esetenként kirótt egyéb feltételekkel ez nehezen összeegyeztethető. Például az extrém tömegarány esetében a tömegek hányadosának elhanyagolásakor fontos kérdés, hogy azt a poszt-newtoni paraméter mely értékével meghatározott rendekhez képest hanyagoljuk el.

A sugárzási rendnél alacsonyabb rendű, vagyis legfeljebb 2 PN rendű munkák során az ϵ paraméter állandónak tekinthető, de mivel értéke tetszőlegesen választható, a fenti probléma ezesetben is fennáll, és ekkor a poszt-newtoni közelítés adott rendű eredményei sem a teljes közeledési szakaszra érvényesek. Az elvárás az, hogy néhány ezer, néhány tízezer körülfordulás erejéig legyenek igazak az eredmények. Ezután a következő időszakban ϵ-nak új értéket kell választani.

A sugárzás hatásainak figyelembe vételével a poszt-newtoni források és az általuk keltett hullámok leírása teljessé válik, és az összefüggések korrekciói tetszőleges rendben meghatározhatóak.

A jelen dolgozatban bemutatott kutatás célkitűzése egy kompakt objektumok alkotta kettősrendszer által kisugárzott gravitációs hullámok analitikus leírása 1,5 PN rendben, figyelembe véve a testek forgásából adódó spin-pálya kölcsönhatást és a pálya excentrikusságát.

A dolgozatban két fizikai rendszer vizsgálatát mutatom be, az első egy nagy tömegű forgó objektum körül keringő próbatest esete, míg a másik a két, tetszőleges tömegű, forgó objektum alkotta kettősrendszeré.

A próbatest esetben a mozgás leírásának Lense-Thirring közelítését használtam, amelynek előnye, hogy a szögekre vonatkozó differenciálegyenletek is adottak. A leírás alapját képezi, és további egyszerűsödést jelent, hogy ebben az esetben a spinvektor precessziója elhanyagolható. A detektálható hullámforma polarizációs állapotait először ebben a határesetben határoztam meg.

A tetszőleges tömegű, forgó testek esetén először a mozgás leírását kellett kiegészítenem a spinprecessziós egyenletek megoldásával, és a szögegyenletek meghatározásával, kiintegrálásával. Csak ezután térhettem rá a polarizációs állapotok meghatározására, és a detektálható hullámforma vizsgálatára.

Mindkét fizikai rendszer esetében megvizsgáltam a forgásmentes és körpálya határeseteket, ezáltal feltárva a testek forgása és a pálya excentrikussága által okozott effektusokat. A mozgásegyenleteket excentrikus pályák esetén a valódi anomália paraméterezéssel, míg körpálya határesetben idő szerint integráltam ki, és ezek alapján határoztam meg a polarizációs állapotok alakját. Megvizsgáltam továbbá, hogy az általános esetből milyen megkötésekkel lehet levezetni a próbatest eset eredményeit.

A dolgozat első, bevezető fejezete után a második fejezetben röviden összefoglalom, hogy az általános relativitáselmélet gyenge tér közelítéséből kiindulva hogyan alkotható meg a poszt-newtoni források által kibocsátott hullámok elmélete és azzal hogyan számíthatóak ki a detektálható jelalak polarizációs állapotai.

Ehhez először röviden bemutatom a gravitációs hullámok elméletének és mérésének alapjait, és definiálom a polarizációs állapotokat. Ezután a poszt-newtoni források által keltett hullámok elméletének részeként meghatározom a forrás dinamikája poszt-newtoni leírásának alapjait, majd a hullámok poszt-minkowski közelítését, és a hullámformák multipólkifejtését mutatom be. A két módszer a külső közeli zónában illeszthető, és ezen illesztés eredménye a hullámok olyan elmélete, melyben a forrás poszt-newtoni dinamikája közvetlenül megjelenik.

A harmadik fejezetben bemutatom, hogy a hullámok második fejezetben adott leírása hogyan alkalmazható kompakt kettősrendszerek esetére.

Ennek első lépéseként megadom a kompakt kettősrendszerek definícióját, és mivel a testek forgása által keltett effektusok hatásait szeretném vizsgálni, leírom, hogy a spinvektorok hogyan vezethetők be a kettősrendszerek poszt-newtoni elméletébe. Ezek után a kettősrendszerek dinamikáját leíró mozgásegyenletek, és az általam használt valódi anomália pályaparaméterezés bemutatása következik az általános és a nagy tömegű, forgó objektum körül keringő próbatest esetében is. A fejezet végén összegyűjtöm a metrika perturbációit leíró transzverzális spúrtalan tenzor munkám alapját képező, 1,5 PN rendben érvényes kifejezéseit rendről rendre.

A negyedik fejezet tartalmazza a kutatásaim eredményeit a próbatest esetben, a rendszer Lense-Thirring leírását alkalmazva [69, 70, 71, 72].

A mozgásegyenleteknek a valódi anomália paraméterezéssel történő kiintegrálása után megadom a detektálható hullámalak meghatározásának módszerét. A módszer lépéseit követve, és a mozgás leírását felhasználva kiszámítom a polarizációs állapotok paraméterfüggésének szerkezetét. Ugyanezen lépéseket végigkövetem a körpálya határesetben is.

Az ötödik fejezetben foglalom össze a tetszőleges tömegű, forgó objektumok kettőse esetében elért eredményeimet [73, 74, 75].

Ezesetben a spinprecessziós egyenletek legalacsonyabb rendű megoldásával, és a mozgás szögváltozóira vonatkozó differenciálegyenletek kiszámításával kezdem a leírást. A mozgásegyenletek így már teljes rendszerét a valódi anomália paraméterezéssel kiintegrálom. Ezután térek rá a polarizációs állapotok kiszámítására, először a módszer bemutatásával, majd a mozgás valódi anomália paraméterrel adott leírását felhasználva meghatározom a gravitációs hullámforma paraméterfüggését. A fenti eredmények körpálya határesetre való alkalmazása után a saját eredményeim bemutatását a próbatest és az általános eset összhasonlításával zárom.

A záró fejezetben röviden összefoglalom a dolgozatban bemutatott eredményeket, és a detektálható hullámforma alakjára vonatkozó elemzés főbb pontjait. Végezetül bemutatom, hogy a dolgozatban szereplő eredmények alapján milyen további célkitűzésekkel folytatható a kettősrendszerek dinamikájának és az általuk keltett, detektálható hullámformáknak a vizsgálata.

2. Gravitációs hullámok poszt-newtoni leírása

Ezen fejezetben rövid leírást adok a poszt-newtoni források által keltett gravitációs hullámok leírásának elméletéről. Ennek első lépéseként bemutatom az Einstein-egyenletek gyenge tér közelítésben felírható hullámegyenlet alakját az elmélet sugárzási mértékében. Második lépésként bevezetem a transzverzális spúrtalan mértéket, illetve bemutatom, hogy az abban fellépő két, lineárisan független polarizációs állapot segítségével hogyan mérjük az interferometrikus detektorokkal a hullámformákat.

Ezek után bemutatom a poszt-newtoni közelítés alapjait, és az ennek segítségével definiált rekurzív módszert, mellyel a poszt-newtoni források dinamikáját írjuk le. Majd röviden bemutatom az úgynevezett kvadrupólformalizmust, mely a keltett gravitációs hullámok leírásának legalacsonyabb rendjét szolgáltatja. A detektálható hullámok leírására egy ennél általánosabb, úgynevezett poszt-minkowski közelítést alkalmazzuk, amelynek eredményeit a poszt-newtoni forráshoz közeli zónában illeszthetjük a forrás dinamikája által keltett metrikaperturbációkhoz. A két közelítés illesztésének eredménye a detektálható hullámformák egy olyan multipólsorfejtése, melyben az egyes momentumokat a poszt-newtoni forrás dinamikájának tulajdonságaiból számíthatjuk ki.

2.1. Gyenge gravitációs hullámok és mérésük

Az általános relativitáselmélet dinamikai egyenletei az Einstein-egyenletek

$$G^{\alpha\beta}[g, \partial g, \partial^2 g] = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta} \ , \tag{2.1}$$

melyek leírják, hogy milyen kapcsolat áll fenn a téridő geometriája (ezt a g metrikus tenzorral fejezzük ki) és a téridőn található anyag (ezt a $T^{\alpha\beta}$ energia-impulzus tenzor írja le) között [1, 2]. $G^{\alpha\beta}$ az Einstein-tenzor, amely a görbületet leíró Riemann-tenzor kontrakcióinak kombinációjával definiálható

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \ . \tag{2.2}$$

A továbbiakban ezen egyenletek adott feltételek melletti közelítő megoldásával foglalkozunk.

2.1.1. A gyenge tér közelítés és a hullámegyenlet

A gravitációs hullámok elméletében általánosan elterjedt és széles körben alkalmazott analitikus módszerekkel csak a gyenge hullámok esetében rendelkezünk. Ezen elméletek alapja a gyenge tér közelítés, és a Földön detektálható hullámok leírásakor ebben a közelítésben oldjuk meg az Einstein-egyenleteket. A közelítés lényege, hogy a sík téridő Minkowski metrikája körüli perturbációként írjuk le a téridő dinamikáját, vagyis a metrikus tenzor

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} + h'^{\alpha\beta} \tag{2.3}$$

alakú, ahol $\eta^{\alpha\beta} = diag(-1, 1, 1, 1)$ a Minkowski-metrika, és h' írja le a metrika perturbációit.

A perturbációkat leíró h' tenzor megválasztásában nagyfokú mértékszabadság van, ez lehetőséget ad arra, hogy a metrika perturbációit annak a sugárzás leírására leginkább alkalmas formájában adhassuk meg.

Az Einstein-egyenletek egyszerűsítése céljából a metrika perturbációit leíró tenzort

$$h^{\alpha\beta} = h'^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h' \tag{2.4}$$

alakban újradefiniáljuk. Az eredetileg bevezetett $h'^{\alpha\beta}$ tenzoron elvégezve egy

$$h'^{\alpha\beta} \to h'^{\alpha\beta} + \partial^\alpha\xi^\beta + \partial^\beta\xi^\alpha \tag{2.5}$$

mértéktranszformációt elérhető, hogy $h^{\mu\nu}$-re teljesüljön a

$$\partial_\mu h^{\alpha\mu} = 0 \tag{2.6}$$

feltétel. Ezen feltételt megőrizve további mértékrögzítéssel élhetünk, amennyiben a mértéktranszformációt leíró ξ vektor kielégíti a

$$\partial_\mu\partial^\mu\xi^\alpha = 0 \tag{2.7}$$

feltételt. Egy ilyen mértékválasztással elérhető, hogy a $h'^{\alpha\beta}$ tenzor h'^{0i} $(i = 1, 2, 3)$ komponensei és h' determinánsa zérusak legyenek, vagyis ekkor $h'^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta}$. Ezt a mértékrögzítést nevezzük sugárzási mértéknek. A további, megmaradt mértékszabadság felhasználásával elérhető még, hogy $h^{0\alpha} = 0$ legyen. A sugárzási mérték bevezetésének részletesebb tárgyalását lásd [76].

Az Einstein-egyenletek hullámegyenlet alakja. A gyenge tér közelítést alkalmazva a sugárzási mértékben a (2.1) Einstein-egyenletek a

$$\partial_\mu\partial^\mu h^{\alpha\beta} = \frac{16\pi G}{c^4}\tau^{\alpha\beta} \ , \tag{2.8}$$

hullámegyenlet alakba írhatóak, ahol a ∂_μ az x^μ koordináta szerinti parciális deriválást jelöli. Az egyenlet jobb oldalán szerepelnek a magasabb rendű perturbációk, illetve az energia-impulzus tenzor járuléka, vagyis

$$\tau^{\alpha\beta} = |g|T^{\alpha\beta} + \frac{c^4}{16\pi G}\Lambda^{\alpha\beta} \ , \tag{2.9}$$

ahol a magasabb rendű perturbációkat tartalmazó $\Lambda^{\alpha\beta}$-t formálisan

$$\Lambda^{\alpha\beta} = N^{\alpha\beta}[h,h] + M^{\alpha\beta}[h,h,h] + L^{\alpha\beta}[h,h,h,h] + O(h^5) \tag{2.10}$$

alakban bonthatjuk fel.

Az általános relativitáselméletben a (2.1) egyenletrendszer fontos következménye, hogy az energia-impulzus tenzor kovariánsan divergenciamentes. Sugárzási mértékben ezen elvárás teljesülését a

$$\partial_\mu \tau^{\alpha\mu} = 0 \tag{2.11}$$

feltétel egyértelműen biztosítja.

2.1.2. A gravitációs hullámok mérésének alapjai

A transzverzális spúrtalan (TT) mérték. A zérus tömegű rendszerek leírásakor (ilyenek a gravitációs hullámok is) a nagyfokú mértékszabadság lehetővé teszi, hogy még további megszorításokkal éljünk a perturbációt leíró tenzor alakjára vonatkozóan. Lényegében az ilyen rendszerek két, egymástól lineárisan független komponenssel írhatók le. Egy maximális mértékrögzítés a transzverzális-spúrtalan mérték választása, amelyben a

$$h^{0\alpha}_{TT} = 0 \tag{2.12}$$

komponensek zérus értékűek, és a tenzor térszerű komponensei a

$$h^{ij}_{TT} = \mathcal{P}^{ijkl} h_{kl} \tag{2.13}$$

projekcióval adhatóak meg, ahol

$$\mathcal{P}_{ijkl} = P_{il}P_{jk} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl} \ , \tag{2.14}$$

illetve

$$P_{ij} = \delta_{ij} - N_i N_j \ , \tag{2.15}$$

ahol **N** a forrást és a detektort összekötő egyenes (line of sight) irányvektora. Ebben a mértékben a perturbáló tenzor spúrja zérus, és csak a transzverzális (adott **N**-re merőleges) komponensei nem zérusok. Ezzel a projekcióval a mértéket teljesen lerögzítjük, a perturbációt leíró tenzor alakjának megválasztásában további szabadságunk nincs.

A detektálható hullámformát a forrás és a detektor nagy távolsága miatt lényegében síkhullámokként írjuk le. A TT mértékrögzítésben, mivel a projekciót egy adott **N** vektorral adjuk meg, ezt a feltevést vesszük figyelembe.

A TT mértékválasztás előnye, hogy közvetlen kapcsolat van a mérhető jelalak polarizációs állapotai és a tenzor nem zérus komponensei között. Amennyiben a sugárzás a választott koordinátarendszer z tengelyének irányában terjed, akkor a h_{ij}^{TT} tenzornak csak a h_{xx}^{TT}, h_{xy}^{TT} és h_{yy}^{TT} komponensei nem zérusok, és

$$h_{xx}^{TT} = -h_{yy}^{TT} = h_+ \ , \qquad h_{xy}^{TT} = h_\times \ , \tag{2.16}$$

ahol h_+ és $h_\times$ a két, lineárisan független metrikakomponens, az úgynevezett "plusszos" és "keresztes" polarizációs állapotok.

A gravitációs hullámok mérése. Az alábbiakban elsősorban a interferometrikus mérési eljárás alapjait ismertetem, mivel ezzel az eljárással közvetlenül észlelhetjük a metrikus tenzor perturbációit (illetve a h_+ és $h_\times$ polarizációs állapotok lineárkombinációit). A mérési eljárás alapja egy olyan interferométer, mellyel mérhetjük a karok relatív megnyúlásának különbségét.

Hogy a karok hosszának relatív változásait elméleti úton leírhassuk, meg kell vizsgálnunk két nyugvó részecske közötti távolságnak a perturbációk által okozott megváltozását. Feltéve, hogy a két részecske konstans koordinátapontokban vannak, vagyis az egyik részecske az origóban, a másik az $x = \epsilon$, $y = z = 0$ pontban található, a kettejük közti távolság

$$l = \int |g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta|^{\frac{1}{2}} = \int_0^\epsilon |g_{xx}|^{\frac{1}{2}} \simeq \sqrt{g_{xx}(x=0)}\epsilon \simeq \left[1 + \frac{1}{2} h_+(x=0)\right] \epsilon \ . \tag{2.17}$$

Bár a részecskék rögzített koordinátapontokban vannak, mivel $h_+(x = 0)$ általában nem állandó, a gravitációs hullám áthaladtakor ez a közöttük lévő távolság Δl-el változik, és ekkor a $h(t)$ mért jelalakot a

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{h(t)}{2} \tag{2.18}$$

összefüggéssel definiálhatjuk.

Ennél precízebben a geodetikus deviáció segítségével írhatjuk le a fenti jelenséget. A geodetikus deviáció egyenlete megadja két, geodetikus görbén mozgó pontot összekötő ξ^α vektor változását. Az egyenletet a geodetikusok mentén parallel elterjesztett bázisban felírva a

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial t^2} = R^\alpha_{\mu\nu\rho} U^\mu U^\nu \xi^\rho \ , \tag{2.19}$$

összefüggésre jutunk, ahol U^μ a részecskék négyessebessége, és $R^\alpha_{\mu\nu\rho}$ a Riemann-tenzor. Mivel kezdetben a két részecske nyugszik, feltesszük, hogy $U^\mu = (1,0,0,0)$, illetve $\xi^\alpha = (0,\epsilon,0,0)$. Ekkor a deviáció egyenlete ξ egyes komponenseire

$$\frac{\partial^2 \xi^x}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\epsilon \frac{\partial^2 h_+}{\partial t^2} \ , \qquad \frac{\partial^2 \xi^y}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\epsilon \frac{\partial^2 h_\times}{\partial t^2} \tag{2.20}$$

alakot ölt. Ha kezdeti feltételként $\xi^\alpha = (0,0,\epsilon,0)$-t választunk, hasonló eredményre jutunk

$$\frac{\partial^2 \xi^x}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\epsilon \frac{\partial^2 h_\times}{\partial t^2} \ , \qquad \frac{\partial^2 \xi^y}{\partial t^2} = -\frac{1}{2}\epsilon \frac{\partial^2 h_+}{\partial t^2} \ . \tag{2.21}$$

A h_+ és $h_\times$ polarizációs állapotok. A h_+ és $h_\times$ polarizációs állapotok hatásának vizsgálatához tekintsük a fenti eredményeket próbatestek gyűrűje esetén, vagyis vizsgáljuk azon pontok geodetikus elhajlását, melyek közül az egyik az origóban, a másik az $(\epsilon\cos\theta, \epsilon\sin\theta, 0)$ pontban található. Ekkor a hullám a z tengely irányában terjed, és

$$\frac{\partial^2 \xi^x}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\epsilon\cos\theta \frac{\partial^2 h_+}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\epsilon\sin\theta \frac{\partial^2 h_\times}{\partial t^2} \ , \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial^2 \xi^y}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\epsilon\cos\theta \frac{\partial^2 h_\times}{\partial t^2} - \frac{1}{2}\epsilon\sin\theta \frac{\partial^2 h_+}{\partial t^2} \ . \tag{2.23}$$

Ezen egyenletek megoldásaiból meghatározhatjuk a metrika perturbációinak hatását a próbatestek ezen gyűrűjére. Ezen megoldások két speciális esete igazán érdekes, mivel ha $h_\times = 0$, megkapjuk a h_+ polarizációs állapot hatását, és viszont. A fenti egyenletek alapján látható, hogy a h_+ polarizációs állapot a próbatestek gyűrűjét az x és y tengelyek mentén nyújtja vagy lapítja meg, míg a $h_\times$ polarizáció ehhez képest 45°-os szögben. Erről kapta h_+ a "plusszos", $h_\times$ pedig a "keresztes" jelzőt.

Általános esetben a mérési elrendezés geometriája ennél bonyolultabb, de a (2.18) egyenlettel definiált $h(t)$ detektálható jelalak minden esetben egyértelműen felbontható a fentiekben bemutatott h_+ "plusszos" és $h_\times$ "keresztes" polarizációs állapotokra

$$h(t) = F_+(\alpha,\beta,\xi)h_+(t) + F_\times(\alpha,\beta,\xi)h_\times(t)\ , \tag{2.24}$$

ahol az F_+ és $F_\times$ együtthatófüggvények (detector beam-pattern functions) a detektor és a forrás relatív helyzetétől függnek az alábbi módon

$$F_+ \;=\; \frac{1}{2}(1+\cos\alpha^2)\cos 2\beta\cos 2\xi + \cos\alpha\sin 2\beta\sin 2\xi\ , \tag{2.25}$$

$$F_\times \;=\; -\frac{1}{2}(1+\cos\alpha^2)\cos 2\beta\sin 2\xi + \cos\alpha\sin 2\beta\cos 2\xi\ , \tag{2.26}$$

ahol α és β a forrás helyének polárkoordinátái, ξ pedig a polarizációs szög.

A polarizációs állapotokat egy projekcióval számolhatjuk ki a perturbáló tenzor TT mértékbeli alakjából,

$$h_+ = P_{+ij}h^{ij}_{TT}\ , \quad h_\times = P_{\times ij}h^{ij}_{TT}\ . \tag{2.27}$$

A projektorokat a forrás és a detektor relatív helyzetét leíró $\mathbf{N}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ ortonormált vektortriáddal határozhatjuk meg

$$P_{+ij} = \frac{1}{2}(p_ip_j - q_iq_j) \quad , \quad P_{\times ij} = \frac{1}{2}(p_iq_j + q_ip_j)\ , \tag{2.28}$$

ahol $\mathbf{N}$ a már említett "line of sight" irányvektora, a $\mathbf{p}$ vektor a pályasíkban fekszik és merőleges $\mathbf{N}$-re, valamint $\mathbf{q} = \mathbf{N}\times\mathbf{p}$.

2.2. Poszt-newtoni források által keltett gravitációs hullámok

A különböző források által keltett hullámok jelalakjának analitikus vizsgálatában a legsikeresebbek a poszt-newtoni sorfejtéssel leírható források keltette hullámok elmélete. Ezen hullámok elméletében a téridőnek három tartományát kell elkülönítenünk egymástól a forrás posztnewtoni leírásának és a hullámok poszt-minkowski multipólkifejtésének illesztéséhez.

A poszt-newtoni formalizmusban a (2.8) Einstein-egyenletek megoldását keressük a forráson belül ($r < a$, a a forrás karakterisztikus mérete), vagyis az energia-impulzus tenzor tartóján

— ezt nevezzük belső tartománynak —, illetve azon kívül ($r > a$) — az úgynevezett külső tartományban.

A gravitációs hullámok tekintetében a forrástól való karakterisztikus távolság és a hullámhossz viszonya osztja két részre a téridőt, az úgynevezett közeli zónára ($r \sim \lambda$), illetve a távoli, vagy sugárzási zónára ($r \gg \lambda$).

A kettőt összevetve poszt-newtoni források esetén a kisugárzott hullámok leírásához a téridőt három, jól elkülönülő tartományra oszthatjuk: a forrás belső tartományára, a külső közeli, illetve a sugárzási tartományokra. A két elmélet illesztését a külső, közeli tartományban végezzük el, annak létezése feltétele az elmélet alkalmazhatóságának.

Ezek alapján a (2.8) és (2.6) egyenleteket az alábbi feltételek mellett kívánjuk megoldani:

1. A külső tartományban a (2.11) feltétel alapján

$$r > a : \quad \partial_\mu \Lambda^{\alpha\mu} = 0 \ . \tag{2.29}$$

2. A forrást jellemző energia-impulzus tenzorról feltételezzük, hogy kompakt tartójú és sima, vagyis $T^{\alpha\beta} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$.

3. A forrás dinamikája leírható a poszt-newtoni közelítéssel, vagyis létezik

$$\epsilon = max \left\{ \left| \frac{T^{0i}}{T^{00}} \right|^2 , \left| \frac{T^{ij}}{T^{00}} \right| , \left| \frac{GM}{ac^2} \right| \right\} \ , \tag{2.30}$$

   ezt tekintjük majd a sorfejtés során poszt-newtoni paraméternek. A fenti kifejezésben $T^{0i}/T^{00} = v^i/c$, M a forrás tömege, a annak kiterjedése, a T^{ij}/T^{00} hányados pedig a feszültségtenzor sűrűséghez viszonyított értéke. Vagyis lényegében a poszt-newtoni sorfejtés a forrást alkotó objektumok közelítő leírása kis sebesség és gravitációs potenciál mellett.

4. A téridő egy adott $\mathcal{T}$ időpont előtt sztatikus

$$t \leq \mathcal{T} : \quad \frac{\partial}{\partial t}[h^{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t)] = 0 \ . \tag{2.31}$$

   Ez a feltétel aszimptotikusan, vagyis $t \to -\infty$ esetben megegyezik az úgynevezett "no-incoming radiation" feltétellel, mely szerint a téridő $\mathscr{J}^-$ múltbeli fényszerű határáról nem érkezik sugárzás a rendszerbe. Azonban az általunk alkalmazott feltevés ennél erősebb, a téridő stacionaritását nem csak aszimptotikusan kötjük ki.

2.2.1. A poszt-newtoni közelítés

Olyan forrás esetén, amely teljesíti a fenti, 3. feltételt, alkalmazhatjuk a poszt-newtoni közelítést, amelyben lényegében elhanyagoljuk a nagy sebességekből származó ultrarelativisztikus, és az extrém görbület által okozott erős gravitációs effektusokat.

A poszt-newtoni közelítés, mint sorfejtés. Ez a közelítés lehetővé teszi egy olyan rekurzív módszer megalkotását, ahol rendről rendre, az Einstein-egyenletek egyre pontosabb megoldását kaphatjuk a poszt-newtoni közelítés érvényességi körében. A módszer részletes bemutatása a forrás típusának megkötése nélkül Weinberg [77] könyvében található.

A közelítés legalacsonyabb rendje a vizsgált rendszer newtoni elmélete, és ebben a rendben a rendszer tipikus sebesség, méret és tömeg-paraméterei között nagyságrendileg fennáll a

$$\frac{v^2}{c^2} \sim \frac{GM}{ac^2} \tag{2.32}$$

arányosság, amely lehetőséget ad arra, hogy a közelítés mindkét lényeges elemét egyetlen paraméterrel írjuk le, ez lesz a továbbiakban a formális poszt-newtoni paraméter, amely $\epsilon = v^2/c^2$. Magát a sorfejtést ezen paraméter szerint végezzük el. Meg kell jegyezzem, hogy bizonyos esetekben a perturbációt leíró formulában felléphet $1/c$ páratlan hatványa is. A poszt-newtoni paraméter definíciójából adódóan az ilyen esetekben félegész poszt-newtoni rendű járulékok írják le a perturbációt. Például kettősrendszerek esetén félegész poszt-newtoni rendben írható le a testek forgása által okozott spin-pálya kölcsönhatás, és a sugárzási visszahatás is.

Azonban a rendek elkülönítésének a módszere csak formális, mivel a sorfejtés ϵ paramétere a gravitációs sugárzás hatására változik. Ennek oka, hogy a sugárzás hatására a mozgásállandók veszteséget szenvednek, így egyre csökken a pálya karakterisztikus mérete, vagyis excentrikus pálya esetén annak kis- és nagytengelye, körpálya esetben pedig a pálya sugara. Eközben az egyes testek egyre gyorsabban mozognak, és egyre közelebb kerülnek egymáshoz, vagyis a gravitációs potenciál értéke is növekszik. Emiatt az ϵ paraméter értéke is folyamatosan növekszik, amíg el nem éri azt az értéket, ahol a poszt-newtoni közelítés már érvényét veszti.

A különböző források esetében ez a határérték más és más. Kompakt kettősök esetén a rendszer $\epsilon \sim 1/100 - 1/10$ körül éri el az elmélet az érvényesség határát. Körpálya határesetben, illetve a sugárzás hatására cirkularizálódó pályák esetén ϵ ezen értéke egybeesik a legbelső stabil körpálya elérésével.

További nehézséget hordoz, hogy az adott forrásra kirótt egyéb fizikai megkötések (például ilyen egy kettősrendszer esetében a próbatest közelítés) néha nehezen összeegyeztethetők a poszt-newtoni módszer időtől függő paraméterrel leírt sorfejtésével. A kompakt kettősrendszerek esetében a 2,5 PN sugárzási rendnél alacsonyabb rendű eredményekkel szemben éppen ezért elvárás, hogy azok adott ϵ értéknél néhány ezer, néhány tízezer pályaperiódusig legyenek érvényesek. Ezen idő elteltével új, az aktuális pályasugárnak és sebességnek megfelelő értéket kell választani a poszt-newtoni paraméternek.

Mivel munkám során legfeljebb 1,5 PN rendű effektusokat vizsgáltam, a poszt-newtoni sorfejtés ϵ paramétere pedig csak 2,5 PN rendben változik a sugárzás hatásának köszönhetően, azt lényegében konstansnak tekintettem, így lehetővé vált az egyéb közelítésekkel való konzisztens összehangolás.

Az egyes források poszt-newtoni leírása során a

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \tag{2.33}$$

geodetikus mozgásegyenlet sorfejtett alakját, illetve annak megoldását keressük rendről rendre. Az egyenletben szereplő Christoffel-szimbólumok megadásához azonban szükségünk van az Einstein-egyenletek megoldására is. A geodetikus egyenlet megoldását azonban nem a sajátidő, hanem a háttér Minkowski téridő időkoordinátájának függvényében keressük, vagyis lényegében a

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-1}\frac{d}{d\tau}\left[\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-1}\frac{dx^i}{d\tau}\right] = -\Gamma^i_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt} + \Gamma^0_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt}\frac{dx^i}{dt} \tag{2.34}$$

mozgásegyenlet megoldásait kívánjuk meghatározni.

Ehhez a metrikus tenzor komponenseit az alábbi módon bontjuk fel

$$g_{00} = -1 + g^{(2)}_{00} + g^{(4)}_{00} + ... \tag{2.35}$$

$$g_{i0} = g^{(3)}_{i0} + g^{(5)}_{i0} + ... \tag{2.36}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + g^{(2)}_{ij} + g^{(4)}_{ij} + ... \tag{2.37}$$

ahol minden $g^{(\mathcal{N})}_{\mu\nu}$ egy $v^{\mathcal{N}}/c^{\mathcal{N}}$ rendű kifejezés, vagyis $1/2\mathcal{N}$ PN rendű. Felhasználva a Christoffel-szimbólumokat meghatározó

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho}\right) \tag{2.38}$$

egyenletet, kiszámíthatjuk az Einstein-egyenletekben szereplő

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\eta_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\eta\lambda} \tag{2.39}$$

Ricci-tenzor komponenseit, illetve a metrikáéhoz hasonló felbontását, ahol minden $R_{\mu\nu}^{(\mathcal{N})}$ egy $v^{\mathcal{N}}/c^{\mathcal{N}}r^2$ rendű kifejezés. Hogy a (2.1) egyenleteket rendről rendre felírhassuk, szükségünk van még a $T_{\mu\nu}$ energia-impulzus tenzor

$$
\begin{aligned}
T_{00} &= T_{00}^{(0)} + T_{00}^{(2)} + ... &\quad (2.40)\\
T_{i0} &= T_{i0}^{(1)} + T_{i0}^{(3)} + ... &\quad (2.41)\\
T_{ij} &= T_{ij}^{(2)} + T_{ij}^{(4)} + ... &\quad (2.42)
\end{aligned}
$$

felbontására, ahol minden $T_{\mu\nu}^{(\mathcal{N})}$ kifejezés $v^{\mathcal{N}}/c^{\mathcal{N}}(GM/c^2r^3)$ rendű. Ezen eredmények felhasználásával sugárzási mértékben az Einstein-egyenleteket az alábbi formába írhatjuk

$$
\nabla^2 g_{00}^{(2)} = -8\pi G T_{00}^{(0)} \quad (2.43)
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 g_{00}^{(4)} &= \frac{\partial^2 g_{00}^{(2)}}{\partial t^2} + g_{ij}^{(2)} \frac{\partial^2 g_{00}^{(2)}}{\partial x^i \partial x^j} - \left(\frac{\partial g_{00}^{(2)}}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial g_{00}^{(2)}}{\partial x^i}\right) - \\
&- 8\pi G \left[T_{00}^{(2)} - 2g_{00}^{(2)} T_{00}^{(0)} + T_{ii}^{(2)}\right] \quad (2.44)
\end{aligned}
$$

$$
\nabla^2 g_{i0}^{(3)} = 16\pi G T_{i0}^{(1)} \quad (2.45)
$$

$$
\nabla^2 g_{ij}^{(2)} = -8\pi G \delta_{ij} T_{00}^{(0)} \ . \quad (2.46)
$$

A fent felsorolt egyenletek közül az első az Einstein-egyenletek 00 komponensének legalacsonyabb, newtoni rendje, annak első rendű járulékára vonatkozó egyenlet a második, ezt az $i0$ és ij komponensek legalacsonyabb rendű egyenletei követik.

A PN mezők és a mozgásegyenletek. A fenti eredményeket felhasználva meg tudjuk adni a pontrendszerre vonatkozó mozgásegyenletek rendről rendre történő felírásának módszerét. Ehhez definiálunk három, a metrika perturbációit leíró poszt-newtoni mezőt. Az első az úgynevezett newtoni potenciál

$$
g_{00}^{(2)} = -2\phi \ , \quad (2.47)
$$

a rá vonatkozó egyenlet (2.43) alapján

$$
\nabla^2 \phi = 4\pi G T_{00}^{(0)} \ . \quad (2.48)
$$

Elvárás, hogy a metrika $g_{00}^{(2)}$ komponense a végtelenben nullához tartson, ekkor az egyenlet formális megoldása

$$\phi(\mathbf{x},t) = -G \int \frac{T_{00}^{(0)}(\mathbf{x}',t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3x' \ , \tag{2.49}$$

illetve, mivel a $g_{ij}^{(2)}$ komponens is nullához tart a végtelenben, igaz, hogy

$$g_{ij}^{(2)} = -2\delta_{ij}\phi \ , \tag{2.50}$$

vagyis az erre vonatkozó (2.46) egyenlet megoldása is egyszerűen előáll (2.49) alapján.

A newtoni rend teljes körű tárgyalásához még szükségünk van a részecskék (2.34) mozgásegyenletének newtoni rendbeli alakjára. Az egyes részecskék mozgását leíró $\mathbf{v}_n$ sebességekre vonatkozó egyenlet ekkor

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\phi(x) \ . \tag{2.51}$$

Az első poszt-newtoni rend leírásához definiáljuk a ξ és ψ poszt-newtoni mezőket

$$\begin{aligned} g_{i0}^{(3)} &= \xi_i & (2.52)\\ g_{00}^{(4)} &= -2\phi^2 - 2\psi \ . & (2.53) \end{aligned}$$

Az ezekre vonatkozó Einstein-egyenletek (2.45), (2.44) és (2.48) alapján

$$\begin{aligned} \nabla^2\xi_i(\mathbf{x},t) &= 16\pi G T_{i0}^{(1)} \ , & (2.54)\\ \nabla^2\psi(\mathbf{x},t) &= \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + 4\pi G[T_{00}^{(2)} + T_{ii}^{(2)}] \ . & (2.55) \end{aligned}$$

Mivel elvárásunk, hogy a $g_{i0}^{(3)}$ és $g_{00}^{(4)}$ komponensek is nullához tartanak a végtelenben, a fenti egyenletek formális megoldása

$$\begin{aligned} \xi_i(\mathbf{x},t) &= -4G \int \frac{T_{i0}^{(1)}(\mathbf{x}',t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3x' & (2.56)\\ \psi(\mathbf{x},t) &= -\int \frac{d^3x'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \left[\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2\phi(\mathbf{x}',t)}{\partial t^2} + G T_{00}^{(2)}(\mathbf{x}',t) + G T_{ii}^{(2)}(\mathbf{x}',t) \right] \ . & (2.57) \end{aligned}$$

alakban írható fel. A poszt-newtoni mezők segítségével a (2.34) mozgásegyenlet alakja 1 PN rendig

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla(\phi + 2\phi^2 + \psi) - \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + 3\mathbf{v}\frac{\partial \phi}{\partial t} + 4\mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\phi - \mathbf{v}^2\nabla\phi \tag{2.58}$$

lesz. A poszt-newtoni források mozgásának leírásával foglalkozó kutatások kiindulópontja az ilyen mozgásegyenletek minél magasabb rendű meghatározása, és azok vizsgálata. A fenti egyenletek kiintegrálása és a magasabb rendű egyenletek meghatározása céljából meg kell határoznunk az energia-impulzus tenzor komponenseinek alakját rendről rendre. Pontrészecskék rendszere esetén

$$T_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = g^{-1/2}(\mathbf{x}, t) \sum_n m_n \frac{dx_{\mu n}(t)}{dt} \frac{dx_{\nu n}(t)}{dt} \left(\frac{d\tau_n}{dt} \right)^{-1} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \tag{2.59}$$

alapján az 1 PN rendben releváns perturbációk az alábbiak

$$T_{00}^{(0)} = \sum_n m_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \tag{2.60}$$

$$T_{00}^{(2)} = \sum_n m_n \left(\phi + \frac{1}{2}\mathbf{v}_n^2 \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \tag{2.61}$$

$$T_{i0}^{(1)} = \sum_n m_n v_{ni} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \tag{2.62}$$

$$T_{ij}^{(2)} = \sum_n m_n v_{ni} v_{nj} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \; . \tag{2.63}$$

A poszt-newtoni sorfejtés módszere. A fenti képletek felhasználásával a poszt-newtoni sorfejtésen alapuló rekurzív módszer a következő:

1. lépés: Megoldjuk a newtoni rend (2.48) és (2.51) egyenleteit, ezáltal meghatározva a $\phi(x)$ és $x_n(t)$ mennyiségeket.

2. lépés: Az első lépés eredményeinek felhasználával meghatározzuk az energia-impulzus tenzor $T_{00}^{(0)}$, $T_{00}^{(2)}$, $T_{i0}^{(1)}$ és $T_{ij}^{(2)}$ komponenseit, pontrendszer esetén a (2.60)-(2.63) egyenletek segítségével.

3. lépés: A fenti két lépés és a (2.54) és (2.55) egyenletek megoldásával meghatározzuk a ξ és ψ poszt-newtoni mezők alakját.

4. lépés: Az első és harmadik lépés eredményeinek behelyettesítésével megkapjuk az $x_n(t)$ trajektóriákat leíró (2.58) egyenletet, mely már tartalmazza az elsőrendű korrekciókat, ezt megoldva kiszámítható a trajektóriák alakja.

5. lépés: Magasabb rendekben a fenti lépéseket kell a magasabb rendű korrekciókra vonatkozó egyenletek segítségével megismételni.

A fenti módszer eredménye minden esetben egy másodrendű vektor-differenciálegyenlet a trajektóriákat leíró $x_n(t)$ komponensekre vonatkozóan, és a további effektusok poszt-newtoni bevezetésekor is (például kompakt kettősök esetén a testek forgása) ezen egyenletekhez keressük a korrekciókat.

2.2.2. A kvadrupól-formula

A detektálható gravitációs hullámok elméletének első eredményeit a kvadrupól-formalizmus szolgáltatta, mint a newtoni rendben leírható dinamikájú források által keltett hullámok linearizált egyenletének legalacsonyabb rendű megoldásának módszere. Bár mára már jócskán meghaladtuk az elmélet érvényességi körét, a mai napig is az ellenőrzések és továbblépések alapját képezi.

A külső zóna. A kvadrupól-formalizmusban a gravitációs hullámok leírásához csak a külső és belső zónákat kell elkülönítenünk, a források dinamikáját azok newtoni rendjében vesszük figyelembe. A hullámforma szerkezetéhez először a külső zónában érvényes vákuumegyenletet

$$\partial^\mu \partial_\mu h_{\alpha\beta} = 0 \ , \tag{2.64}$$

illetve annak Fourier-transzformáltját

$$\left[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right] h_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}) = 0 \tag{2.65}$$

oldjuk meg. Az egyenlet megoldását

$$h_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{A_{\alpha\beta}(\omega)}{r} e^{i\frac{\omega}{c}r} + \frac{Z_{\alpha\beta}(\omega)}{r} e^{-i\frac{\omega}{c}r} \tag{2.66}$$

gömbhullámok formájában keressük, ahol r jelöli a radiális koordinátát. A "no-incoming radiation" feltételből adódóan a fenti megoldásban $Z_{\alpha\beta}(\omega) = 0$.

A belső zóna. Az $A_{\alpha\beta}(\omega)$ együttatókat a forrás tulajdonságainak figyelembe vételével a belső zónára vonatkozó egyenletből

$$\partial^\mu \partial_\mu h_{\alpha\beta} = -\frac{4\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \ , \tag{2.67}$$

illetve annak Fourier-transzformáltjából

$$\left[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right] h_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}) = -\frac{4\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}) \tag{2.68}$$

számíthatjuk ki. Ezek szerint formálisan

$$A_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{4\pi G}{c^4} \int_V T_{\alpha\beta}(\omega, x^i) d^3x \ , \tag{2.69}$$

vagyis

$$h_{\alpha\beta}(\omega, r) = \frac{4\pi G}{c^4} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}r}}{r} \int_V T_{\alpha\beta}(\omega, x^i) d^3x \ , \tag{2.70}$$

illetve az inverz Fourier-transzformációt elvégezve

$$h_{\alpha\beta}(t, r) = \frac{4\pi G}{c^4 r} \int_V T_{\alpha\beta}(t - r/c, x^i) d^3x \ . \tag{2.71}$$

A fenti összefüggéseket tovább egyszerűsíti az energia-impulzus tenzor divergenciamentessége, amelyet ebben az esetben, mivel a perturbációt leíró h tenzort magasabb rendben tartalmazó korrekciókat elhanyagoljuk, a

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\alpha\mu} = 0 \tag{2.72}$$

alakban vesszük figyelembe. Ekkor

$$h_{0\alpha}(t, r) = 0 \tag{2.73}$$

$$h_{ij}(t, r) = \frac{2\pi G}{c^4 r} \frac{d^2}{dt^2} q_{ij}(t - r/c) \tag{2.74}$$

a kvadrupólformula, ahol

$$q_{ij}(t - r/c) = \frac{1}{c^2} \int_V T_{00}(t - r/c, x^i) x_i x_j d^3x \tag{2.75}$$

az úgynevezett kvadrupólmomentum.

A kvadrupól-formula TT mértékben. A fenti kvadrupólformula a TT mértékben

$$h_{0\alpha}^{TT}(t,r) = 0 \tag{2.76}$$

$$h_{ij}^{TT}(t,r) = \frac{2\pi G}{c^4 r}\frac{d^2}{dt^2}q_{ij}^{TT}(t-r/c) \tag{2.77}$$

alakú, ahol a TT projekciót a kvadrupólmomentumon hajtjuk végre

$$q_{ij}^{TT} = \mathcal{P}_{ijkl}q^{kl} \ . \tag{2.78}$$

Példaként alkalmazzuk a fenti formalizmust egy m_1 és m_2 tömegpontokból álló kettősrendszerre körpálya határesetben. A két test egy közös középponttól állandó r_1 és r_2 távolságra kering az $x-y$ síkon, és $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ a kettős redukált tömege, illetve $l_0 = r_1 + r_2$. A mozgás körfrekvenciája $\omega_k = \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{l_0^3}}$, a forrás energia-impulzus tenzorának 00 komponense

$$T^{00} = \sum_{n=1}^{2} m_n c^2 \delta(x-x_n)\delta(y-y_n)\delta(z) \ . \tag{2.79}$$

A forrást a z tengely irányából nézve az alábbi polarizációs állapotokat láthatjuk

$$h_+ = h_{xx}^{TT} = -h_{yy}^{TT} = -\frac{G\pi\mu}{c^4 z}l_0^2(2\omega_k)^2\cos\left[2\omega_k(t-z/c)\right] \tag{2.80}$$

$$h_\times = h_{xy}^{TT} = -\frac{G\pi\mu}{c^4 z}l_0^2(2\omega_k)^2\sin\left[2\omega_k(t-z/c)\right] \ . \tag{2.81}$$

Az eredményekből jól látható, hogy a sugárzás frekvenciája éppen kétszerese a mozgás frekvenciájának, vagyis $\omega_{rad} = 2\omega_k$. Ez az eredmény a kettősrendszerek által kibocsátott gravitációs hullámokat leíró elméletek számára az ellenőrzés alapja, vagyis az ilyen elméleteknek körpálya határesetben, legalacsonyabb rendben ezzel azonos eredményt kell adnia.

2.2.3. A hullámforma kifejtése a poszt-minkowski közelítésben

Ezen fejezetben a (2.8) és (2.6) egyenleteknek a fenti 4 feltételnek eleget tevő megoldásának alapjait mutatom be, követve L. Blanchet [17] összefoglaló cikkének gondolatmenetét. A megoldást a külső zónában keressük, vagyis a

$$\partial_\mu \partial^\mu h^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha\beta} \tag{2.82}$$

vákuumegyenlet megoldását tűzzük ki célul, ahol a magasabb rendű perturbációkat jelölő $\Lambda^{\alpha\beta}$ alakját a (2.10) egyenlet adja meg. A h_{ext} metrikaperturbációt a poszt-minkowski közelítésben az alábbi alakban szeretnénk meghatározni

$$h_{ext}^{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} G^n h_n^{\alpha\beta} \ , \tag{2.83}$$

ahol a G newtoni gravitációs állandót a perturbációszámítás rendjeinek elkülönítésére vezetjük be. Bár a vákuum Einstein-egyenletekben a G konstans expliciten nem szerepel, mivel azt a forrás poszt-newtoni leírásával kötjük majd össze, az összefüggésekben expliciten is megjelennek a newtoni gravitációs állandó hatványai. Az egyes $h_n^{\alpha\beta}$ tenzorok minden rendben kielégítik az alábbi hullámegyenletet

$$\partial^\mu \partial_\mu h_n^{\alpha\beta} = \Lambda_n^{\alpha\beta}[h_1, h_2, ..., h_{n-1}] \ , \tag{2.84}$$

vagyis rendről rendre

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial_\mu h_1^{\alpha\beta} &= 0 \ , & (2.85) \\ \partial^\mu \partial_\mu h_2^{\alpha\beta} &= N^{\alpha\beta}[h_1, h_1] \ , & (2.86) \\ \partial^\mu \partial_\mu h_3^{\alpha\beta} &= M^{\alpha\beta}[h_1, h_1, h_1] + N^{\alpha\beta}[h_1, h_2] + N^{\alpha\beta}[h_2, h_1] \ . & (2.87) \end{aligned}$$

Ezen felül minden rendben teljesülnie kell a

$$\partial_\mu h_n^{\alpha\mu} = 0 \tag{2.88}$$

sugárzási mértékfeltételnek.

A linearizált egyenlet megoldásának multipólus kifejtése. Első lépében megvizsgáljuk a linearizált egyenlet megoldását, vagyis keressük azt a

$$h_{ext}^{\alpha\beta} = G h_1^{\alpha\beta} + \mathcal{O}(G^2) \ , \tag{2.89}$$

tenzort, amely kielégíti a (2.85) és (2.88) egyenleteket [12]. A megoldást a

$$h_1^{\alpha\beta} = \sum_{l=0}^{\infty} \partial_L \left(\frac{K_L^{\alpha\beta}(u)}{r} \right) \tag{2.90}$$

multipólkifejtés alakjában keressük [13], ahol $u := t - r/c$ a retardált időkoordináta, $r = |\mathbf{x}|$, illetve a $K_L^{\alpha\beta}(u)$ szimmetrikus spúrtalan multipólusokra igaz, hogy $K_L(u) \in C^\infty(\mathbb{R})$, és kielégítik a poszt-newtoni források által kibocsátott hullámokra vonatkozó 4. feltételt, vagyis alkalmasan választott $\mathcal{T}$ esetén $t \le \mathcal{T}$: $\quad K_L(u) =$ állandó. Fent bevezettük az $L := i_1 i_2 ... i_l$ multiindexet (minden $i = 1, 2, 3$) és a $\partial_L = \partial_{i_1}\partial_{i_2}...\partial_{i_l}$ jelölést.

1. Tétel *A (2.85), (2.88) linearizált egyenletrendszer a 2.2 fejezet elején kirótt 1.-4. feltételeknek megfelelő legáltalánosabb megoldása, egy a forrást magába foglaló tartományon kívül (vagyis a külső tartományon)*

$$h_1^{\alpha\beta} = k_1^{\alpha\beta} + \partial^\alpha \varphi_1^\beta + \partial^\beta \varphi_1^\alpha - \eta^{\alpha\beta}\partial_\mu \varphi_1^\mu \tag{2.91}$$

alakú, ahol a metrika lineáris perturbációit leíró $k_1^{\alpha\beta}$ *tenzort két típusú szimmetrikus spúrtalan multipólmomentum szerint*

$$\begin{aligned}
k_1^{00} &= -\frac{4}{c^2}\sum_{l\ge 0}\frac{(-)^l}{l!}\partial_L\left(\frac{1}{r}I_L(u)\right)\\
k_1^{0i} &= \frac{4}{c^3}\sum_{l\ge 1}\frac{(-)^l}{l!}\left\{\partial_{L-1}\left(\frac{1}{r}I^{(1)}_{iL-1}(u)\right) + \frac{l}{l+1}\epsilon_{iab}\partial_{aL-1}\left(\frac{1}{r}J_{bL-1}(u)\right)\right\}\\
k_1^{ij} &= -\frac{4}{c^4}\sum_{l\ge 2}\frac{(-)^l}{l!}\left\{\partial_{L-2}\left(\frac{1}{r}I^{(2)}_{ijL-2}(u)\right) + \frac{2l}{l+1}\partial_{aL-2}\left(\frac{1}{r}\epsilon_{ab<i}J^{(1)}_{j>bL-2}(u)\right)\right\}\ ,
\end{aligned} \tag{2.92}$$

míg a mértéktranszformációkat reprezentáló φ_1^β *vektort további négy multipólmomentum szerint*

$$\begin{aligned}
\varphi_1^0 &= \frac{4}{c^3}\sum_{l\ge 0}\frac{(-)^l}{l!}\partial_L\left(\frac{1}{r}W_L(u)\right)\\
\varphi_1^i &= -\frac{4}{c^4}\sum_{l\ge 0}\frac{(-)^l}{l!}\partial_{iL}\left(\frac{1}{r}X_L(u)\right)\\
&- \frac{4}{c^4}\sum_{l\ge 1}\frac{(-)^l}{l!}\left\{\partial_{L-1}\left(\frac{1}{r}Y_{iL-1}(u)\right) + \frac{l}{l+1}\epsilon_{iab}\partial_{aL-1}\left(\frac{1}{r}Z_{bL-1}(u)\right)\right\}
\end{aligned} \tag{2.93}$$

fejthetjük ki, ahol a (p) felső indexek p-edik idő szerinti deriválást jelölnek, és <> jelöli a szimmetrizálást.

A tétel bizonyítása a [13] és [14] cikkekben található. A számunkra leginkább lényeges momentumok az $I_L(u)$ tömegszerű és $J_L(u)$ áramszerű momentumok, mivel a mértékszabadságtól a

TT mérték rögzítésekor megszabadulunk. Mivel I_i =állandó és J_i =állandó, a dipólmomentumok nem járulnak hozzá a gravitációs sugárzáshoz.

Az általános egyenlet megoldása. A fenti kifejtés legfontosabb előnye, hogy annak segítségével előállítható a teljes rendszer megoldása, vagyis

2. Tétel *Az (2.8) és (2.6) általános vákuum egyenletrendszer 1.-4. feltételeknek megfelelő legáltalánosabb megoldása egy, a forrást magába foglaló tartományon kívül (vagyis a külső tartományon) előáll a fenti multipólmomentumok szerinti kifejtés alakjában, vagyis*

$$h^{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} G^n h_n^{\alpha\beta}[I_L, J_L, W_L, X_L, Y_L, Z_L] \ . \tag{2.94}$$

A tétel bizonyítása a [14] cikkben található.

Felmerül a kérdés, hogy megadható-e úgy két független multipólmomentum M_L és S_L, hogy azokkal egyértelműen kifejezhető legyen az egyenletek

$$h^{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} G^n h_n^{\alpha\beta}[M_L, S_L] \tag{2.95}$$

megoldása. Ez az eljárás is megfelelő, azonban M_L és S_L csak nemlineáris egyenletek segítségével adható meg az eredeti $I_L, J_L, W_L, X_L, Y_L, Z_L$ momentumok függvényében, ami az utóbbi leírást túlságosan elbonyolítja.

2.2.4. Illesztés a határzónában

Mivel a poszt-newtoni közelítés kis sebességgel mozgó objektumok és lassan változó perturbációk leírására alkalmas, míg a fenti poszt-minkowski multipólsorfejtés a vákuum-einstein-egyenletek megoldását adja, talánunk kell egy olyan illesztési eljárást, ahol a forrás dinamikája által keltett perturbációkat összeköthetjük a detektálható hullámforma leírásával. Ezt az illesztést a közeli külső zónában végezhetjük el. A fejezetben az egyszerűség kedvéért elhagytam az $\alpha\beta$ indexeket.

A megoldás alakja a sugárzási és a külső közeli zónákban. Az illesztés pontos megfogalmazásához először meg kell határoznunk, hogy a hullámforma hogyan viselkedik a közeli és a sugárzási zónában.

3. Tétel *A poszt-minkowski metrika-perturbációk fent leírt kifejtése a sugárzási zónában, pontosabban a jövőbeli fényszerű végtelenben, vagyis amikor $r \to \infty$ és az $u = t - r/c$ retardált idő állandó, az alábbi típusú: $\forall N \in \mathbb{N}$-re*

$$h_n(\mathbf{x}, t) = \sum_{l,k,p} \frac{\hat{n}_L (\ln r)^p}{r^k} G_{L,k,p,n}(u) + o\left(\frac{1}{r^N}\right) \ , \tag{2.96}$$

ahol $\hat{n}_L$ a $\hat{x}_L = x_{<L>} = x_{<i_1} x_{i_2} ... x_{i_l>}$ szimmetrizált szorzat normálásával áll elő $\hat{n}_L = \hat{x}_L / |\hat{x}_L|$, és $k, p \in \mathbb{N}$ indexekre $1 \leq k \leq N$ és $p \leq n-1$, és a $G_{L,k,p,n}(u)$ momentumok kifejthetőek a fent említett hat multipólmomentum segítségével.

A formulában megjelenő $(\ln r)^p$ faktor a koordinátarendszer választás miatt fellépő koordinátaeffektus [78], amely például sugárzási koordinátákban felírva nem lép fel, vagyis megfelelő koordinátarendszer használata esetén kiküszöbölhető. A tétel bizonyításának részletei [14]-ben találhatók.

A fentihez hasonló formula adható meg a közeli zónában is, vagyis belátható [14], hogy

4. Tétel *A metrika-perturbációk poszt-minkowski kifejtése a közeli zónában ($r \to 0$) az alábbi módon bontható fel: $\forall N \in \mathbb{N}$-re*

$$h_n(\mathbf{x}, t) = \sum_{l,m,p} \hat{n}_L r^m (\ln r)^p F_{L,m,p,n}(t) + o(r^N) \tag{2.97}$$

ahol $m \in \mathbb{Z}$, $m_0 \leq m \leq N$ és minél magasabb n értéke, m_0-é annál kisebb, és $p \in \mathbb{N}$ indexre $p \leq n-1$. Az $F_{L,m,p,n}(t)$ együtthatók az eredeti $I_L, J_L, W_L, X_L, Y_L, Z_L$ momentumok multilineáris függvényei.

Ennél a kifejtésnél ismételten fellép a logaritmikus koordinátaeffektus, amely megfelelő koordinátarendszer-választással ekkor is eltűntethető.

Ami számunkra lehetővé teszi az illesztést a közeli tartományban az az a tény, hogy ha az ebben a tartományban érvényes kifejezésbe beírjuk a megfelelő c hatványokat, vagyis minden r faktor helyére r/c-t írunk, akkor a fenti kifejtés megegyezik a poszt-newtoni sorfejtés alakjával, vagyis h_n függése a fénysebességtől

$$h_n(c) \simeq \sum_{p,q \in \mathbb{Z}} \frac{(\ln c)^p}{c^q} \ , \tag{2.98}$$

alakba írható, ahol $p \leq n-1$ és $q \geq 2$.

Illesztés a külső közeli zónában. Jelölje egy adott h metrika-perturbáció poszt-minkowski multipólkifejtését

$$\mathcal{M}(h) = h_{ext} = \sum_{n=1}^{\infty} G^n h_n[I_L, J_L, W_L, X_L, Y_L, Z_L] \ . \tag{2.99}$$

Nyilvánvalóan a külső zónában a metrika megegyezik annak multipólkifejtésével, vagyis

$$r > a \quad \longrightarrow \quad \mathcal{M}(h) = h \ . \tag{2.100}$$

Jelölje továbbá $\overline{h}$ egy adott metrika poszt-newtoni sorfejtéssel adott alakját. Az átfedési tartományban, vagyis a közeli, külső zónában (ahol a poszt-newtoni és a multipól formalizmus egyaránt érvényes) igaz a

$$a < r \ll \lambda \quad \longrightarrow \quad \mathcal{M}(h) = \overline{h} \tag{2.101}$$

összefüggés Ez a kapcsolat azonban csak az adott tartományban érvényes, csak pontonként, és a sorok konvergenciáját sem tudjuk biztosítani a teljes téridőn. Ezért posztuláljuk az alábbi illesztési feltételt

$$\overline{\mathcal{M}(h)} = \mathcal{M}(\overline{h}) \ , \tag{2.102}$$

ahol $\overline{\mathcal{M}(h)}$ az $\mathcal{M}(h)$ multipólkifejtés közeli zónára érvényes, 4. tételben megadott alakja, míg $\mathcal{M}(\overline{h})$ jelöli a $\overline{h}$ poszt-newtoni kifejezés multipólkifejtését. Ez az illesztési feltétel már rendről rendre teljesül, és az egyenlet jobb és bal oldalán szereplő kifejezések megfelelő konvergencia-tulajdonságokkal rendelkeznek. Felhasználva a 4. tétel eredményeit

$$\overline{\mathcal{M}(h)} = \sum \hat{n}_L r^m (\ln r)^p F_{L,m,p}(t) = \mathcal{M}(\overline{h}) \ , \tag{2.103}$$

ahol $F_{L,m,p}(t) := \sum_{n \geq 1} G^n F_{L,m,p,n}(t)$. Természetesen a fenti illesztés csak akkor lehetséges, ha a két leírás érvényességi tartományainak van átfedése.

2.2.5. A multipólmomentumok kiszámítása

A fenti eredmények alapján a módszerünk az, hogy a poszt-newtoni forrás dinamikájának leírását behelyettesítjük a poszt-minkowski sorfejtés multipólmomentumaiba, és megvizsgáljuk, hogy ez alapján a Földön a forrás által keltett hullámok milyen mérhető jelalakot okoznak. Ezen fejezetben ennek a módszernek az összefüggéseit mutatom be.

A multipólkifejtés általános alakja.

5. Tétel *A (2.102) egyenlet alapján a (2.8), (2.9) Einstein-egyenletek megoldásának multipólkifejtése egy poszt-newtoni forrás külső tartományában az alábbi alakú*

$$\mathcal{M}(h^{\alpha\beta}) = \mathcal{FP}_{B=0}\Box^{-1}_{ret}[\tilde{r}^B \mathcal{M}(\Lambda^{\alpha\beta})] - \frac{4G}{c^4}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!}\partial_L\left\{\frac{1}{r}\mathcal{H}^{\alpha\beta}_L(t-r/c)\right\} \ , \tag{2.104}$$

ahol a multipólmomentumokat a

$$\mathcal{H}^{\alpha\beta}_L(u) = \mathcal{FP}_{B=0}\int d^3x|\tilde{x}|^B x_L \overline{\tau}^{\alpha\beta}(\mathbf{x},u) \tag{2.105}$$

egyenlettel számolhatjuk ki a forrás (2.9) energiaimpulzus-pszeudotenzorának $\overline{\tau}^{\alpha\beta}$ poszt-newtoni kifejtéséből.

A tétel bizonyítása a [15] és [16] munkákban található. Az $\mathcal{FP}_{B=0}$ "véges rész" jelölés az alábbi regularizációs eljárás rövidített jelölése. Az Einstein-egyenletek hullámalakjának megoldásakor, bevezetve a D'Alembert operátor $\Box^{-1}_{ret}$ inverzét

$$(\Box^{-1}_{ret}f)(\mathbf{x},t) = -\frac{1}{4\pi}\int\int\int\frac{d^3x'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}f(\mathbf{x}', t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c) \ , \tag{2.106}$$

szükségünk lesz a $\Box^{-1}_{ret}\Lambda^{\alpha\beta}_n$ integrál elvégzésére. Alkalmazva $\Lambda^{\alpha\beta}_n$-ra a multipólkifejtést, a fenti formális integrál adott rendben divergens lesz $r \to 0$ esetben, ezért a regularizációs módszer bemutatására ezt a mennyiséget használom fel. Az $\mathcal{M}(\Lambda^{\alpha\beta}_n)$ tenzort megszorozzuk az $\tilde{r} := r/r_0$ mennyiség B-edik hatványával, ahol r_0 konstans skálafaktor $\tilde{r}$ dimenziótlanítását szolgálja, és $B \in \mathbb{C}$. További megkötés a B komplex szám valós részére vonatkozóan, hogy $\mathcal{R}e(B) > k_{max} - 3$, ahol k_{max} jelöli a maximális divergencia fokát. Ekkor a már véges $\Box^{-1}_{ret}(\tilde{r}^B\mathcal{M}(\Lambda^{\alpha\beta}_n))$ mennyiséget analitikusan kiterjesztjük a teljes komplex síkra. A kifejezés a $B \to 0$ határesetben előáll annak Laurent-soraként, és ezt a kifejezést tekintjük az eredeti mennyiség véges részének.

Ugyanezen módszerrel tesszük végessé a multipólmomentumok kifejezéseiben szereplő integrált is.

A Will-Wiseman formalizmus. Egy másik regularizációs eljárás C. M. Will és A. G. Wiseman nevéhez fűződik [18]. Az eljárás lényege, hogy az egyes integrálokat csak bizonyos téridőtartományokon végezzük el, vagyis a

$$\mathcal{M}(h^{\alpha\beta}) = \Box^{-1}_{ret}[\mathcal{M}(\Lambda^{\alpha\beta})]_{|\mathcal{R}} - \frac{4G}{c^4}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!}\partial_L\left\{\frac{1}{r}\mathcal{W}^{\alpha\beta}_L(t-r/c)\right\} \tag{2.107}$$

egyenletben a retardált D'Alembert operátor inverzében szereplő integrálást csak egy adott $\mathcal{R}$ sugáron kívül, a

$$\mathcal{W}^{\alpha\beta}_L(u) = \int_{|x|<\mathcal{R}} d^3x\, x_L \overline{\tau}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}, u) \tag{2.108}$$

multipólmomentumok esetén pedig azon belül végezzük el.

Belátható, hogy a két regularizáció azonos eredményekre vezet [17].

A forrás multipólmomentumai. Végezetül meghatározzuk a korábban bevezetett I_L, J_L, W_L, X_L, Y_L, Z_L multipólmomentumok alakját, és azt, hogy azok hogyan alkotják tetszőleges rendben a metrika perturbációit. A fenti momentumok általános tulajdonsága, hogy szimmetrikusak és spúrmentesek (STF). A fenti momentumokat magába foglaló $\mathcal{F}^{\alpha\beta}_L(t-r/c)$-vel

$$\mathcal{M}(h^{\alpha\beta}) = \mathcal{FP}_{B=0}\Box^{-1}_{ret}[\tilde{r}^B\mathcal{M}(\Lambda^{\alpha\beta})] - \frac{4G}{c^4}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!}\partial_L\left\{\frac{1}{r}\mathcal{F}^{\alpha\beta}_L(t-r/c)\right\} , \tag{2.109}$$

ahol az STF momentumok a

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta}_L(u) = \mathcal{FP}_{B=0}\int d^3x \hat{x}_L \int_{-1}^{1} dz \delta_l(z) \overline{\tau}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}, u + z|\mathbf{x}|/c) \tag{2.110}$$

összefüggés alapján állnak elő, ahol $\hat{x}_L$ az $x_{<L>} = x_{<i_1}x_{i_2}...x_{i_l>}$ szimmetrizált szorzat spúrmentes része [79]. A $\delta_l(z)$ súlyfüggvény alakja

$$\delta_l(z) = \frac{(2l+1)!!}{2^{l+1}l!}(1-z^2)^l , \tag{2.111}$$

és úgy normáljuk, hogy

$$\int_{-1}^{1} dz \delta_l(z) = 1 \tag{2.112}$$

legyen. Ez a súlyfüggvény a magasabb multipólmomentumok esetén egyre inkább a $\delta(z)$ Dirac-deltához tart,

$$\lim_{l\to\infty} \delta_l(z) = \delta(z) \ , \tag{2.113}$$

vagyis az egyre magasabb momentumok esetén a forrás egyre inkább tömegponthoz hasonlít.

A hullámforma fenti kifejtésében az STF multipólmomentumok összefoglalva [80] alapján az alábbi alakúak:

$$\begin{aligned} I_L(u) &= \mathcal{FP}\int d^3x \int_{-1}^{1} dz \left\{ \delta_l \hat{x}_L \Sigma - \frac{4(2l+1)}{c^2(l+1)(2l+3)} \delta_{l+1} \hat{x}_{iL} \Sigma_i^{(1)} + \right. \\ &+ \left. \frac{2(2l+1)}{c^4(l+1)(l+2)(2l+5)} \delta_{l+2} \hat{x}_{ijL} \Sigma_{ij}^{(2)} \right\} (\mathbf{x}, u + z|\mathbf{x}|/c) \end{aligned} \tag{2.114}$$

a tömeg multipólmomentum,

$$\begin{aligned} J_L(u) &= \mathcal{FP}\int d^3x \int_{-1}^{1} dz \, \epsilon_{ab<i_l} \left\{ \delta_l \hat{x}_{L-1>a} \Sigma_b - \right. \\ &- \left. \frac{2l+1}{c^2(l+2)(2l+3)} \delta_{l+1} \hat{x}_{L-1>ac} \Sigma_{bc}^{(1)} \right\} (\mathbf{x}, u + z|\mathbf{x}|/c) \end{aligned} \tag{2.115}$$

az áram multipólmomentum, míg a mértéktranszformációt meghatározó momentumok

$$\begin{aligned} W_L(u) &= \mathcal{FP}\int d^3x \int_{-1}^{1} dz \left\{ \frac{2l+1}{(l+1)(2l+3)} \delta_{l+1} \hat{x}_{iL} \Sigma_i - \right. \\ &- \left. \frac{2l+1}{2c^2(l+1)(l+2)(2l+5)} \delta_{l+2} \hat{x}_{ijL} \Sigma_{ij}^{(1)} \right\} \\ X_L(u) &= \mathcal{FP}\int d^3x \int_{-1}^{1} dz \left\{ \frac{2l+1}{2(l+1)(l+2)(2l+5)} \delta_{l+2} \hat{x}_{ijL} \Sigma_{ij} \right\} \\ Y_L(u) &= \mathcal{FP}\int d^3x \int_{-1}^{1} dz \left\{ \delta_l \hat{x}_L \Sigma_{ii} + \frac{3(2l+1)}{(l+1)(2l+3)} \delta_{l+1} \hat{x}_{iL} \Sigma_i^{(1)} - \right. \\ &- \left. \frac{2(2l+1)}{c^2(l+1)(l+2)(2l+5)} \delta_{l+2} \hat{x}_{ijL} \Sigma_{ij}^{(2)} \right\} \\ Z_L(u) &= \mathcal{FP}\int d^3x \int_{-1}^{1} dz \, \epsilon_{ab<i_l} \left\{ - \frac{2l+1}{(l+2)(2l+3)} \delta_{l+1} \hat{x}_{L-1>bc} \Sigma_{ac} \right\} \ , \end{aligned}$$

ahol bevezettük az alábbi jelöléseket

$$\Sigma = \frac{\overline{\tau}^{00} + \overline{\tau}^{ii}}{c^2}\ , \qquad \Sigma_i = \frac{\overline{\tau}^{0i}}{c}\ , \qquad \Sigma_{ij} = \overline{\tau}^{ij}\ . \tag{2.116}$$

Poszt-newtoni források esetén a fenti kifejezések tovább egyszerűsíthetők, mivel ezesetben igaz az alábbi kifejtés

$$\int_{-1}^{1} dz \delta_l(z) \tau^{\alpha\beta}(\mathbf{x}, u + z|\mathbf{x}|/c) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2l+1)!!}{2^k k!(2l+2k+1)!!} \left(\frac{|\mathbf{x}|}{c} \frac{\partial}{\partial u} \right)^{2k} \tau^{\alpha\beta}(\mathbf{x}, u)\ , \tag{2.117}$$

amely formálisan is megmutatja a poszt-newtoni közelítés és a poszt-minkowski multipólkifejtés közötti közvetlen kapcsolatot, és nagyban leegyszerűsíti egy adott PN rendhez tartozó momentum alakjának meghatározását.

Ezzel lényegében teljessé vált azon módszer bemutatása, mellyel a poszt-newtoni források által keltett gravitációs hullámok detektálható jelalakját számítjuk ki. Első lépésben kiszámítjuk a forrás dinamikájának elemeit a 2.2.1 fejezetben vázolt poszt-newtoni közelítéssel. Ennek segítségével meghatározhatjuk a forrás energia-impulzus tenzorának komponenseit. A fenti multipólmomentumok alakjának meghatározása után kiszámíthatjuk a perturbációt leíró tenzor (2.109) alakját a sugárzási zónában, és elvégezve a (2.13), illetve (2.27) projekciókat, azok segítségével a (2.24) egyenlettel meghatározható a detektálható jelalak.

3. Kompakt kettősrendszerek elmélete

Ebben a fejezetben bemutatom, hogy a korábbiakban bemutatott módszerek milyen eredményekkel alkalmazhatóak a kompakt objektumok alkotta kettősrendszerekre. Munkám során a testek forgását lineárisan vettem figyelembe, a megadott leírás legfeljebb 1,5 poszt-newtoni rendű, így az elmélet alapjainak leírásakor is a maximum 1,5 PN rendben releváns effektusok és formulák bemutatására szorítkozom.

A fejezet első részében definiálom, hogy mit értünk kompakt objektumok alkotta kettősrendszeren, illetve, hogy az milyen általános megkötéseket ad a poszt-newtoni formalizmusban.

Ezek után rátérek a kettősök dinamikája leírásának bemutatására, különös tekintettel a testek forgásának bevezetésére a formalizmusba. Először az általános esetben foglalom össze a releváns eredményeket, vagyis a mozgásegyenlet általános alakját és tulajdonságait, majd a pálya paraméterezésének alapjait.

A próbatest határesetben a spin-pálya kölcsönhatás figyelembe vételekor a mozgás leírásának ennél több részletét is ismerjük. A Lense-Thirring leírásnak köszönhetően lényegében a fenti eredményeken túl adottak a szögekre vonatkozó mozgásegyenletek is, amely a mozgás teljes leírását teszi lehetővé ebben a határesetben.

Végezetül pedig bemutatom a poszt-minkowski multipólsorfejtés alkalmazását kompakt kettősök esetében 1,5 PN rendig, a testek forgásának figyelembe vételével. A módszer végeredménye a perturbációkat leíró h_{ij}^{TT} tenzor alakjára vonatkozó formális kifejezések gyűjteménye. Ezek az összefüggések a detektálható hullámformák 4. és 5. fejezetben bemutatásra kerülő meghatározásának az alapját képezik.

A dolgozat további részében az összefüggések a $c = G = 1$ egységrendszerben lesznek adottak.

3.1. Kompakt objektumok alkotta kettősrendszerek dinamikája

A detektálható gravitációs hullámok forrásai valamilyen kvadrupól vagy annál magasabb rendű momentumokkal jellemezhető aszimmetriával rendelkező rendszerek. Ezek közül az egyik legszélesebb körben vizsgált forrástípus a kötött kettősrendszerek családja. Az összeolvadásuk során lezajló heves folyamatok miatt a legnagyobb amplitudójú jeleket a kompakt objektumok alkotta kettősök bocsájtják ki. Az egyes csillagászati objektumok kompaktságát az definiálja, hogy karakterisztikus méretük és tömegük azonos nagyságrendbe esik. Ezen feltételnek elsősorban a neutroncsillagok és a fekete lyukak felelnek meg. A kibocsátott jelalak nagy amplitudója mellett az ezen kettősök által kibocsátott jelalak jellegzetes, a többitől elkülöníthető karakterisztikával rendelkezik (chirp signal).

A kötött kettősrendszerek összeolvadási folyamatának három különböző szakaszát különböztetjük meg. Az első a közeledési vagy bespirálozási (angolul inspiral) szakasz, a második magát az összeolvadást írja le (merger), végül a téridő fluktuációi lecsengésének időszaka (ringdown) zárja a folyamatot.

A kompakt objektumok alkotta források esetében az elméleti leírás a közeledési korszakban némileg egyszerűbb, illetve egyértelműbb, mivel az összeolvadás során anyagtranszport a kettős tagjai között csak egész későn, vagy egyáltalán nem indul be, vagyis a közeledési szakaszban az objektumok jól szeparáltak. További egyszerűsödést jelent, hogy az egyes objektumok alakjának aszimmetriája miatt kisugárzott hullámok kompakt objektumok esetén csak 3,5 PN rendben válnak relevánssá.

A mozgás leírása a közeledési szakaszban a poszt-newtoni sorfejtés segítségével adható meg. Ekkor a kettőst az objektumok kompaktságának köszönhetően kétpont-rendszernek tekinthetjük, ez alól csak az egyes testek forgásának figyelembe vételekor kell eltérnünk. Azonban a tisztán relativisztikus PN-effektusok leírásakor itt is a forrás kétpontrendszer képét alkalmazzuk azok tömegközéppontjára. A forrás dinamikájára vonatkozó összefüggések meghatározásakor áttérünk a kettősrendszer tömegközépponti rendszerébe, ahol relatív mennyiségekkel (szeparációs vektor, relatív sebességvektor) jellemezzük a testek mozgását.

3.1.1. A testek forgása, mint poszt-newtoni perturbáció

Kompakt objektumok alkotta kettősök esetén az egyes objektumok sajátforgásának jelentős hatása van, amely szorosan csatolódik a mozgás pályájának dinamikájához. A poszt-newtoni közelítésben ez a csatolás a mozgás leírásában 1,5 PN rendben lép fel.

A kompakt objektumok forgását a $\chi_{\mathcal{A}}$ forgási együttható jellemzi, amely az $\mathcal{A}$-adik test $\mathbf{S}_{\mathcal{A}}$ spinvektorával (lásd később) definiálható az $|\mathbf{S}_{\mathcal{A}}| = \chi_{\mathcal{A}} m_{\mathcal{A}}^2$ összefüggéssel, ahol $m_{\mathcal{A}}$ jelöli az adott test tömegét, és $0 \leq \chi_{\mathcal{A}} \leq \chi_{max}$. Fekete lyukak esetén a forgási paraméter maximális értéke $\chi_{max} = 1$, neutroncsillagok esetén pedig ez az érték függ a csillagot leíró modelltől, de általában $\chi_{max} \leq 0,7$ [81].

A poszt-newtoni közelítésben a spin-pálya kölcsönhatás a legalacsonyabb rendű effektus, amely a pályasík elhelyezkedésének változását, a pályasík precesszióját okozza.

A spin-tenzor. Az egyes testek forgását jellemző spin-tenzort a

$$S_{\mathcal{A}}^{\mu\nu} = 2 \int_{\mathcal{A}} \left(x^{[\mu} - x_{\mathcal{A}}^{[\mu} \right) T^{\nu]0} d^3x \tag{3.1}$$

összefüggéssel definiálhatjuk, ahol $x^{\mu}_{\mathcal{A}}$ jelöli az egyes objektumok tömegközéppontja világvonalának koordinátáit, [ ] antiszimmetrizálást jelöl, és az integrálást a test határain belül végezzük el. Az energia-impulzus tenzor szimmetrikusságából és divergenciamentességéből az egyes testek spintenzorára vonatkozó

$$v^{\alpha} S^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = (p^{\mu} v^{\nu} - p^{\nu} v^{\mu}) \ , \qquad v^{\alpha} p^{\nu}{}_{;\alpha} = -\frac{1}{2} R^{\nu}_{\mu\rho\sigma} S^{\rho\sigma} v^{\mu} \tag{3.2}$$

egyenletrendszerre jutunk, ahol p^{μ} a test négyesimpulzusa, míg v^{μ} annak négyessebesége, vagyis a test világvonalának érintője, és a konvenció szerint a pontosvessző a kovariáns deriválást jelöli. Ezen egyenletek segítségével határozhatjuk meg a spin-pálya kölcsönhatás összefüggéseit. Ehhez definiáljuk az egyes testek forgását jellemző spinvektort

$$S^{i}_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} S^{jk}_{\mathcal{A}} \ . \tag{3.3}$$

Az SSC mértékszabadság. Azonban az $S^{\mu\nu}$ mennyiség alakját a fenti egyenletek nem határozzák meg teljesen, így annak megválasztásában további szabadságunk van. Ezt különböző SSC (spin supplementary condition) mértékválasztásokkal kezeljük, és jelenleg három, jól elkülöníthető SSC mértéket szokás használni [30].

Az első, és leggyakrabban használt mértékválasztás a Pirani által bevezetett [26] I-es számú, vagy kovariáns SSC, melyet az

$$S^{\mu\nu} v_{\nu} = 0 \tag{3.4}$$

összefüggés definiál.

A második a Tulczyjew-Dixon (SSC II) feltétel

$$S^{\mu\nu} p_{\nu} = 0 \ , \tag{3.5}$$

amelynek előnye, hogy az ennek segítségével kiszámolt poszt-newtoni Lagrange-függvény explicit kifejezésében nem jelenik meg a gyorsulás [27, 28].

A harmadik pedig a Corinaldesi-Papapetrou (SSC III) feltétel [29]

$$S^{\mu 0} = 0 \ . \tag{3.6}$$

Ezen SSC-választások segítségével definiálhatók az egyes testek tömegközépponti világvonalai, ezek között az áttérést az

$$x_{\mathcal{A}}^{i(k')} = x_{\mathcal{A}}^{i(k)} + \frac{k - k'}{m_{\mathcal{A}}}(\mathbf{v}_{\mathcal{A}} \times \mathbf{S}_{\mathcal{A}})^i \tag{3.7}$$

transzformációval adhatjuk meg, ahol a k konstanst az egyes SSC-választások esetén a

$$S_{\mathcal{A}}^{i0} + kS_{\mathcal{A}}^{ij}v_j = 0 \tag{3.8}$$

egyenlettel definiálhatjuk. A $\mathbf{v}_{\mathcal{A}}$ vektor a v^μ négyesvektor térbeli komponenseiből álló vektor. A kovariáns SSC esetében $k = 1$, a Tulczyjev-Dixon SSC-nél $k = 1/2$, míg a Corinaldesi-Papapetrou SSC esetén $k = 0$.

A spin-pálya kölcsönhatás gyorsulásvektorának alakja. Kettősrendszerek esetén a (3.2) egyenletrendszer és egy adott SSC feltétel választásával kiszámítható a $v_{\mathcal{A}}^\mu$ négyessebesség kovariáns deriváltjára vonatkozó mozgásegyenlet [30]. Ezen egyenletre alkalmazható a posztnewtoni közelítés, és ennek eredményeként a különböző SSC-választások esetén a mozgásegyenletekben, vagyis az $\mathbf{a} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$ relatív gyorsulásvektor kifejezésében az alábbi spin-pálya korrekciókat kapjuk

$$\mathbf{a}_{SSC-I} = \frac{1}{r^3}\Big\{6\mathbf{n}\left[(\mathbf{n}\times\mathbf{v})\left(\mathbf{S}+\boldsymbol{\sigma}\right)\right] - \mathbf{v}\times(4\mathbf{S}+3\boldsymbol{\sigma}) + 3\dot{r}\mathbf{n}\times(2\mathbf{S}+\boldsymbol{\sigma})\Big\}\,, \tag{3.9}$$

$$\mathbf{a}_{SSC-II} = \frac{1}{2r^3}\Big\{3\mathbf{n}\left[(\mathbf{n}\times\mathbf{v})\left(4\mathbf{S}+3\boldsymbol{\sigma}\right)\right] - \mathbf{v}\times(4\mathbf{S}+3\boldsymbol{\sigma}) + 3\dot{r}\mathbf{n}\times(4\mathbf{S}+3\boldsymbol{\sigma})\Big\}\,, \tag{3.10}$$

$$\mathbf{a}_{SSC-III} = \frac{1}{r^3}\Big\{3\mathbf{n}\left[(\mathbf{n}\times\mathbf{v})\left(2\mathbf{S}+\boldsymbol{\sigma}\right)\right] - \mathbf{v}\times(4\mathbf{S}+3\boldsymbol{\sigma}) + 6\dot{r}\mathbf{n}\times(\mathbf{S}+\boldsymbol{\sigma})\Big\}\,, \tag{3.11}$$

ahol $\mathbf{S} := \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ a teljes, és $\boldsymbol{\sigma} := \zeta_1\mathbf{S}_1 + \zeta_2\mathbf{S}_2$ a tömegaránnyal súlyozott spinvektorok, és ez utóbbiban a tömegarányok $\zeta_1 := m_2/m_1$ és $\zeta_2 := m_1/m_2$. A fenti egyenletekben az $\mathbf{r}$ vektor a kettősrendszert alkotó két kompakt objektumot összekötő szeparációs vektor, melynek hosszát r-el jelöljük, irányvektora $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, $\mathbf{v}$ pedig a relatív sebességvektor, melynek hossza v, illetve $\dot{r}$ a szeparációs vektor hosszának időderiváltja [48].

A spin hatásainak figyelembe vételekor a fentieken kívül szükség van a spinvektorok dinamikáját leíró, széles körben kutatott spin-precessziós egyenletekre is [31, 32, 33], melyeket a következő fejezetben mutatok be.

3.1.2. A kettősrendszer leírásának alapjai az általános esetben

Munkám során a kovariáns SSC-választással éltem, és az általam felhasznált eredmények is ebben a mértékben születtek meg. A dolgozat további részében a testek forgását tartalmazó összefüggések ebben a mértékben érvényesek. Ahol ettől eltérés található, ott azt külön jelezni fogom.

A Lagrange-függvény és a spin-precesszió. A testek forgásának bevezetése és a posztnewtoni közelítés 2.2.1 fejezetben bemutatott módszerének alkalmazása kompakt kettősrendszerek esetére az alábbi eredményekre vezet [31, 32, 33]. A mozgás leírásának alapját képező

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} \tag{3.12}$$

mozgásegyenletben a gyorsulás

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_N + \mathbf{a}_{PN} + \mathbf{a}_{SO} \tag{3.13}$$

alakban bontható fel, ahol

$$\mathbf{a}_N = -\frac{M}{r^2}\mathbf{n} \tag{3.14}$$

a legalacsonyabb, newtoni rendhez tartozó gyorsulás, illetve

$$\mathbf{a}_{PN} = -\frac{M}{r^2}\left\{\mathbf{n}\left[(1+3\eta)v^2 - 2(2+\eta)\frac{M}{r} - \frac{3}{2}\eta\dot{r}\right] - 2(2-\eta)\dot{r}\mathbf{v}\right\} \tag{3.15}$$

írja le az 1 PN rendű relativisztikus korrekciókat, és

$$\mathbf{a}_{SO} = \frac{1}{r^3}\left\{6\mathbf{n}\left[(\mathbf{n}\times\mathbf{v})\left(\mathbf{S}+\boldsymbol{\sigma}\right)\right] - \mathbf{v}\times\left(4\mathbf{S}+3\boldsymbol{\sigma}\right) + 3\dot{r}\mathbf{n}\times\left(2\mathbf{S}+\boldsymbol{\sigma}\right)\right\} \tag{3.16}$$

a spin-pálya kölcsönhatás járuléka, amely a mozgás leírásában 1,5 PN rendben lép fel. A fenti kifejezésekben $M = m_1 + m_2$ a kettősrendszer teljes, míg $\mu = m_1 m_2/M$ annak redukált tömege, és $\eta = \mu/M$. Ezen gyorsuláshoz az

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_{PN} + \mathcal{L}_{SO} \ , \tag{3.17}$$

Lagrange-függvény tartozik, ahol

$$\mathcal{L}_N = \frac{\mu \mathbf{v}^2}{2} + \frac{M\mu}{r} , \tag{3.18}$$

$$\mathcal{L}_{PN} = \frac{1}{8}(1-3\eta)\mu v^4 + \frac{M\mu}{2r}\left[(3+\eta)v^2 + \eta\dot{r}^2 - \frac{M}{r}\right] , \tag{3.19}$$

$$\mathcal{L}_{SO} = \frac{2\mu}{r^3}\mathbf{v}\left[\mathbf{r}\times(\mathbf{S}+\boldsymbol{\sigma})\right] + \frac{\eta}{2}\mathbf{v}\left[\mathbf{a}\times\boldsymbol{\sigma}\right] . \tag{3.20}$$

A mozgás leírásakor a továbbiakban ezt a Lagrange-függvényt tekintjük kiindulópontnak.

Azonban a rendszer dinamikájának leírását ki kell egészítenünk a forgást reprezentáló spinvektorok viselkedését meghatározó spin-precessziós egyenletek bevezetésével [31], vagyis a Lagrange-függvények mellett fel kell használnunk a

$$\dot{\mathbf{S}}_1 = \frac{1}{r^3}\left[\frac{4+3\zeta_1}{2}\mathbf{L}_N - \mathbf{S}_2 + \frac{3}{r^2}(\mathbf{r}\mathbf{S}_2)\mathbf{r}\right]\times\mathbf{S}_1 \tag{3.21}$$

$$\dot{\mathbf{S}}_2 = \frac{1}{r^3}\left[\frac{4+3\zeta_2}{2}\mathbf{L}_N - \mathbf{S}_1 + \frac{3}{r^2}(\mathbf{r}\mathbf{S}_1)\mathbf{r}\right]\times\mathbf{S}_2 \tag{3.22}$$

egyenleteket, ahol

$$\mathbf{L}_N := \mu\mathbf{r}\times\mathbf{v} \tag{3.23}$$

a pályasíkot definiáló newtoni impulzusmomentum vektor.

A későbbiekben még szükség lesz a tömegkülönbséget kifejező $\delta m = m_1 - m_2$, és a spinvektorokat tartalmazó $\boldsymbol{\Delta} = M(\mathbf{S}_2/m_2 - \mathbf{S}_1/m_1)$ rövid jelölésekre.

Megmaradó mennyiségek. A fenti rendszer számunkra legfontosabb tulajdonsága, hogy a sugárzási rendig (2,5 PN) több mozgásállandót is származtathatunk a (3.17) Lagrange-függvényből, és ezek adják majd a (3.13) mozgásegyenletek szétcsatolásának lehetőségét.

A mozgásállandók közül a legfontosabb a

$$\mathbf{J} := \mathbf{L}_N + \mathbf{L}_{PN} + \mathbf{L}_{SO} + \mathbf{S} \tag{3.24}$$

teljes impulzusmomentum-vektor, mely vektoriális értelemben is megmaradó mennyiség. A fenti egyenletben $\mathbf{L}_N$ jelöli a newtoni impulzusmomentumot, és

$$\mathbf{L}_{PN} := \mathbf{L}_N\left[\frac{1-3\eta}{2}v^2 + (3+\eta)\frac{M}{r}\right] , \tag{3.25}$$

illetve

$$\mathbf{L}_{SO} := \frac{\mu}{r^3}\left[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times (2\mathbf{S} + \boldsymbol{\sigma}))\right] - \frac{\eta}{2}[\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\sigma})] \tag{3.26}$$

az impulzusmomentum poszt-newtoni és spin-pálya korrekciói.

A radiális mozgásegyenlet kiszámításának és a pálya paraméterezésének a kulcsa az

$$E := E_N + E_{PN} + E_{SO} \tag{3.27}$$

megmaradó energia [56, 66], ahol

$$E_N = \frac{\mu}{2}v^2 - \frac{\mu M}{r} \tag{3.28}$$

$$E_{PN} = \frac{\mu}{2}\left[\frac{3}{4}(1-3\eta)v^4 + (3+\eta)v^2\frac{M}{r} + \eta\frac{M}{r}\dot{r}^2 + \left(\frac{M}{r}\right)^2\right] \tag{3.29}$$

$$E_{SO} = \frac{1}{r^3}\mathbf{L}_N\boldsymbol{\sigma}\ , \tag{3.30}$$

és az

$$\mathbf{L} := \mathbf{L}_N + \mathbf{L}_{PN} + \mathbf{L}_{SO} \tag{3.31}$$

impulzusmomentum-vektor L hossza, illetve annak az egyes spinvektorokkal vett $\mathbf{LS}_1$ és $\mathbf{LS}_2$ skalárszorzatai.

Továbbá, a spin-precessziós egyenletek megoldásakor figyelembe vettem, hogy a spinvektorok S_1 és S_2 hossza is csak sugárzási rendben változik, vagyis azokat is állandóknak tekinthetjük.

Az Euler-szögek bevezetése. Abból a célból, hogy a (3.13) vektoriális mozgásegyenletből skalármenyyiségekre vonatkozó szétcsatolt differenciálegyenletek rendszerét kapjuk, az $\mathbf{r}$ szeparációs vektort a $\mathbf{J}$-hez rögzített invariáns rendszerben az alábbi, Euler-szögekkel kifejezett alakba írjuk

$$\mathbf{r} = r\begin{pmatrix} \cos\Phi\cos\Psi - \cos\iota\sin\Phi\sin\Psi \\ \sin\Phi\cos\Psi + \cos\iota\cos\Phi\sin\Psi \\ \sin\iota\sin\Psi \end{pmatrix}\ , \tag{3.32}$$

ahol ι a $\mathbf{J}$ és $\mathbf{L}_N$ által bezárt szög, Φ írja le $\mathbf{L}_N$ (a pálya) precesszióját $\mathbf{J}$ körül, Ψ pedig az $\mathbf{r}$ szeparációs vektor helyzetét adja meg a pályasíkon [38]. Ezen szögmennyiségek segítségével egy tetszőleges, az invariáns rendszerben megadott $\mathbf{u}$ vektor koordinátái a pályasíkhoz és a szeparációs vektorhoz rögzített, úgynevezett együttmozgó rendszerben az

$$\mathbf{u}' = R_z(\Phi)R_x(\iota)R_z(\Psi)\mathbf{u} \tag{3.33}$$

transzformációs szabállyal számíthatók ki, ahol $R_{x_i}(\alpha)$ jelöli az x_i koordinátatengely körüli α szögű forgatást. A szeparációs vektor együttmozgó rendszerbeli $(r, 0, 0)$ alakjából ezen transzformációs szabály inverze segítségével kaphatjuk meg az invariáns rendszerben annak (3.32) alakját.

A fenti Euler-szögekre vonatkozóan van még egy további eredmény, amely a munkám során igen fontos szerepet kapott. A [38] cikk függelékében szereplő számolás megmutatja, hogy a ι nyílásszög a legalacsonyabb, azaz newtoni rendben zérus, vagyis azt felbontva

$$\iota = \iota_N + \iota_{PN} + \iota_S \tag{3.34}$$

alakban, $\iota_N = 0$. Továbbá, mivel a relativisztikus poszt-newtoni korrekciók nem módosítják a pályasík tulajdonságait [48], $\iota_{PN} = 0$, vagyis összesítve a nyílásszög $\iota = \iota_S$.

A pálya valódi anomália paraméterezése. A mozgás leírásának első lépése a pálya paraméterezése. Ennek bemutatása során a [39] és [40] cikkekben közölt eredményeket követem, amelyek közül az első a kovariáns SSC-ben tartalmazza a pálya valódi anomália paraméterezését a spin-pálya kölcsönhatás figyelembe vételével, míg a második ezt a paraméterezést a relativisztikus poszt-newtoni esetre alkalmazza. A pálya paraméterezése lényegében a fenti mozgásállandók segítségével felírt

$$\begin{aligned}
\dot{r}^2 &= \frac{2E}{\mu} + \frac{2M}{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} + \left(\dot{r}^2\right)_{PN} + \left(\dot{r}^2\right)_{SO} \ , \\
\left(\dot{r}^2\right)_{PN} &= 3(3\eta - 1)\frac{E^2}{\mu^2} + 2(7\eta - 6)\frac{EM}{\mu r} - 2(3\eta - 1)\frac{EL^2}{\mu^3 r^2} + (5\eta - 10)\frac{M^2}{r^2} + \\
&+ (-3\eta + 8)\frac{M^2 L^2}{\mu^2 r^3} \ , \\
\left(\dot{r}^2\right)_{SO} &= \frac{2E\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}}{M\mu^2 r^2} - \frac{2}{\mu r^3}(2\mathbf{LS} + \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma})
\end{aligned} \tag{3.35}$$

radiális mozgásegyenlet adott feltételek melletti megoldását jelenti. A radiális mozgásegyenletet az E és L mozgásállandók alakjából lehet kiszámítani. Az általam választott, a kepleri pályaparaméterezés általánosításaként előálló, úgynevezett valódi anomália paraméterezés feltételeinek meghatározásához szükség van a $\dot{r} = 0$ egyenletet kielégítő r_{min} és r_{max} fordulópontok alakjára,

$$r_{\substack{max\\min}} = \frac{M\mu \pm A_0}{-2E} + \delta r^{PN}_{\substack{max\\min}} + \delta r^{SO}_{\substack{max\\min}} \tag{3.36}$$

$$\delta r^{PN}_{\substack{max\\min}} = (\eta - 7)\frac{M}{4} \pm (\eta + 9)\frac{M^2\mu}{8A_0} \mp (3\eta - 1)\frac{A_0}{8\mu} \tag{3.37}$$

$$\delta r^{SO}_{\substack{max\\min}} = \frac{2\mathbf{LS} + \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}}{L^2 A_0}(A_0 \mp M\mu) \pm \frac{E\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}}{A_0 M\mu} \ , \tag{3.38}$$

ahol A_0 jelöli a Runge-Lenz vektor [37] hosszának legalacsonyabb rendű kifejezését, vagyis

$$A_0 = \sqrt{M^2\mu^2 + \frac{2EL^2}{\mu}} \ . \tag{3.39}$$

A fordulópontok csak 2,5 PN rendben, a sugárzás visszahatása által változnak, alacsonyabb rendben ezek a mennyiségek állandónak tekinthetők.

A valódi anomália paraméterezésnek az alábbi feltételeknek kell eleget tennie a

$$r(\chi = 0) = r_{min} \ , \qquad r(\chi = \pi) = r_{max} \ , \tag{3.40}$$

$$\frac{dr}{d(\cos\chi)} = -(\gamma_0 + \gamma_{PN} + \gamma_S)r^2 \ , \tag{3.41}$$

ahol γ_0 newtoni rendű, γ_{PN} 1 PN poszt-newtoni rendű, és γ_S a spin-pálya kölcsönhatáshoz tartozó állandók [39, 40, 41]. Eszerint az elvárásunk az, hogy a szeparációs vektor r hosszának $\cos\chi$ szerinti deriváltja minden rendben legyen arányos r négyzetével. Ezen feltételek alapján a szeparációs vektor hossza a χ paraméter függvényében a

$$\frac{2}{r(\chi)} = \left(\frac{1}{r_{min}} + \frac{1}{r_{max}}\right) + \left(\frac{1}{r_{min}} - \frac{1}{r_{max}}\right)\cos\chi \tag{3.42}$$

egyenlettel határozható meg, és az idő paraméterfüggését a

$$\frac{dt}{d\chi} = \frac{\mu r^2}{L} + \left(\frac{dt}{d\chi}\right)_{PN} + \left(\frac{dt}{d\chi}\right)_{SO} \tag{3.43}$$

$$\left(\frac{dt}{d\chi}\right)_{PN} = \frac{\mu r^2}{2L^3}\Big[(\eta - 13)M^2\mu^2 + (3\eta - 1)A_0^2 + (3\eta - 8)M\mu A_0\cos\chi\Big] \tag{3.44}$$

$$\left(\frac{dt}{d\chi}\right)_{SO} = -\frac{\mu r^2\Big[(2\mathbf{LS} + \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma})M\mu^2(3M\mu + A_0\cos\chi) - EL^2\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}\Big]}{ML^5} \tag{3.45}$$

differenciálegyenlet megoldása szolgáltatja. A megoldás azonban nem invertálható analitikusan, vagyis a χ paraméter időfüggése csak impliciten határozható meg, vagy valamilyen közelítő módszer segítségével.

3.1.3. A kettősrendszer mozgása próbatest esetben

Külön fejezetet szentelek a mozgás leírásának a próbatest (vagy extrém tömegarányú) határesetben, mivel ekkor a mozgás teljes leírása, vagyis az Euler-szögekre vonatkozó egyenletek is rendelkezésre állnak a [37] cikk függeléke alapján.

A próbatest esetet a Lense-Thirring közelítésben tárgyaljuk [43]. A közelítés egy nagy tömegű, központi, forgó objektum körüli geodetikusok leírásával adja meg a kettősrendszer dinamikáját, amikor $m_2 \ll m_1$ és S_2=0. Mivel csak a központi test forgása által okozott effektusokra vagyunk kíváncsiak, a relativisztikus poszt-newtoni effektust elhanyagoljuk a leírás során.

A fenti feltételekből fakadóan a kettősrendszer paramétereit

$$M \approx \delta m \approx m_1 \ , \qquad \mu \approx m_2 \ , \qquad \eta \approx 0 \tag{3.46}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \ , \qquad \boldsymbol{\Delta} = -\frac{M}{m_1}\mathbf{S}_1 \approx -\mathbf{S}_1 \ , \qquad \boldsymbol{\sigma} \approx 0 \tag{3.47}$$

közelítő alakban írhatjuk fel.

Ebben az esetben a gyorsulás

$$\mathbf{a} = -\frac{m_1}{r^2}\mathbf{n} + \frac{2}{r^3}\Big\{3\mathbf{n}\left[(\mathbf{n}\times\mathbf{v})\mathbf{S}_1\right] - 2\left[\mathbf{v}\times\mathbf{S}_1\right] + 3\dot{r}\left[\mathbf{n}\times\mathbf{S}_1\right]\Big\} \tag{3.48}$$

alakú, illetve az ebből adódó Lagrange-függvény

$$\mathcal{L} = \frac{m_2\mathbf{v}^2}{2} + \frac{m_1 m_2}{r} + \frac{2m_2}{r^3}\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\times\mathbf{S}_1\right) \ . \tag{3.49}$$

További lényeges egyszerűsödést jelent, hogy megvizsgálva a spin precesszióját leíró (3.21) egyenlet relatív PN rendjét, a

$$\dot{\mathbf{S}}_1 \sim \frac{m_2}{m_1}\epsilon \tag{3.50}$$

eredményre jutunk, ahol ϵ a (2.30) poszt-newtoni paraméter, vagyis mivel a testek tömegaránya elhanyagolható, a spin precessziója is az.

Mindezt figyelembe véve a teljes impulzusmomentum az

$$\mathbf{J} = m_2 \mathbf{r} \times \mathbf{v} + \frac{2m_2}{r^3}[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{S}_1)] + \mathbf{S}_1 \tag{3.51}$$

alakot ölti, illetve

$$E = \frac{m_2}{2} v^2 - \frac{m_1 m_2}{r} \ . \tag{3.52}$$

Az $\mathbf{L}$ vektor hossza és a spinvektorral vett skalárszorzata is mozgásállandó. Ez utóbbi helyett a vektor $\mathbf{S}$ irányú vetületét (L_z) vezetjük be mozgásállandóként.

Az Euler-szögek bevezetése. Az általános esethez hasonlóan az $\mathbf{r}$ szeparációs vektor komponenseit itt is Euler-szögekkel kívánjuk felírni, azonban az invariáns koordinátarendszert itt a központi test forgását leíró vektor irányához rögzítjük. Erre a spin-precesszió (3.50) becslés miatti elhanyagolása ad lehetőséget.

Első lépésként bevezetünk egy, az $\mathbf{L}$ impulzusmomentum-vektorhoz rögzített segéd-koordinátarendszert, és az invariáns rendszerrel ezt a Ψ', ι', Φ' szögekkel köthejük össze úgy, hogy a szeparációs vektor

$$\mathbf{r} = r \begin{pmatrix} \cos\Phi' \cos\Psi' - \cos\iota' \sin\Phi' \sin\Psi' \\ \sin\Phi' \cos\Psi' + \cos\iota' \cos\Phi' \sin\Psi' \\ \sin\iota' \sin\Psi' \end{pmatrix} \ , \tag{3.53}$$

alakú legyen az invariáns rendszerben, ahol ι' szög az $\mathbf{S}_1$ és $\mathbf{L}$ vektorok által bezárt szög, vagyis $L_z = L\cos\iota'$, Φ' írja le $\mathbf{L}$ precesszióját $\mathbf{S}_1$ körül, Ψ' pedig az $\mathbf{r}$ szeparációs vektor helyzetét adja meg az $\mathbf{L}$-re merőleges síkon.

Az imént bevezetett szögmennyiségekre vonatkozó mozgásegyenletek a dinamika [37]-beli leírása alapján a következők

$$\dot{\Psi}' = \frac{L}{m_2 r^2} \tag{3.54}$$

$$\dot{\Phi}' = \frac{2S_1}{r^3} \tag{3.55}$$

$$\dot{\iota}' = 0 \ . \tag{3.56}$$

A későbbi munka számára fontos ezen koordinátarendszerek mellett bevezetni az $\mathbf{L}_N$ newtoni impulzusmomentum vektorhoz rögzített együttmozgó rendszert. Ez formálisan azonos az általános esetben leírtakkal, vagyis egy tetszőleges, az invariáns rendszerben megadott **u** vektor az együttmozgó rendszerben

$$\mathbf{u}' = R_z(\Phi)R_x(\iota_N)R_z(\Psi)\mathbf{u} \tag{3.57}$$

alakú, vagyis ennek inverze alapján az invariáns rendszerben a szeparációs vektor

$$\mathbf{r} = r\begin{pmatrix} \cos\Phi\cos\Psi - \cos\iota\sin\Phi\sin\Psi \\ \sin\Phi\cos\Psi + \cos\iota\cos\Phi\sin\Psi \\ \sin\iota\sin\Psi \end{pmatrix} \tag{3.58}$$

lesz, ahol a Ψ, ι és Φ szögek a fenti jelentéssel bírnak, csak az **L** impulzusmomentum vektor helyett minden esetben a newtoni $\mathbf{L}_N$ kell értenünk. Az ezekre vonatkozó mozgásegyenletek a fenti, vesszős szögekkel fejezhetők ki

$$\dot{\Psi} = \frac{L}{m_2 r^2} + \frac{S_1\cos\iota'}{Lr^3}(2L - m_2 r\dot{r}\sin 2\Psi') \tag{3.59}$$

$$\dot{\Phi} = \frac{2S_1\sin\Psi'}{Lr^3}(m_2 r\dot{r}\cos\Psi' + 2L\sin\Psi') \tag{3.60}$$

$$\dot{\iota} = \frac{2S_1\sin\iota'\cos\Psi'}{Lr^3}(m_2 r\dot{r}\cos\Psi' + 2L\sin\Psi')\ . \tag{3.61}$$

A pálya valódi anomália paraméterezése. A próbatest esetben a radiális mozgásegyenlet

$$\dot{r}^2 = \frac{2E}{m_2} + \frac{2m_1}{r} - \frac{L^2}{m_2^2 r^2} - \frac{4L_z S_1}{m_2 r^3}\ , \tag{3.62}$$

és a valódi anomália paraméterezéssel szemben az elvárásaink

$$r(\chi = 0) = r_{min}\ , \qquad r(\chi = \pi) = r_{max}\ , \tag{3.63}$$

$$\frac{dr}{d(\cos\chi)} = -(\gamma_0 + S_1\gamma_S)r^2 \tag{3.64}$$

lesznek. Az ezeknek megfelelő paraméterezéssel a szeparációs vektor r hossza

$$r = \frac{L^2}{m_2(m_2 m_1 + A_0\cos\chi)} + \frac{4L_z S_1(A_0(2m_1^2 m_2^3 + 2EL^2) + m_1 m_2(2m_1^2 m_2^3 + 3EL^2)\cos\chi)}{A_0 L^2(m_2 m_1 + A_0\cos\chi)^2}\ , \tag{3.65}$$

illetve a valódi anomália paraméter és az idő közti implicit összefüggés

$$\frac{dt}{d\chi} = \frac{m_2 r^2}{L}\left[1 - \frac{2m_2^2 L_z S_1}{L^4}(3m_2 m_1 + A_0\cos\chi)\right]\ . \tag{3.66}$$

Ezeken túl a hullámformák kiszámításakor szükségünk lesz még a relatív sebességvektor hosszának

$$v^2 = \frac{2E}{m_2} + \frac{2m_1}{r} \tag{3.67}$$

kifejezésére is.

Ezzel lényegében összefoglaltam azokat az eredményeket, amelyek korábbi munkák alapján ismertek voltak a kettősrendszerek dinamikájára vonatkozóan, és munkám során kiindulópontul szolgáltak. Meg kell azonban jegyeznem, hogy az általános esetben több olyan paraméterezés és mozgásleírás is született, mely az általam számolt 1,5 PN rendnél magasabb korrekciókat is tartalmaz, azonban erőteljes egyéb megkötések mellett. Ilyen megkötések például az egyik, vagy mindkét test forgásának elhanyagolása, körpálya feltételezése, esetleg extrém tömegarányt, vagy éppen a testek tömegének egzakt egyenlőségét várják el a mozgás leírása során.

3.2. A kompakt kettősök által keltett gravitációs hullámok leírása

Ezen fejezetben a (2.109) egyenlet vizsgálata során jutunk el a kompakt kettősök által kibocsátott gravitációs hullámok leírásához. A munkám során legfeljebb 1,5 PN rendű effektusok leírását tűztem ki célul, ekkor a (2.109) egyenlet és az I, J, W, X, Y, Z multipólmomentumok alakja nagyban leegyszerűsödik.

Az első nemlineáris effektus a (2.8) és (2.6) egyenletek alkotta egyenletrendszerben 1,5 PN rendben lép fel, az úgynevezett faroktagon keresztül. Ezen effektusok hatását az irodalomban részletesen tárgyalják, és az az általam elért eredményekhez additívan járul hozzá, így a további tárgyalásból elhagyjuk azt. Ekkor az egyenletrendszer (2.109) megoldásának első, h magasabb hatványait tartalmazó tagjával nem kell foglalkoznunk, illetve a τ energia-impulzus pszeudotenzor is csak az anyag energia-impulzusából adódó tagokat tartalmazza.

A megoldást tovább egyszerűsíti, hogy rögzített, TT mértékben dolgozunk, így csak a szimmetrikus, spúrtalan (2.114) tömeg és (2.115) áram multipólmomentum kiszámítására lesz szükségünk, és ezek meghatározásában még további egyszerűsödést jelent, hogy a δ_l függvény integráljának (2.117) közelítő formulájában 1,5 PN rendben a végtelen összegnek csak az első néhány tagját kell figyelembe vennünk.

A testek forgását is figyelembe vevő eredmények és elméleti jóslatok elsősorban L. E. Kidder, C. M. Will és A. G. Wiseman munkásságához kötődnek. A hullámokra vonatkozó elmélet bemutatásakor a továbbiakban a [48] cikk gondolatmenetét követem.

A fenti megkötéseket figyelembe véve a (2.109) egyenlet alapján a metrika perturbációit leíró tenzor a TT mértékben

$$
\begin{aligned}
h^{ij}_{TT} &= \frac{2}{D}\left\{ I^{(2)ij} + \frac{1}{3}I^{(3)ijk}N^k + \frac{1}{12}I^{(4)ijkl}N^kN^l + \frac{1}{60}I^{(5)ijklm}N^kN^lN^m + \right.\\
&+ \left.\epsilon^{kl<i}\left[\frac{4}{3}J^{(2)j>k}N^l + \frac{1}{2}J^{(3)j>km}N^lN^m + \frac{2}{15}J^{(4)j>kmn}N^lN^mN^n\right]\right\}_{TT} \qquad (3.68)
\end{aligned}
$$

alakot ölti a tömeg- és áram-multipólmomentumok függvényében, ahol D jelöli a forrás és a detektor távolságát, illetve a felső indexek között megjelenő (p) index retardált idő szerinti p-edik deriváltat jelöl, N^i pedig a forrást és a detektort összekötő vektor komponensei [13]. Bevezetve a

$$
\Sigma(\mathbf{x}, t) = T^{00} + T^{ii} \; , \qquad \Sigma^i(\mathbf{x}, t) = T^{0i} \qquad (3.69)
$$

jelöléseket a (2.114) és (2.115) STF momentumokat az alábbi kifejezések adják

$$
\begin{aligned}
I^L(u) &= \int (x^L)^{STF}\Sigma(\mathbf{x}, u)d^3x - \frac{4(2l+1)}{(l+1)(2l+3)}\frac{d}{du}\int (x^{iL})^{STF}\Sigma^i(\mathbf{x}, u)d^3x + \\
&+ \frac{1}{2(2l+3)}\frac{d^2}{du^2}\int |\mathbf{x}|^2(x^L)^{STF}\Sigma(\mathbf{x}, u)d^3x \; , \qquad (3.70)
\end{aligned}
$$

$$
J^{iL} = \left\{\epsilon^{iab}\int \Sigma^b x^{aL}d^3x\right\}^{STF} \; , \qquad (3.71)
$$

ahol jelen esetben $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ és $\Sigma^i(\mathbf{x}, t)$ csak a forrás energia-impulzus tenzorától függnek.

3.2.1. A multipólmomentumok

A forrás modellje. A poszt-newtoni effektusok számításakor a legelterjedtebb a pontrészecske modell, különösen, mivel a testek alakjának deformációi által keltett hullámok a becslések szerint legkorábban 3,5 PN rendű effektusként lépnek fel. Azonban a testek forgásának leírásakor a pontforrás modell nem alkalmazható. Ehelyett az alábbiakban a testeket egymástól jól szeparált, gömbszimmetrikus, stacionárius, mereven forgó objektumként kezeljük, és tökéletes folyadékként írjuk le. Ebből adódóan az energia-impulzus tenzor

$$
\begin{aligned}
T^{00} &= \rho^*\left(1 + \Pi + \frac{1}{2}v^2 - U\right) \qquad (3.72)\\
T^{0i} &= \rho^* v^i \qquad (3.73)\\
T^{ij} &= \rho^* v^i v^j + p\delta^{ij} \; , \qquad (3.74)
\end{aligned}
$$

alakú, ahol v jelöli a sebességmezőt, Π a belső energiasűrűséget, U a newtoni gravitációs potenciált, p pedig a nyomást, illetve

$$\rho^* \;=\; \rho\left(1+\frac{1}{2}v^2+3U\right) \tag{3.75}$$

az úgynevezett "megmaradó sűrűség" [82].

A kvadrupólmomentum. A multipólmomentumok kiszámításakor több olyan lépést kell végrehajtanunk, melyek részletezésére itt nem térek ki, de a

$$\begin{aligned} I^{ij}(u) &= \sum_{\mathcal{A}}\int_{\mathcal{A}}(x^i x^j)^{STF}\rho^*(\mathbf{x})\left[1+\Pi+\frac{3}{2}v^2-U+3\frac{p}{\rho^*(\mathbf{x})}\right]d^3x+ \\ &+ \frac{1}{14}\frac{d^2}{dt^2}\int_{\mathcal{A}}\mathbf{x}^2(x^i x^j)^{STF}\rho^*(\mathbf{x})d^3x-\frac{20}{21}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{A}}(x^i x^j x^k)^{STF}\rho^*(\mathbf{x})v^k d^3x \end{aligned}$$

kvadrupólmomentumon keresztül annak legfontosabb lépéseit bemutatom [83].

Az első lépés, hogy az egyes testek dinamikájának figyelembe vételéhez áttérünk tömegközépponti rendszerbe. Bevezetve a $\overline{v}_{\mathcal{A}} = v^i - v^i_{\mathcal{A}}$, illetve $v^i_{\mathcal{A}} = \frac{dx^i_{\mathcal{A}}}{dt}$ jelöléseket az áttérést a

$$x^i_{\mathcal{A}} = \frac{1}{m_{\mathcal{A}}}\int_{\mathcal{A}} x^i\rho^*(\mathbf{x})\left[1+\Pi+\frac{1}{2}\overline{v}^2_{\mathcal{A}}-\frac{1}{2}\overline{U}_{\mathcal{A}}\right]d^3x \tag{3.76}$$

definíció felhasználásával hajthatjuk végre, ahol

$$m_{\mathcal{A}} = \int_{\mathcal{A}}\rho^*(\mathbf{x})\left[1+\Pi+\frac{1}{2}\overline{v}^2_{\mathcal{A}}-\frac{1}{2}\overline{U}_{\mathcal{A}}\right]d^3x\ , \tag{3.77}$$

illetve $\overline{U}_{\mathcal{A}}$ jelöli az $\mathcal{A}$-adik test newtoni potenciálját.

A 3.3 fejezet eddigi egyenletei az I-es számú SSC-választás esetén érvényesek, azonban a tömegközéppont fenti definíciója a II SSC-választás esetén igaz. A két világvonal közti áttérést a (3.7) egyenlet alapján a

$$x^i_{\mathcal{A}} \longrightarrow x^i_{\mathcal{A}}+\frac{1}{2m_{\mathcal{A}}}(\mathbf{v}_{\mathcal{A}}\times\mathbf{S}_{\mathcal{A}})^i \tag{3.78}$$

koordinátatranszformációval végezhetjük el, ezáltal a tömegközéppont definíciója ekkor már a kovariáns mértéknek megfelelő alakot ölti [30]. Ezen eredményeket (3.76)-ba helyettesítve a spinvektort a gömbszimmetria és a merev forgás elvárásainak megfelelően az abban fellépő

$$\int_{\mathcal{A}} \rho^*(\mathbf{x}) \overline{x}^a_{\mathcal{A}} \overline{v}^b_{\mathcal{A}} d^3x = \frac{1}{2}\epsilon^{iab} S^i_{\mathcal{A}} \tag{3.79}$$

típusú integrálokon keresztül vezethetjük be.

Végezetül áttérünk relatív koordinátákra, mivel a mozgásegyenleteink is ebben a rendszerben adottak, vagyis a multipólmomentumok kifejezéseibe az egyes testek $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ helyvektora helyébe behelyettesítjük a

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}\left[\frac{m_2}{M} + \frac{1}{2}\eta\frac{\delta m}{M}\left(v^2 - \frac{M}{r}\right)\right] + \frac{\eta}{M}(\mathbf{v} \times \mathbf{\Delta}) \tag{3.80}$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}\left[-\frac{m_1}{M} + \frac{1}{2}\eta\frac{\delta m}{M}\left(v^2 - \frac{M}{r}\right)\right] + \frac{\eta}{M}(\mathbf{v} \times \mathbf{\Delta}) \tag{3.81}$$

megfeleltetéseket, amelyekben $\mathbf{x}$ a szeparációs vektor, illetve $\mathbf{v}$ a relatív sebességvektor [84].

A fenti eredmények felhasználásával a kvadrupólmomentum alakja 1,5 PN rendig

$$\begin{aligned} I^{ij} &= \mu(x^i x^j)^{STF}\left[1 + \frac{29}{42}(1-3\eta)v^2 - \frac{1}{7}(5-8\eta)\frac{M}{r}\right] - \frac{4}{7}(1-3\eta)\mu r\dot{r}(x^i v^j)^{STF} + \\ &+ \frac{11}{21}(1-3\eta)\mu r^2 (v^i v^j)^{STF} + \frac{8}{3}\eta\left[x^i(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\sigma})^j\right]^{STF} - \frac{4}{3}\eta\left[v^i(\mathbf{x}\times\boldsymbol{\sigma})^j\right]^{STF} \end{aligned}$$

lesz, ami már alkalmas arra, hogy a különböző poszt-newtoni rendeket, illetve a testek forgásától függő tagokat elkülönítsük, ami a h^{ij}_{TT} tenzor kiszámításakor kulcsfontosságú lesz.

A további momentumok. A fenti transzformációkat a többi, számunkra releváns momentum esetén is elvégezve 1,5 PN rendben az alábbi eredményekre jutunk. A tömeg multipólmomentumok

$$\begin{aligned} I^{ijk} &= -(\delta m)\eta\Bigg\{(x^i x^j x^k)^{STF}\left[1 + \frac{1}{6}(5-19\eta)v^2 - \frac{1}{6}(5-13\eta)\frac{M}{r}\right] - \\ &- (1-2\eta)r\dot{r}(x^i x^j v^k)^{STF} + (1-2\eta)r^2(x^i v^j v^k)^{STF}\Bigg\}\ , \end{aligned} \tag{3.82}$$

$$I^{ijkl} = \mu(1-3\eta)(x^i x^j x^k x^l)^{STF}\ , \tag{3.83}$$

$$I^{ijklm} = (\delta m)\eta(1-2\eta)(x^i x^j x^k x^l x^m)^{STF}\ , \tag{3.84}$$

és az áram multipólmomentumok

$$
\begin{aligned}
J^{ij} &= -(\delta m)\eta\left\{[x^i(\mathbf{x}\times\mathbf{v})^j]^{STF}\left[1+\frac{1}{28}(13-68\eta)v^2+\frac{1}{14}(27+30\eta)\frac{M}{r}\right]+\right. \\
&+ \left.\frac{5}{28}(1-2\eta)r\dot{r}[v^i(\mathbf{x}\times\mathbf{v})^j]^{STF}\right\}-\frac{3}{2}\eta(x^i\Delta^j)^{STF}\ , \qquad (3.85)
\end{aligned}
$$

$$
J^{ijk} = \mu(1-3\eta)[x^ix^j(\mathbf{x}\times\mathbf{v})^k]^{STF}+2\eta(x^ix^j(S^k+\eta\Delta^k))^{STF}\ , \qquad (3.86)
$$

$$
J^{ijkl} = -(\delta m)\eta(1-2\eta)[x^ix^jx^k(\mathbf{x}\times\mathbf{v})^l]^{STF} \qquad (3.87)
$$

alakúak [47].

3.2.2. A h^{ij}_{TT} transzverzális spúrtalan tenzor

A munkám kiindulópontjául szolgáló h^{ij}_{TT} tenzor alakját a (3.68) egyenlet alapján a fenti multipólmomentumokból számíthajuk ki. A behelyettesítés után a deriváltak helyére beírjuk a (3.12) mozgásegyenlet adott rendű tagjait, így megkapjuk a perturbáló tenzor alakját. Ezt a rendek és a forgás miatt fellépő tagok különválasztásával az alábbi alakba írhatjuk

$$
h^{ij}_{TT} = \frac{2\mu}{D}\left[Q^{ij}+P^{0.5}Q^{ij}+PQ^{ij}+PQ^{ij}_{SO}+P^{1.5}Q^{ij}+P^{1.5}Q^{ij}_{SO}\right]_{TT}\ , \qquad (3.88)
$$

ahol

$$
Q^{ij} = 2\left(v^iv^j-\frac{M}{r}n^in^j\right) \qquad (3.89)
$$

a newtoni rendű kifejezés,

$$
P^{0,5}Q^{ij} = \frac{\delta m}{M}\left[3\frac{M}{r}\left(2n^{(i}v^{j)}-\dot{r}n^in^j\right)(\mathbf{Nn})+\left(\frac{M}{r}n^in^j-2v^iv^j\right)(\mathbf{Nv})\right] \qquad (3.90)
$$

a legalacsonyabb rendű PN korrekció [45, 46], a továbbiak pedig

$$\begin{aligned}
PQ^{ij} &= \frac{1-3\eta}{3}\left\{\frac{4M}{r}\left[3\dot{r}n^in^j - 8n^{(i}v^{j)}\right](\mathbf{Nn})(\mathbf{Nv}) + \left[6v^iv^j - \frac{2M}{r}n^in^j\right](\mathbf{Nv})^2 + \right.\\
&+ \left.\frac{M}{r}\left[\left(3v^2 - 15\dot{r}^2 + 7\frac{M}{r}\right)n^in^j + 30\dot{r}n^{(i}v^{j)} - 14v^iv^j\right](\mathbf{Nn})^2\right\} + \\
&+ \frac{4}{3}\frac{M}{r}\dot{r}(5+3\eta)n^{(i}v^{j)} + \left[(1-3\eta)v^2 - \frac{2}{3}(2-3\eta)\frac{M}{r}\right]v^iv^j + \\
&+ \frac{M}{r}\left[(1-3\eta)\dot{r}^2 - \frac{1}{3}(10+3\eta)v^2 + \frac{29}{3}\frac{M}{r}\right]n^in^j \qquad (3.91)
\end{aligned}$$

és [47] alapján

$$\begin{aligned}
P^{1,5}Q^{ij} &= \frac{\delta m}{M}(1-2\eta)\left\{\frac{M}{4r}\left[\left(45\dot{r}^2 - 9v^2 - 28\frac{M}{r}\right)n^in^j + 58v^iv^j - \right.\right.\\
&- \left.108\dot{r}n^{(i}v^{j)}\right](\mathbf{Nn})^2(\mathbf{Nv}) + \left[\frac{M}{2r}n^in^j - 2v^iv^j\right](\mathbf{Nv})^3 + \\
&+ \frac{M}{r}\left[\frac{5}{4}\left(3v^2 - 7\dot{r}^2 + 6\frac{M}{r}\right)\dot{r}n^in^j - \frac{1}{6}\left(21v^2 - 105\dot{r}^2 + 44\frac{M}{r}\right)n^{(i}v^{j)} - \right.\\
&- \left.\left.\frac{17}{2}\dot{r}v^iv^j\right](\mathbf{Nn})^3 + \frac{3}{2}\frac{M}{r}\left[10n^{(i}v^{j)} - 3\dot{r}n^in^j\right](\mathbf{Nn})(\mathbf{Nv})^2\right\} + \\
&+ \frac{\delta m}{4r}(\mathbf{Nn})\left\{n^in^j\dot{r}\left[\dot{r}^2(5-30\eta) - v^2(21-18\eta) + \frac{M}{3r}(242-24\eta)\right] - \right.\\
&- \left.\dot{r}v^iv^j(62+8\eta) + 2n^{(i}v^{j)}\left[\dot{r}^2(21+18\eta) - \frac{M}{3r}(128-36\eta) + v^2(11-6\eta)\right]\right\} + \\
&+ \frac{\delta m}{M}(\mathbf{Nv})\left\{v^iv^j\left[\frac{M}{2r}(3-8\eta) - v^2(1-5\eta)\right] - n^{(i}v^{j)}\frac{M}{r}\dot{r}(7+4\eta) - \right.\\
&- \left.n^in^j\frac{M}{r}\left[\frac{3}{4}(1-2\eta)\dot{r}^2 + \frac{1}{3}(26-3\eta)\frac{M}{r} - \frac{1}{4}(7-2\eta)v^2\right]\right\}, \qquad (3.92)
\end{aligned}$$

és a spinpálya korrekciók

$$PQ^{ij}_{SO} = \frac{2}{r^2}(\mathbf{\Delta}\times\mathbf{N})^{(i}n^{j)}\ , \qquad (3.93)$$

illetve

$$
\begin{aligned}
P^{1,5}Q^{ij}_{SO} &= \frac{2}{r^2}\Bigg\{ n^i n^j \left[(\mathbf{n}\times\mathbf{v})\left(12\mathbf{S}+6\frac{\delta m}{M}\mathbf{\Delta}\right)\right] - n^{(i}\left[\mathbf{v}\times\left(9\mathbf{S}+5\frac{\delta m}{m}\mathbf{\Delta}\right)\right]^{j)} + \\
&+ [3\dot r(\mathbf{Nn})-2(\mathbf{Nv})]\left[\left(\mathbf{S}+\frac{\delta m}{M}\mathbf{\Delta}\right)\times\mathbf{N}\right]^{(i} n^{j)} - v^{(i}\left[\mathbf{n}\times\left(2\mathbf{S}+2\frac{\delta m}{M}\mathbf{\Delta}\right)\right]^{j)} + \\
&+ \dot r n^{(i}\left[\mathbf{n}\times\left(12\mathbf{S}+6\frac{\delta m}{M}\mathbf{\Delta}\right)\right]^{j)} - 2(\mathbf{Nn})\left[\left(\mathbf{S}+\frac{\delta m}{M}\mathbf{\Delta}\right)\times\mathbf{N}\right]^{(i} v^{j)}\Bigg\}. \qquad (3.94)
\end{aligned}
$$

A gravitációs hullámok alakjának meghatározásakor a h^{ij}_{TT} tenzor fenti alakja lesz a kiindulópont, az ebből a korábbiakban bemutatott projekcióval képzett h_+ és $h_\times$ polarizációs állapotok meghatározása a munkám fő célkitűzése.

Az irodalomban az itt bemutatott tagokon kívül megtalálható a 2 PN rendhez tartozó járulékok közül a relativisztikus poszt-newtoni tag és a spin-spin kölcsönhatást leíró járulék is, azonban a 2 PN rendhez tartozó spin-pálya kölcsönhatás kifejezései még nem ismertek.

A forgás elhanyagolásával, illetve körpálya határesetben már 3–3,5 PN rendű jóslatok is rendelkezésre állnak [17, 36, 51], azonban ezeknél 3 PN rend fölött fellép egy regularizálandó divergencia, mivel az ilyen magas rendű számolásokban a forrás objektumait pontrészecskékként kezelik.

Összességében elmondható, hogy az összes releváns fizikai folyamatot figyelembe vevő eredmények csak 1,5 PN rendben teljesek, többek között ezért választottam ezt a rendet határként a munkám során.

4. A Lense-Thirring rendszer vizsgálata

A dolgozat ezen fejezetében összefoglalom a próbatest határesetben ($m_2 \ll m_1$, $S_2 = 0$) elért eredményeimet [69]. Az általános esetben nem rendelkezünk a mozgás teljes leírásával, amelyhez ráadásként a spin-precessziós egyenleteket is meg kell oldani. Ezzel szemben ha az egyik test tömege jóval kisebb a másikéhoz képest, akkor a spin precessziója elhanyagolható, és ebben az esetben a mozgás teljeskörű leírásával is rendelkezünk, ezért ez a határeset lehetőséget ad a polarizációs állapotok kiszámítására kidolgozott módszer kipróbálására.

A fejezet első részében az invariáns koordinátarendszer megválasztásának pontosítása után a valódi anomália paraméterezés segítségével kiintegrálom a 3.1.3 fejezetben megadott szögegyenleteket, és meghatározom a relatív sebességvektor komponenseit, ezáltal teljessé téve a mozgás leírását.

A második alfejezetben összefoglalom a h_+ és $h_\times$ polarizációs állapotok kiszámításának módszerét és az ehhez szükséges összefüggéseket, majd a mozgás leírásának felhasználásával meghatározom azok paraméterfüggését.

Végezetül körpálya határesetben is kiintegrálom a mozgásegyenleteket, azonban ebben az esetben expliciten az idő függvényében, majd ismét követve a módszer lépéseit, meghatározom a polarizációs állapotok időfüggését.

4.1. A kettősrendszer dinamikájának leírása

Koordinátarendszer-választás. A detektálható hullámforma polarizációs állapotainak meghatározásához a korábban bevezetett koordinátarendszer-választást ki kell egészítenünk néhány további feltevéssel.

Az invariáns rendszert az előző fejezetben leírtak alapján a spinvektorhoz rögzítjük, vagyis a z tengely annak irányába mutat. A későbbi számolások egyszerűbbé tétele érdekében a rendszer x és y koordinátáit úgy választjuk meg, hogy a line of sight $\mathbf{N}$ irányvektora az invariáns rendszerben

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \sin\gamma \\ 0 \\ \cos\gamma \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

alakú legyen, ahol γ az $\mathbf{S}_1$ és $\mathbf{N}$ vektorok közötti konstans szöget jelöli. Ez a megkötés, mivel a γ szög állandó, a szögekre vonatkozó differenciálegyenletek alakján nem változtat, csak az integrálási konstansként fellépő szögek értékében jelenhet meg, ami a dinamikát nem befolyásolja.

Az $\mathbf{L}_N$ és $\mathbf{r}$ vektorokhoz rögzített együttmozgó, illetve az $\mathbf{L}$-hez rögzített segéd-koordinátarendszer bevezetésénél az előző fejezet eredményei a mérvadóak, különös tekintettel az Euler-szögeket definiáló (3.53), (3.58) és (3.57) transzformációs szabályokra.

A relatív sebességvektor. Az előző fejezetben tárgyalt mozgásleírást még ki kell egészítenünk a relatív sebességvektor komponenseinek részletesebb vizsgálatával.

A szeparációs vektor (3.58) alakjából, a (3.57) transzformációs szabályból, illetve abból a feltételből, hogy a relatív sebességvektor a pályasíkban van, kiszámítható annak alakja az együttmozgó rendszerben:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r(\cos\iota\dot{\Phi} + \dot{\Psi}) \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{4.2}$$

A későbbi számítások leegyszerűsítésének céljából felbontjuk a sebességvektort a szeparációs vektor irányával párhuzamos, és arra merőleges komponensekre

$$\mathbf{v} = v_{\parallel}\mathbf{n} + v_{\perp}\mathbf{m} , \tag{4.3}$$

ahol $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ az együttmozgó rendszer x tengelyében fekvő egységvektor, $\mathbf{m}$ pedig az y tengely irányába mutat, illetve $v_{\parallel} = \dot{r}$.

A korábbiakban már szerepelt a sebességvektor v hossza (3.62) és $v_{\parallel} = \dot{r}$ komponense (3.67), ezek alapján kiszámítható a

$$v_{\perp}^2 = v^2 - \dot{r}^2 = \frac{L^2}{m_2^2 r^2} + \frac{4L_z S_1}{m_2 r^3} \tag{4.4}$$

komponens alakja is, amelyre a hullámforma vizsgálatakor szükségünk lesz.

4.1.1. A mozgásegyenletek kiintegrálása

A pálya (3.65) és (3.66) egyenletekkel adott paraméterezése segítségével kiintegrálhatjuk a szögekre vonatkozó mozgásegyenleteket. Ennek első lépéseként meghatározzuk a segéd-koordinátarendszer Euler-szögeinek paraméterfüggését. A (3.66) egyenlet felhasználásával a (3.54)-(3.55) mozgásegyenletek

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi'}{\partial\chi} &= \frac{\partial t}{\partial\chi}\frac{\partial\Psi'}{\partial t} = 1 - \frac{2m_2^2\cos\iota'(3m_2m_1 + A_0\cos\chi)}{L^3}S_1 \\ \frac{\partial\Phi'}{\partial\chi} &= \frac{\partial t}{\partial\chi}\frac{\partial\Phi'}{\partial t} = \frac{m_2^2(m_2m_1 + A_0\cos\chi)}{L^3}S_1 , \end{aligned} \tag{4.5}$$

lesznek, és ezeket kiintegrálva

$$
\begin{aligned}
\Psi' &= \Psi_0' + \chi - \frac{2m_2^2 \cos\iota' (3m_2 m_1 \chi + A_0 \sin\chi)}{L^3} S_1 \\
\Phi' &= \Phi_0' + \frac{m_2^2 A_0^2 (m_2 m_1 \chi + A_0 \sin\chi)}{L^3} S_1 \ .
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

A fentiekhez hasonlóan, illetve azokat felhasználva integrálhatjuk ki a Φ, ι és Ψ szögekre vonatkozó (3.59)-(3.61) mozgásegyenleteket:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Psi}{\partial\chi} &= 1 - \frac{m_2^2 \cos\iota' S_1}{2L^3} \Big[8m_2 m_1 + A_0 \cos(2\Psi_0' + \chi) - A_0 \cos(2\Psi_0' + 3\chi) \Big] \\
\frac{\partial\Phi}{\partial\chi} &= \frac{m_2^2 \cos\iota' S_1}{L^3} \Big[A_0 \cos\chi - A_0 \cos(2\Psi_0' + 3\chi) + m_2 m_1 - m_2 m_1 \cos(2\Psi_0' + 2\chi) \Big] \\
\frac{\partial\iota}{\partial\chi} &= \frac{m_2^2 \cos\iota' S_1}{4L^3} \Big[5A_0 \sin(2\Psi_0' + 3\chi) + 3A_0 \sin(2\Psi_0' + \chi) + 2A_0 \sin\chi + \\
&+ 8m_2 m_1 \sin(2\Psi_0' + 2\chi) \Big] \ ,
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

illetve az integrálást elvégezve

$$
\begin{aligned}
\Psi &= \Psi_0 + \chi - \frac{m_2^2 \cos\iota' S_1}{6L^3} \Big[24m_2 m_1 \chi + 3A_0 \sin(2\Psi_0' + \chi) - A_0 \sin(2\Psi_0' + 3\chi) \Big] \\
\Phi &= \Phi_0 + \frac{m_2^2 \cos\iota' S_1}{6L^3} \Big[6A_0 \sin\chi - 3m_2 m_1 \sin(2\Psi_0' + 2\chi) - 2A_0 \sin(2\Psi_0' + 3\chi) - \\
&- 6m_2 m_1 \Psi_0' + 6m_2 m_1 \chi \Big] \\
\iota &= \iota_0 + \frac{m_2^2 \cos\iota' S_1}{12L^3} \Big[5A_0 \cos(2\Psi_0' + 3\chi) + 9A_0 \cos(2\Psi_0' + \chi) + \\
&+ 12m_2 m_1 \cos(2\Psi_0' + 2\chi) + 6A_0 \cos\chi \Big] \ .
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

Fontos kiemelnem, hogy a (4.5) és (4.7) differenciálegyenletek megoldásakor figyelembe kell vennünk, hogy az integrálok kiszámítását olyan határok között végezzük el, hogy az integrálás során ne keveredjenek a rendek, a magasabb rendű perturbációk összegzése ne vezessen alacsonyabb rendű járulékokhoz. Az, hogy csak 1,5 PN relatív rendig végzünk számításokat, így a mozgás leírásában 2,5 PN rendben fellépő sugárzási effektusokat elhanyagoljuk, azonos feltételhez vezet, mely szerint az adott ϵ értékhez tartozó eredményeknek néhány ezer körülfordulásig pontosak.

A pályasík ι nyílásszöge a nulladrendű ι_0 konstans szög körül harmonikusan változik, míg a pálya precesszióját leíró Φ szög alakján látható, hogy a pálya folyamatos precesszáló mozgást végez a spin-pálya kölcsönhatásnak köszönhetően, és ezen felül a precesszióra egy további, harmonikus perturbáció rakódik.

A pályasíkon nulladrendben az elvárt módon mozog a szeparációs vektor, azonban spinben lineárisan megjelenik egy, a mozgás körfrekvenciáját módisító, χ-ben lineáris tag, és ráadásként itt is fellépnek harmonikus perturbációk a Ψ szög paraméterfüggésében.

Ezen eredmények alapján jól látható, hogy a spin-pálya kölcsönhatás nagymértékben módosítja a dinamikát, sokkal összetettebbé teszi azt.

4.2. A detektálható hullámforma kiszámítása

4.2.1. Az N, p, q vektortriád és a spinvektor

A h_+ és $h_\times$ polarizációs állapotok kiszámításához először szükségünk van a (2.27) projekció alapját képező vektortriád komponenseinek együttmozgó rendszerbeli alakjára, amit a (3.57) transzformációs szabály inverzének alkalmazásával, és az $\mathbf{N}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ triádra vonatkozó szabályok segítségével határozhatunk meg.

Az $\mathbf{N}$ vektor (4.1) invariáns rendszerbeli alakjából, felhasználva a (3.57) transzformációs szabályt, megkapjuk annak együttmozgó rendszerbeli alakját, ami

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \cos\Psi\cos\Phi\sin\gamma - \sin\Psi\cos\iota\sin\Phi\sin\gamma + \sin\Psi\sin\iota\cos\gamma \\ -\sin\Psi\cos\Phi\sin\gamma - \cos\Psi\cos\iota\sin\Phi\sin\gamma + \cos\Psi\sin\iota\cos\gamma \\ \sin\iota\sin\Phi\sin\gamma + \cos\iota\cos\gamma \end{pmatrix} . \tag{4.9}$$

A $\mathbf{p}$ vektorra három szabály vonatkozik, ezek egyértelműen meghatározzák annak komponenseit. A $\mathbf{p}$ vektor merőleges $\mathbf{N}$-re, a pályasíkban fekszik (vagyis merőleges $\mathbf{L}_N$-re), és természetesen egységvektor is. A fenti szabályok alkalmazásával a $\mathbf{p}$ vektor az együttmozgó rendszerben az alábbi alakban írható fel

$$\mathbf{p} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \sin\Psi\cos\Phi\sin\gamma + \cos\Psi\cos\iota\sin\Phi\sin\gamma - \cos\Psi\sin\iota\cos\gamma \\ \cos\Psi\cos\Phi\sin\gamma - \sin\Psi\cos\iota\sin\Phi\sin\gamma + \sin\Psi\sin\iota\cos\gamma \\ 0 \end{pmatrix} , \tag{4.10}$$

ahol

$$N := \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \sqrt{1 - N_z^2} = \sqrt{1 - (\sin\iota\sin\Phi\sin\gamma + \cos\iota\cos\gamma)^2} . \tag{4.11}$$

A fenti eredmények felhasználásával a

$$\mathbf{q} = \mathbf{N} \times \mathbf{p} \tag{4.12}$$

vektor komponensei könnyen meghatározhatóak.

Ahhoz, hogy a polarizációs vektorokat meghatározzuk, szükségünk van a spinvektor együttmozgó rendszerbeli alakjára. Ismét a már említett transzformációs szabályt alkalmazva a $(0, 0, S_1)$ spinvektorra a

$$\mathbf{S}_1 = S_1 \begin{pmatrix} \sin\Psi \sin\iota \\ \cos\Psi \sin\iota \\ \cos\iota \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

alakot kapjuk.

4.2.2. A formális hullámalak

A detektálható hullámforma polarizációs állapotainak kiszámításának egyszerűsítése érdekében, illetve a paraméterezéstől független módszer megalkotásának utolsó lépéseként a (3.88) tenzorból a (2.27) projekciók formális elvégzésével, illetve a sebességvektor (4.3) felbontásának felhasználásával a polarizációs állapotok olyan formális alakját kapjuk, amelyben már csak a jól ismert alakú vektorkomponensek és mennyiségek szerepelnek.

A "plusszos" és "keresztes" állapotok kifejezéseiben a (3.88) tenzorfelbontáshoz hasonlóan elkülönítjük a különböző poszt-newtoni rendekhez tartozó kifejezéseket

$$h_{\substack{+\\ \times}} = \frac{2m_2}{D}\left[h_{\substack{+\\ \times}}{}^{N} + h_{\substack{+\\ \times}}{}^{1SO} + h_{\substack{+\\ \times}}{}^{1.5SO}\right] , \tag{4.14}$$

ahol a "plusszos" polarizációs állapot kifejezésében

$$h_+^N = \left(\dot{r}^2 - \frac{m_1}{r}\right)(p_x^2 - q_x^2) + 2v_\perp \dot{r}(p_x p_y - q_x q_y) + v_\perp^2 (p_y^2 - q_y^2) \tag{4.15}$$

a legalacsonyabb rendű, newtoni tag, és

$$h_+^{1SO} = -\frac{1}{r^2}\Big[(\mathbf{qS}_1)p_x + (\mathbf{pS}_1)q_x\Big] \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} h_+^{1.5SO} &= \frac{2}{r^2}\Big[v_\perp S_{1z}(p_x^2 - q_x^2) - \dot{r}S_{1z}(p_x p_y - q_x q_y) + \dot{r}S_{1y}(p_x p_z - q_x q_z) + \\ &+ 2v_\perp S_{1x}(p_x p_z - q_x q_z)\Big] \end{aligned} \tag{4.17}$$

a spin-pálya korrekciók. Hasonlóan a "keresztes" polarizációs állapotra vonatkozó kifejezésben

$$h_\times^N = 2\left(\dot{r}^2 - \frac{m_1}{r}\right)p_x q_x + 2v_\perp \dot{r}(p_x q_y + q_x p_y) + 2v_\perp^2 p_y q_y \tag{4.18}$$

a newtoni járulék, és

$$
\begin{aligned}
h_\times^{1SO} &= -\frac{1}{r^2}\Big[(\mathbf{q}\mathbf{S}_1)q_x - (\mathbf{p}\mathbf{S}_1)p_x\Big] && (4.19)\\
h_\times^{1.5SO} &= \frac{2}{r^2}\Big[2v_\perp S_{1z}p_xq_x + \dot{r}S_{1z}(q_xp_y + p_xq_y) + \dot{r}S_{1y}(p_xq_z + q_xp_z) + \\
&+ 2v_\perp S_{1x}(p_xq_z + q_xp_z)\Big] && (4.20)
\end{aligned}
$$

a spin-pálya korrekciókat leíró tagok.

Ezen eredmények alapján már meghatározhatók a polarizációs állapotok kiszámításához szükséges módszer lépései.

1. Egy választott paraméterezés segítségével kiintegráljuk a (3.62), (3.54)-(3.56) és (3.59)-(3.61) mozgásegyenleteket.

2. Ezen eredményekkel meghatározzuk a sebessgévektor (3.67) hosszát, (3.62) és (4.4) komponenseit, illetve a spinvektor (4.13) alakját az együttmozgó rendszerben.

3. Kiszámítjuk az $\mathbf{N}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ vektortriád (4.9), (4.10) és (4.12) komponenseit, ismét az együttmozgó rendszerben.

4. Mindezen eredményeket behelyettesítjük a polarizációs állapotok (4.14), illetve (4.15)-(4.20) formális kifejezéseibe.

Ekkor a végeredmény a h_+ és $h_\times$ polarizációs állapotok a választott paraméter, illetve a mozgásállandók, a rendszer paraméterei és az integrálási konstansok függvényében.

4.2.3. A polarizációs állapotok szerkezete

Követve az imént leírt módszer lépéseit, és felhasználva a mozgásegyenletek valódi anomália paraméterezéssel történő kiintegrálásának eredményeit, a polarizációs állapotok szerkezetére az alábbi eredményeket kaptam.

Az (4.14) felbontásban szereplő járulékok a "plusszos" polarizáció esetén

$$
\begin{aligned}
h_+^N &= \sum_{i=0}^{4}\left[C_{+i}^N \cos i\chi + S_{+i}^N \sin i\chi\right] + S_1 \sum_{i=0}^{7}\left[C_{+i}^{NS} \cos i\chi + S_{+i}^{NS} \sin i\chi\right] + \\
&+ S_1\chi \sum_{i=0}^{4}\left[C_{+i}^{NS\chi} \cos i\chi + S_{+i}^{NS\chi} \sin i\chi\right] && (4.21)
\end{aligned}
$$

származik a formálisan legalacsonyabb rendű kifejezésből,

$$
\begin{aligned}
h_{+}^{1SO} &= S_1 \sum_{i=0}^{3} \left[C_{+i}^{1SO} \cos i\chi + S_{+i}^{1SO} \sin i\chi\right] \\
h_{+}^{1,5SO} &= S_1 \sum_{i=0}^{5} \left[C_{+i}^{1,5SO} \cos i\chi + S_{+i}^{1,5SO} \sin i\chi\right]
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

pedig a spin-pálya korrekciókból, illetve a "keresztes" polarizáció esetén

$$
\begin{aligned}
h_{\times}^{N} &= \sum_{i=0}^{4} \left[C_{\times i}^{N} \cos i\chi + S_{\times i}^{N} \sin i\chi\right] + S_1 \sum_{i=0}^{7} \left[C_{\times i}^{NS} \cos i\chi + S_{\times i}^{NS} \sin i\chi\right] + \\
&+ S_1\chi \sum_{i=0}^{4} \left[C_{\times i}^{NS\chi} \cos i\chi + S_{\times i}^{NS\chi} \sin i\chi\right]
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

adódik a newtoni kifejezésből, és

$$
\begin{aligned}
h_{\times}^{1SO} &= S_1 \sum_{i=0}^{3} \left[C_{\times i}^{1SO} \cos i\chi + S_{\times i}^{1SO} \sin i\chi\right] \\
h_{\times}^{1,5SO} &= S_1 \sum_{i=0}^{5} \left[C_{\times i}^{1,5SO} \cos i\chi + S_{\times i}^{1,5SO} \sin i\chi\right] .
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

A fenti kifejezésekben az egyes felharmonikusokhoz tartozó C és S együtthatók a rendszer paramétereit (m_1, m_2 és S_1), a mozgásállandókat (E, L és L_z), illetve a geometriából adódó γ és integrálási konstans szögek szinuszának és koszinuszának különböző hatványait tartalmazzák. Ezek a kifejezések rendelkezésre állnak, de ezen időtől független együtthatók részletes közlésére jelen dolgozatban nincs lehetőségem.

A h_{+}^{N} és $h_{\times}^{N}$ kifejezésekben megjelenő, a spinben lineáris kifejezések a dinamika spin-pálya perturbációkat tartalmazó leírásának behelyettesítéséből származnak, és 1,5 PN relatív rendű járulékot adnak a hullámformához. Ezeken belül a χ-ben lineáris tagok a

$$
\sin(\chi + a\chi S + b\sin\chi S) = \sin\chi + a\chi\cos\chi S + b\cos\chi\sin\chi S \tag{4.25}
$$

típusú sorfejtés során állnak elő. Ez utóbbiak a mozgásegyenletek kiintegrálásakor az integrálás határaira kirótt feltételnek köszönhetően nem okoznak problémát, az összefüggések érvényességi körében ezek a járulékok megmaradnak maximum 1,5 PN rendű kifejezéseknek.

Jól látható, hogy az egyre magasabb poszt-newtoni rendek egyre magasabb felharmonikusokat hoznak a leírásba, bár az általános eset vizsgálatakor azt is láthatjuk majd, hogy a spin-pálya kölcsönhatás az adott rendű kifejezések között mindig az alacsonyabb felharmonikusok együtthatóihoz ad járulékot.

4.3. Körpálya határeset

A pálya excentricitása által okozott hatások feltárásához szükségünk van a fenti módszer lépéseinek végigkövetésére a körpálya határesetben is. Komoly egyszerűsödést jelent, hogy ebben az esetben az egyes egyenleteket közvetlenül az idő szerint tudjuk kiintegrálni.

4.3.1. A mozgásegyenletek kiintegrálása

A körpálya határesetet a relatív sebességvektor

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{n} + r\omega\mathbf{m} \tag{4.26}$$

felbontásán keresztül definiálhatjuk az $\dot{r} = 0$ és $\dot{\omega} = 0$ feltételekkel. A felbontás alapján jól látható, hogy a pálya frekvenciája az Euler szögekkel

$$\omega = \cos\iota\dot{\Phi} + \dot{\Psi} \tag{4.27}$$

alakban fejezhető ki. A közelítésnek további fontos következménye, hogy a mozgásállandók között fennálló összefüggés miatt $A_0 = 0$.

A körpálya határeset feltételeinek teljesülésekor a sebességvektor hosszának kifejezéseit a [48] cikk (4.5) egyenlete alapján esetünkben a

$$v^2 = v_\perp^2 = r^2\omega^2 = \frac{m_1}{r}\left[1 - \frac{2}{m_1^2}(\mathbf{n}\times\mathbf{m})\mathbf{S}_1\left(\frac{m_1}{r}\right)^{3/2}\right] \tag{4.28}$$

felbontással írhatjuk fel.

A mozgásegyenleteket ebben a határesetben egyszerűen kiintegrálhatjuk, ha a szeparációs vektor r hosszát konstans paraméterként kezeljük. Ekkor

$$\begin{aligned} \Psi' &= \Psi_0' + \frac{Lt}{m_2 r^2} \\ \Phi' &= \Phi_0' + \frac{S_1 t}{r^3}\ . \end{aligned} \tag{4.29}$$

Ezen eredményeket a (3.59)-(3.61) mozgásegyenletekbe helyettesítve a

$$\begin{aligned}
\dot{\Psi} &= \frac{L}{m_2 r^2} + \frac{2\cos\iota' S_1}{r^3} \\
\dot{\Phi} &= \frac{4}{r^3}\sin\left(\Psi_0' + \frac{Lt}{m_2 r^2}\right)^2 S_1 \\
\dot{\iota} &= \frac{4\sin\iota'}{r^3}\cos\left(\Psi_0' + \frac{Lt}{m_2 r^2}\right)\sin\left(\Psi_0' + \frac{Lt}{m_2 r^2}\right) S_1
\end{aligned} \tag{4.30}$$

differenciálegyenletekre jutunk, melyek megoldása

$$\begin{aligned}
\Psi &= \Psi_0 + \left(\frac{L}{m_2 r^2} + \frac{2\cos\iota' S}{r^3}\right) t \\
\Phi &= \Phi_0 + \frac{2m_2 S}{Lr}\left[-\cos\left(\Psi_0' + \frac{Lt}{m_2 r^2}\right)\sin\left(\Psi_0' + \frac{Lt}{m_2 r^2}\right) + \Psi_0' + \frac{Lt}{m_2 r^2}\right] \\
\iota &= \iota_0 + \frac{2m_2 \sin\iota' S}{Lr}\sin\left(\Psi_0' + \frac{Lt}{m_2 r^2}\right)^2 .
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Látható, hogy a körpálya határesetben a spin nyílásszöge és precessziója hasonló viselkedést mutat, mint excentrikus pálya esetén, vagyis a nyílásszög egy konstans érték körül harmonikusan változik, a precessziót leíró Φ is a lineáris változás mellett tartalmaz harmonikus komponenst.

Ami a korábbiakhoz képest változás az az, hogy a szeparációs vektor irányát a pályasíkon megadó Ψ szög tisztán lineáris, a harmonikus tag ezesetben nem lép fel. Ezek szerint a pálya precessziójában a harmonikus viselkedés elsődleges oka a spin-pálya kölcsönhatás, míg a Ψ szög változásában ugyanezt a pálya excentrikussága hozza létre, amellett, hogy ugyanez okozza a szeparációs vektor hosszának harmonikus változását is.

4.3.2. A formális hullámalak

Körpálya határesetben a $\dot{r} = 0$ feltételnek köszönhetően a polarizációs állapotok formális kifejezései is nagyban leegyszerűsödnek. A sebességvektor hosszának (4.28) felbontását behelyettesítve a (4.15)-(4.20) kifejezések a következőképpen módosulnak:

$$h_+^N = -\left(\frac{m_1}{r}\right)\left[(p_x^2 - p_y^2) - (q_x^2 - q_y^2)\right] \tag{4.32}$$

$$h_+^{1SO} = -\left(\frac{m_1}{r}\right)^2 \frac{1}{m_1^2}\left[(\mathbf{q}\mathbf{S}_1)p_x + (\mathbf{p}\mathbf{S}_1)q_x\right] \tag{4.33}$$

$$h_+^{1.5SO} = \left(\frac{m_1}{r}\right)^{5/2} \frac{2}{m_1^2}\left[\left(2(p_x^2 - q_x^2) - (p_y^2 - q_y^2)\right) S_{1z} - q_x q_z S_{1x}\right] , \tag{4.34}$$

illetve

$$\begin{aligned}
h_\times^N &= -2\left(\frac{m_1}{r}\right)[p_x q_x - p_y q_y] && (4.35)\\
h_\times^{1SO} &= -\left(\frac{m_1}{r}\right)^2 \frac{1}{m_1^2}\Big[(\mathbf{q}\mathbf{S}_1)q_x - (\mathbf{p}\mathbf{S}_1)p_x\Big] && (4.36)\\
h_\times^{1.5SO} &= \left(\frac{m_1}{r}\right)^{5/2} \frac{4}{m_1^2}\Big[S_{1z}(p_x q_x - p_y q_y) + p_x q_z S_{1x}\Big]\ . && (4.37)
\end{aligned}$$

A sebesség (4.28) felbontásának fő előnye, hogy az m_1/r faktor hatványai szerint az egyes poszt-newtoni rendek jól láthatóan elkülönülnek.

A módszer lényegében az excentrikus pálya esetében közölttel azonos, csak ebben a határesetben nem kell parametrizációt választanunk, hanem az egyenleteket expliciten időben számolhatjuk ki.

4.3.3. A detektálható hullámalak szerkezete

A módszer lépéseit végigkövetve a körpálya határesetben is megkaphatjuk a már expliciten időtől függő hullámforma jóslatokat. A h_+ és $h_\times$ polarizációk alakja rendről rendre

$$\begin{aligned}
h_+^N &= \frac{m_1}{r}\left[c_{+2,1}^N \cos\left(2\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + s_{+2,1}^N \sin\left(2\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + a_{+1}^N\right] +\\
&+ \frac{E}{m_2}\left[c_{+2,2}^N \cos\left(2\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + s_{+2,2}^N \sin\left(2\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + a_{+2}^N\right] +\\
&+ \frac{m_1 m_2 S_1}{r^2 L}\sum_{i=0}^{2}\left[c_{+2i,1}^{NS} \cos\left(i\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + s_{+2i,1}^{NS} \sin\left(i\frac{L}{m_2 r^2}t\right)\right] +\\
&+ \frac{E S_1}{r L}\sum_{i=0}^{2}\left[c_{+2i,2}^{NS} \cos\left(i\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + s_{+2i,2}^{NS} \sin\left(i\frac{L}{m_2 r^2}t\right)\right] +\\
&+ \frac{m_1 m_2 S_1 t}{r^2 L}\left[c_{+2,1}^{NSt} \cos\left(2\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + s_{+2,1}^{NSt} \sin\left(2\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + a_{+1}^{NSt}\right] +\\
&+ \frac{E S_1 t}{L r}\left[c_{+2,2}^{NSt} \cos\left(2\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + s_{+2,2}^{NSt} \sin\left(2\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + a_{+2}^{NSt}\right]\\
h_+^{1SO} &= \frac{m_2^4 m_1^2 S_1}{L^4}\left[c_+^{1SO} \cos\left(\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + s_+^{1SO} \sin\left(\frac{L}{m_2 r^2}t\right)\right]\\
h_+^{1,5SO} &= \frac{m_2^5 m_1^3 S_1}{L^5}\left[c_+^{1,5SO} \cos\left(2\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + s_+^{1,5SO} \sin\left(2\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + a_+^{1,5SO}\right]\ , && (4.38)
\end{aligned}$$

illetve

$$
\begin{aligned}
h_\times^N &= \frac{m_1}{r}\left[c_{\times 2,1}^N \cos\left(2\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + s_{\times 2,1}^N \sin\left(2\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + a_{\times 1}^N\right] + \\
&+ \frac{E}{m_2}\left[c_{\times 2,2}^N \cos\left(2\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + s_{\times 2,2}^N \sin\left(2\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + a_{\times 2}^N\right] + \\
&+ \frac{m_1 m_2 S_1}{r^2 L}\sum_{i=0}^{2}\left[c_{\times 2i,1}^{NS} \cos\left(i\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + s_{\times 2i,1}^{NS} \sin\left(i\frac{L}{m_2 r^2}t\right)\right] + \\
&+ \frac{E S_1}{r L}\sum_{i=0}^{2}\left[c_{\times 2i,2}^{NS} \cos\left(i\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + s_{\times 2i,2}^{NS} \sin\left(i\frac{L}{m_2 r^2}t\right)\right] + \\
&+ \frac{m_1 m_2 S_1 t}{r^2 L}\left[c_{\times 2,1}^{NSt} \cos\left(2\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + s_{\times 2,1}^{NSt} \sin\left(2\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + a_{\times 1}^{NSt}\right] + \\
&+ \frac{E S_1 t}{L r}\left[c_{2,2}^{NSt} \cos\left(2\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + s_{2,2}^{NSt} \sin\left(2\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + a_{2}^{NSt}\right] \\
h_\times^{1SO} &= \frac{m_2^4 m_1^2 S_1}{L^4}\left[c_\times^{1SO} \cos\left(\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + s_\times^{1SO} \sin\left(\frac{L}{m_2 r^2}t\right)\right] \\
h_\times^{1,5SO} &= \frac{m_2^5 m_1^3 S_1}{L^5}\left[c_\times^{1,5SO} \cos\left(2\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + s_\times^{1,5SO} \sin\left(2\frac{L}{m_2 r^2}t\right) + a_\times^{1,5SO}\right] .
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

A newtoni kifejezésekben fellépő, spinben lineáris tagokra és az időt lineárisan tartalmazókra a korábbi megállapítások igazak. Az egyes felharmonikusokhoz tartozó együtthatókból leválasztottam a mozgásállandókat, így a c és s együtthatók már csak az integrálás során fellépő ι_0', ι_0, Φ_0, Ψ_0', Ψ_0, illetve a γ konstans szögek szinuszának és koszinuszának hatványai szerepelnek.

A legalacsonyabb rendű eredmények egyértelműen visszaadják a kvadrupól formalizmus azon eredményét, mely szerint körpálya határesetben legalacsonyabb rendben a detektált hullám frekvenciája a pályafrekvencia kétszerese.

A pálya excentrikusságának és a testek forgásának a hatásait az általános esetben, a relativisztikus PN korrekciók figyelembe vételekor a jelenleginél részletesebben is vizsgálni fogom. Akkor visszatérek a próbatest eset azon formalizmusban történő vizsgálatára, illetve annak a Lense-Thirring leírással való kapcsolatára is.

5. Kompakt kettősök által keltett gravitációs hullámok

Ezen fejezetben bemutatom munkám fő eredményeit, az általános, tetszőleges tömegű és spinű kompakt kettős esetének leírását 1,5 PN relatív rendig [73, 74].

Először a mozgás 3.1.2 fejezetben bemutatott leírását kiegészítem a spinprecessziós egyenletek megoldásának módszerével, illetve a kettős mozgását jellemző szögekre vonatkozó mozgásegyenletek felírásával. A leírás részeként pontosítom az invariáns és együttmozgó koordinátarendszer bevezetésének feltételeit. Ezek után a kiszámolt mozgásegyenleteket a valódi anomália paraméterezés segítségével kiintegrálom, ezáltal megadva a mozgás analitikusan elérhető legteljesebb leírását.

Másodszor, meghatározom a polarizációs állapotok kiszámításának módszerét, és kiszámolom az egyes lépésekben felhasznált összefüggéseket. A második alfejezet ezen eredményeken túl tartalmazza a polarizációs állapotok valódi anomália paramétertől függő alakját, és annak rövid elemzését is.

A harmadik alfejezetben tárgyalom a körpálya határesetet, azon belül a mozgásegyenletek kiintegrálását, illetve a polarizációs állapotok alakjának meghatározását.

A fejezet végén rátérek a próbatest esetben elért eredményekkel való összehasonlításra. Az általam adott mozgásleírás és a Lense-Thirring közelítés különbségei miatt az összefüggés nem triviális.

5.1. A mozgás leírása

A 3.2 fejezetben bemutattam a kettősök mozgásának leírására vonatkozó korábbi eredményeket. A próbatest esettel ellentétben itt nem álltak rendelkezésemre a szögekre vonatkozó mozgásegyenletek, így első lépésként ki kellett egészítenem a mozgás leírását ezekkel az egyenletekkel. Azonban ezekhez szükségem volt a spin-precessziós egyenletek kiintegrálására is.

5.1.1. A koordinátarendszerek megválasztása

Az invariáns és együttmozgó koordinátarendszerek. A 3.2. fejezetben szereplő koordinátarendszer-választást ebben az esetben is ki kellett egészítenem azzal a feltétellel, hogy az invariáns (ezesetben a $\mathbf{J}$ teljes impulzusmomentum vektorhoz rögzített) koordinátarendszer x és y koordinátatengelyeit úgy állítjuk be, hogy a forrást és a detektort összekötő egyenes irányvektora

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \sin\gamma \\ 0 \\ \cos\gamma \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

alakú legyen, ahol γ az $\mathbf{N}$ és a $\mathbf{J}$ teljes impulzusmomentum vektorok által bezárt konstans szög.

Az együttmozgó rendszert a korábbiak szerint, vagyis az $\mathbf{r}$ szeparációs és $\mathbf{L}_N$ newtoni impulzusmomentum vektorokhoz rögzítve vezettem be, és a két koordinátarendszer közötti áttérést a (3.33) transzformációs szabály szolgáltatja az Euler-szögek függvényében.

Ekkor a szeparációs vektor komponensei az invariáns rendszerben a (3.32) képlettel adhatók meg, és annak deriválásával és az együttmozgó rendszerbe való transzformálásával megkaptam a relatív sebességvektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\left(\cos\iota\dot{\Phi} + \dot{\Psi}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

alakját az együttmozgó rendszerben. Az egyenletek egyszerűsítése érdekében a relatív sebességvektort a próbatest esethez hasonlóan, (4.3) szerint felbontottam azt a szeparációs vektorral párhuzamos $v_\parallel = \dot{r}$ és arra merőleges $v_\perp$ komponensekre.

A dinamikai mennyiségek alakja. Annak érdekében, hogy a számolások során könnyen el tudjam különíteni a különböző poszt-newtoni rendekhez tartozó kifejezéseket, minden releváns dinamikai mennyiséget az alábbi formában bontottam fel

$$\begin{aligned} r &= r_N + r_{PN} + r_S \ , \qquad v_\parallel = v_{\parallel N} + v_{\parallel PN} + v_{\parallel S} \ , \\ v_\perp &= v_{\perp N} + v_{\perp PN} + v_{\perp S} \ , \quad \Psi = \Psi_N + \Psi_{PN} + \Psi_S \ , \\ \Phi &= \Phi_N + \Phi_{PN} + \Phi_S \ , \qquad \iota = \iota_N + \iota_{PN} + \iota_S \ . \end{aligned} \tag{5.3}$$

Az Υ szög bevezetése. A 3.1.2 fejezetben említett $\iota = \iota_S$ összefüggésnek van egy fontos következménye. A számolások során kiderül, hogy a dinamikai egyenletekben rendről rendre megjelenik a Ψ és Φ szögek összege, amit új szögváltozóként be is vezettem, és a fentiekhez hasonlóan fejtettem ki, vagyis

$$\Upsilon := \Psi + \Phi = \Upsilon_N + \Upsilon_{PN} + \Upsilon_S \ . \tag{5.4}$$

Ez jól látható a szeparációs vektor legalacsonyabb rendű alakján

$$\mathbf{r}_N = r_N \begin{pmatrix} \cos\Phi_N \cos\Psi_N - \sin\Phi_N \sin\Psi_N \\ \sin\Phi_N \cos\Psi_N + \cos\Phi_N \sin\Psi_N \\ 0 \end{pmatrix} = r_N \begin{pmatrix} \cos\Upsilon_N \\ \sin\Upsilon_N \\ 0 \end{pmatrix} \ , \tag{5.5}$$

vagyis az Υ szög bevezetésével a (3.32) szeparációs vektor az általunk vizsgált 1,5 PN rendben

$$\mathbf{r} = r \begin{pmatrix} \cos\Upsilon_N - \sin\Upsilon_N(\Upsilon_{PN} + \Upsilon_S) \\ \sin\Upsilon_N + \cos\Upsilon_N(\Upsilon_{PN} + \Upsilon_S) \\ \iota_S \sin\Psi_N \end{pmatrix} . \tag{5.6}$$

alakú lesz, illetve mivel $\cos\iota_N = 1$, a relatív sebességvektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\Upsilon} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

alakú.

Mivel a spinmentes esetben, ahol a pályasík rögzített, Υ írja le a rögzített pályasíkon a szeparációs vektor helyzetét, ezért ennek legalacsonyabb rendű, Υ_N járulékához fogjuk viszonyítani a szögmennyiségek relatív rendjét.

5.1.2. Spinprecesszió

A spinprecessziós egyenletek rendről rendre. A spin-pálya kölcsönhatásra vonatkozó vektor-differenciálegyenlet szétcsatolt skaláregyenletekre való átalakításának első lépése a (3.21) és (3.22) spin-precessziós egyenletek megoldási módszerének kidolgozása. Az egyenlet különböző relatív rendekhez tartozó tagjainak elkülönítése érdekében felhasználjuk, hogy (3.24) alapján

$$\mathbf{L}_N = \mathbf{J} - \mathbf{L}_{PN} - \mathbf{L}_{SO} - \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 . \tag{5.8}$$

Ekkor a spin-precessziós egyenletek (az $1 \leftrightarrow 2$ szimmetria miatt a most következő vizsgálatot csak a (3.21) egyenlet esetében mutatom be)

$$\dot{\mathbf{S}}_1 = \frac{1}{r^3}\left[\frac{4+3\zeta_1}{2}(\mathbf{J} - \mathbf{L}_{PN} - \mathbf{L}_{SO} - \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2) - \mathbf{S}_2 + \frac{3}{r^2}(\mathbf{r}\mathbf{S}_2)\mathbf{r}\right] \times \mathbf{S}_1 , \tag{5.9}$$

vagyis

$$\dot{\mathbf{S}}_1 = \frac{4+3\zeta_1}{2r^3}\Big(\mathbf{J}\times\mathbf{S}_1 - \mathbf{L}_{PN}\times\mathbf{S}_1 - \mathbf{L}_{SO}\times\mathbf{S}_1\Big) - \frac{6+3\zeta_1}{2r^3}\mathbf{S}_2\times\mathbf{S}_1 + \frac{3}{r^5}(\mathbf{r}\mathbf{S}_2)\mathbf{r}\times\mathbf{S}_1 \tag{5.10}$$

alakúak lesznek. A szeparációs vektor

$$\mathbf{r} := \mathbf{r}_N + \mathbf{r}_{PN} + \mathbf{r}_{SO} \tag{5.11}$$

felbontását figyelembe véve a különböző rendekhez tartozó járulékok elkülöníthetőek. A Lagrange-függvény (3.17) alakjából jól látható, hogy a spin-pálya kölcsönhatás a mozgás leírásában 1,5 PN rendű effektus, ezért a fenti felbontásban is így kezeljük.

Mivel a teljes impulzusmomentum-vektor mozgásállandó 2 PN rendig, az egyenlet legalacsonyabb rendjét a $\mathbf{J} \times \mathbf{S}_1$ tag adja. A többi tag relatív rendjét ennek segítségével, ehhez képest határozzuk meg.

A legalacsonyabb rendű (0,5 PN relatív rend) járulékokat a $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_1$ és $\frac{3}{r^2}(\mathbf{r}\mathbf{S}_2)\mathbf{r} \times \mathbf{S}_1$ típusú tagok, vagyis a spin-spin kölcsönhatás adja. Az 1 PN relatív rendű perturbációt az $\mathbf{L}_{PN} \times \mathbf{S}_1$ típusú tag, illetve a legalacsonyabb rendű tagban az $1/r^3$ faktor sorfejtésében fellépő $\mathbf{r}_{PN}$ adja. A 1,5 PN rendhez tartozó korrekciók az $\mathbf{L}_{SO} \times \mathbf{S}_1$ típusú, és az $1/r^3$ sorfejtésében fellépő $\mathbf{r}_{SO}$-nek köszönhetően állnak elő.

A spinprecessziós egyenletek polárkoordinátákban. Mivel az egyenlet legalacsonyabb rendű járuléka, a spin-pálya kölcsönhatás a mozgás leírásában 1,5 PN rendű effektust okoz, a munkám során a spin-precessziós egyenleteknek csak ezt, a legalacsonyabb rendjét vettem figyelembe, vagyis esetünkben a spinvektorok dinamikáját a

$$\dot{\mathbf{S}}_i = \frac{4+3\zeta_i}{2r_N^3}\mathbf{J} \times \mathbf{S}_i \ , \tag{5.12}$$

egyenletek írják le, ahol $i = 1, 2$.

A spinvektorokat az invariáns rendszerben gömbi polárkoordinátákkal felírva, azok az alábbi alakúak:

$$\mathbf{S}_i = S_i \begin{pmatrix} \cos\beta_i \sin\alpha_i \\ \sin\beta_i \sin\alpha_i \\ \cos\alpha_i \end{pmatrix} \ . \tag{5.13}$$

Az α_i jelöli az egyes spinvektorok $\mathbf{S}_i$ és a teljes impulzusmomentum-vektor $\mathbf{J}$ nyílásszögét, β_i pedig a spinvektorok $\mathbf{J}$ körüli precesszióját írják le. Ezekkel a spin-precessziós egyenletek az

$$S_i \begin{pmatrix} -\sin\beta_i \sin\alpha_i \dot{\beta}_i + \cos\beta_i \cos\alpha_i \dot{\alpha}_i \\ \cos\beta_i \sin\alpha_i \dot{\beta}_i + \sin\beta_i \cos\alpha_i \dot{\alpha}_i \\ \sin\alpha_i \dot{\alpha}_i \end{pmatrix} = (4+3\zeta_1)\frac{JS_1}{2r^3} \begin{pmatrix} -\sin\beta_i \sin\alpha_i \\ \cos\beta_i \sin\alpha_i \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

alakot öltik. Az egyenlet harmadik komponense alapján

$$\dot{\alpha}_i = 0 \ , \tag{5.15}$$

illetve ennek felhasználásával az első és második komponens is a

$$\dot{\beta}_i = (4 + 3\zeta_i)\frac{J}{2r_N^3} \tag{5.16}$$

egyenletre vezet.

Azonban jól látható, hogy a β_i szögváltozók rendjét az Υ_N szöghöz képest meghatározva

$$\frac{\dot{\beta}_i}{\dot{\Upsilon}_N} = \frac{(4 + 3\zeta_i)J/(2r_N^3)}{L/(\mu r_N^2)} \sim \frac{L/(r_N^3)}{L/(\mu r_N^2)} = \frac{\mu}{r_N} \sim \epsilon \tag{5.17}$$

eredményt kapjuk. Mivel az integrálást úgy végezzük el, hogy az ne keverje össze a rendeket, ezért a $\beta_i := \beta_{iN} + \beta_{iPN}$ módon bonthatjuk tovább a precessziót leíró szögeket, ahol β_{iN} olyan konstans kezdeti értéke a spin precesszióját leíró β_i szögnek, amit a rendszer korábbi dinamikája határoz meg, így

$$\dot{\beta}_{iN} = 0\ , \quad \dot{\beta}_{iPN} = (4 + 3\zeta_i)\frac{J}{2r_N^3}\ . \tag{5.18}$$

Ekkor a szögek relatív rendje az alábbi lesz

$$\frac{\beta_{iN}}{\Upsilon_N} \sim 1\ , \quad \frac{\beta_{iPN}}{\Upsilon_N} \sim \epsilon\ . \tag{5.19}$$

A spinprecessziós egyenletek legalacsonyabb rendjének hatásait vizsgáljuk, ezért a további mozgásegyenletekben β_i helyett β_{iN}-t vesszük figyelembe, kivéve, ahol a spinvektor komponensei expliciten is szerepelnek a kifejezésekben, mivel ez esetben a β_i szög teljes alakjára szükségünk van.

5.1.3. Mozgásegyenletek

A sebességvektor komponensei. Első lépésként a relatív sebességvektor komponenseinek alakját határozzuk meg a mozgásállandók és a szeparációs vektor hosszának függvényében, a (3.35) radiális egyenlethez hasonló módszerrel. Ekkor

$$v^2 = \frac{2E}{\mu} + \frac{2M}{r} - \left[3(1-3\eta)\left(\frac{E}{\mu}\right)^2 + 2(6-7\eta)\frac{EM}{\mu r} + (10-5\eta)\left(\frac{M}{r}\right)^2 - \frac{\eta M L^2}{\mu^2 r^3}\right] - \frac{2\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}}{\mu r^3}$$

$$
\begin{aligned}
v_\parallel^2 &= \dot{r}^2 = \frac{2E}{\mu} + \frac{2M}{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} - \left[3(1-3\eta)\left(\frac{E}{\mu}\right)^2 + 2(6-7\eta)\frac{EM}{\mu r} + (10-5\eta)\left(\frac{M}{r}\right)^2 - \right. \\
&- \left. (2-6\eta)\frac{EL^2}{\mu^3 r^2} - (8-3\eta)\frac{ML^2}{\mu^2 r^3} \right] + \frac{2E\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}}{M\mu^2 r^2} - \frac{2}{\mu r^3}(2\mathbf{LS} + \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}) \ , \qquad (5.20)
\end{aligned}
$$

illetve

$$
\begin{aligned}
v_\perp^2 &= v^2 - \dot{r}^2 = \frac{L^2}{\mu^2 r^2} - (2-6\eta)\frac{EL^2}{\mu^3 r^2} - (8-4\eta)\frac{ML^2}{\mu^2 r^3} - \frac{2E\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}}{M\mu^2 r^2} + \frac{4\mathbf{LS}}{\mu r^3} \\
&= \frac{L^2}{\mu^2 r_N^2} - \frac{2L^2}{\mu^2 r_N^2}\left[\frac{r_{PN}}{r_N} - (1-3\eta)\frac{E}{\mu} - (4-2\eta)\frac{M}{r_N} \right] - \\
&- \frac{2}{\mu^2 r_N^2}\left[\frac{L^2 r_S}{r_N} + \frac{E\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}}{M} - \frac{2\mu\mathbf{LS}}{r_N} \right] \ . \qquad (5.21)
\end{aligned}
$$

Ebből a kifejezésből gyökvonással kapjuk meg a vektor második komponensét, vagyis

$$
v_\perp = \frac{L}{\mu r_N} - \frac{L}{\mu r_N}\left[\frac{r_{PN}}{r_N} - (1-3\eta)\frac{E}{\mu} - (4-2\eta)\frac{M}{r_N} \right] - \frac{L}{\mu r_N}\left[\frac{r_S}{r_N} + \frac{E\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}}{L^2 M} - \frac{2\mu\mathbf{LS}}{L^2 r_N} \right] \ . \qquad (5.22)
$$

Az Υ szög egyenletei. A relatív sebességvektor (5.7) alakjából rendről rendre meghatározhatók az Υ szögre vonatkozó

$$
\begin{aligned}
\dot{\Upsilon}_N &= \frac{L}{\mu r_N^2} \ , \qquad \dot{\Upsilon}_{PN} = -\frac{L}{\mu r_N^2}\left[\frac{2r_{PN}}{r_N} - (1-3\eta)\frac{E}{\mu} - (4-2\eta)\frac{M}{r_N} \right] \ , \\
\dot{\Upsilon}_S &= -\frac{L}{\mu r_N^2}\left[\frac{2r_S}{r_N} + \frac{E\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}}{L^2 M} - \frac{2\mu\mathbf{LS}}{L^2 r_N} \right] \qquad (5.23)
\end{aligned}
$$

differenciálegyenletek.

A további szögegyenletek. A többi szögváltozó esetében azonban más a helyzet. Mint látni fogjuk, nem szükséges minden szög explicit alakjára minden rendben, a fenti szögegyenleteken kívül még a $\iota_S \sin\Phi_N$ és $\iota_S \cos\Phi_N$ kombinációkra lesz szükségünk. Ezeket a $\mathbf{J}$ teljes impulzusmomentum-vektor segítségével határozzuk meg.

A korábbi eredményeket behelyettesítjük a $\mathbf{J}$-t meghatározó (3.24) egyenletbe, illetve az egyes rendekhez tartozó járulékokat megadó (3.23), (3.25) és (3.26) egyenletekbe, illetve felhasználjuk a spinvektorok (5.13) alakját. A számolás végeredménye a teljes impulzusmomentum alakja az invariáns rendszerben, ami

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix} \iota_S \sin\Phi_N L+\sum_{i=1}^{2}(A_i\sin\xi_i+B_i\cos\xi_i+(C_i+1)\cos\beta_{iN}+\beta_{iPN}\sin\beta_{iN})\sin\alpha_i S_i \\ -\iota_S\cos\Phi_N L+\sum_{i=1}^{2}(B_i\sin\xi_i-A_i\cos\xi_i+(C_i+1)\sin\beta_{iN}-\beta_{iPN}\cos\beta_{iN})\sin\alpha_i S_i \\ L+\sum_{i=1}^{2}(C_i+1)\cos\alpha_i S_i \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

ahol bevezettem a $\xi_i := 2\Upsilon_N - \beta_{iN}$ és

$$A_i := \frac{\eta\zeta_i v_{\parallel N} v_{\perp N}}{2}, \qquad B_i := \left[\frac{(2+\zeta_i)\mu}{2r_N} - \frac{\eta\zeta_i v_{\parallel N}^2}{4} + \frac{\eta\zeta_i v_{\perp N}^2}{4}\right], \tag{5.25}$$

$$C_i := \left[-\frac{(2+\zeta_i)\mu}{2r_N} + \frac{\eta\zeta_i v_N^2}{4}\right] \tag{5.26}$$

jelöléseket.

Megvizsgálva a vektor egyes komponenseire vonatkozó $\dot{\mathbf{J}} = 0$ egyenletet, megkapjuk a szükséges szögkombinációk alakját. A

$$J_3 = L + \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\zeta_i E}{M} - \frac{2\mu}{r_N} + 1\right)\cos\alpha_i S_i \tag{5.27}$$

harmadik komponens deriváltja 1,5 PN rendig triviálisan zérus, ami egyezik az elvárásainkkal. A vektor első és második komponensének állandóságából a

$$\frac{d}{dt}\left\{\iota_S\sin\Phi_N L + \sum_{i=1}^{2}\left[A_i\sin\xi_i + B_i\cos\xi_i + (C_i+1)\cos\beta_{iN} + \beta_{iPN}\sin\beta_{iN}\right]\sin\alpha_i S_i\right\} = 0 \tag{5.28}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\iota_S\cos\Phi_N L - \sum_{i=1}^{2}\left[B_i\sin\xi_i - A_i\cos\xi_i + (C_i+1)\sin\beta_{iN} - \beta_{iPN}\cos\beta_{iN}\right]\sin\alpha_i S_i\right\} = 0 \tag{5.29}$$

feltételeket kaptam. Mivel az invariáns rendszert éppen a $\mathbf{J}$ vektorhoz rögzítettük, annak alakja rendről rendre $(0,0,J)$ kell legyen. Ebből a megkötésből 0,5 PN rendben a

$$\sum_{i=1}^{2} \cos\beta_{iN} \sin\alpha_i S_i = 0 \tag{5.30}$$

$$\sum_{i=1}^{2} \sin\beta_{iN} \sin\alpha_i S_i = 0 \tag{5.31}$$

összefüggéseket kapjuk a spinvektorok komponensei között. 1,5 PN rendben pedig ezen feltételek szolgáltatják a keresett egyenleteket, vagyis

$$\iota_S \sin\Phi_N L = -\sum_{i=1}^{2} \left[A_i \sin\xi_i + B_i \cos\xi_i + C_i \cos\beta_{iN} + \beta_{iPN} \sin\beta_{iN}\right] \sin\alpha_i S_i \ , \tag{5.32}$$

$$\iota_S \cos\Phi_N L = \sum_{i=1}^{2} \left[B_i \sin\xi_i - A_i \cos\xi_i + C_i \sin\beta_{iN} - \beta_{iPN} \cos\beta_{iN}\right] \sin\alpha_i S_i \ . \tag{5.33}$$

Bár a hullámformák kiszámításakor az Υ szögre vonatkozó egyenleteken kívül csak ezen szögkombinációk kifejezéseire lesz szükségünk, a fenti két egyenletből kiszámíthatók külön a ι_S és a Φ_N szögek, illetve ez utóbbi segítségével az $\Upsilon = \Phi + \Psi$ definíció alapján a Ψ_N szög is. A szeparációs vektor (5.6) és a relatív sebességvektor (5.7) alakjából látható, hogy ezen szögmennyiségek segítségével a mozgás teljes leírása megadható 1,5 PN rendben.

5.1.4. A mozgásegyenletek megoldása

Valódi anomália paraméterezés. Az előző fejezet egyenleteit excentrikus pálya esetén a valódi anomália paraméterezés segítségével oldjuk meg. Az erre vonatkozó (3.38) és (3.42) egyenletek alapján a szeparációs vektor hosszának járulékai

$$r_N = \frac{L^2}{\mu(\mu M + A_0 \cos\chi)} \tag{5.34}$$

a newtoni tag,

$$\begin{aligned} r_{PN} = & -\frac{2(6-\eta)M^4\mu^6 + 2(10-3\eta)EL^2M^2\mu^3 + (1-3\eta)E^2L^4}{2A_0\mu^3(\mu M + A_0\cos\chi)^2}\cos\chi - \\ & - \frac{2(2-\eta)MEL^2 + (6-\eta)M^3\mu^3}{\mu(\mu M + A_0\cos\chi)^2} \end{aligned} \tag{5.35}$$

a relativisztikus poszt-newtoni korrekció, és

$$
\begin{aligned}
r_S &= \frac{2(2\mathbf{LS}+\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma})\Big[A_0(2M^2\mu^3+EL^2)+M\mu(2m^2\mu^3+3EL^2)\cos\chi\Big]}{A_0L^2(\mu M+A_0\cos\chi)^2} - \\
&- \frac{2E\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}\Big[A_0M\mu^2+(M^2\mu^3+EL^2)\cos\chi\Big]}{A_0M\mu^2(\mu M+A_0\cos\chi)^2} \qquad (5.36)
\end{aligned}
$$

a spin-pálya kölcsönhatáshoz tartozó járulék. Ezen eredményeket a (5.22) egyenletekbe behelyettesítve a sebességvektor komponenseinek járulékai

$$
\begin{aligned}
v_{\parallel N} &= \frac{A_0\sin\chi}{L}\,, \qquad (5.37)\\
v_{\parallel PN} &= \frac{2(\eta-1)M^4\mu^6+3(3\eta-1)E^2L^4+2(4\eta-5)EL^2M^2\mu^3}{2\mu^2A_0L^3}\sin\chi - \\
&- \frac{(8-3\eta)M\mu A_0^2}{2L^3}\,, \qquad (5.38)\\
v_{\parallel S} &= -\frac{\Big(M\mu^2[(2\mathbf{LS}+\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma})M^2\mu^3-\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}EL^2]+\mu^2A_0^3(2\mathbf{LS}+\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma})\cos\chi\Big)\sin\chi}{A_0L^5}\,, \qquad (5.39)
\end{aligned}
$$

és

$$
\begin{aligned}
v_{\perp N} &= \frac{\mu M+A_0\cos\chi}{L}\,, \qquad (5.40)\\
v_{\perp PN} &= -\frac{2(9-10\eta)M^4\mu^6+2(7-8\eta)EL^2\mu^3M^2+3(1-3\eta)E^2L^4}{2\mu^2A_0L^3}\cos\chi + \\
&+ \frac{(2+\eta)M^3\mu^3+(3+\eta)MEL^2}{2L^3}+\frac{2(\eta-2)M^3\mu^3+4(\eta-2)MEL^2}{L^3}\cos^2\chi\,, \qquad (5.41)\\
v_{\perp S} &= \frac{2\mu^2A_0^3\mathbf{LS}\cos\chi^2-\mu^2M[4(M^2\mu^3+EL^2)(\mathbf{LS}+\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma})+EL^2\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}]\cos\chi}{A_0L^5} - \\
&- \frac{\mu[2\mathbf{LS}(3M^2\mu^3+2EL^2)+\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}(4M^2\mu^3+EL^2)]}{L^5}\,. \qquad (5.42)
\end{aligned}
$$

A szögegyenletek megoldása. A (5.23) differenciálegyenletek és az idő paraméter szerinti deriváltját leíró (3.43) egyenlet segítségével a közvetett függvény deriválására vonatkozó szabály szerint

$$\left(\frac{d\Upsilon}{d\chi}\right)_N = 1 \,, \tag{5.43}$$

$$\left(\frac{d\Upsilon}{d\chi}\right)_{PN} = -\frac{6M^2\mu^2 + \eta M\mu A0 \sin\chi}{2L^2} \,, \tag{5.44}$$

$$\left(\frac{d\Upsilon}{d\chi}\right)_{SO} = -\frac{\mu^2[\mu M(8\mathbf{LS} + 3\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}) + A_0(4\mathbf{LS} + \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma})\cos\chi]}{L^4} \tag{5.45}$$

alakúak lesznek, és ezek már a paraméter szerint közvetlenül integrálhatók. Az integrálás elvégzésekor ismét feltétel, hogy az integrálási határokat úgy kell megválasztani, hogy magasabb rendű perturbációk összegzésekor ne kapjunk az alacsonyabb rendű kifejezésekkel összemérhető eredményt. Ekkor az integrálás eredménye

$$\Upsilon_N = \Upsilon_0 + \chi \,, \tag{5.46}$$

$$\Upsilon_{PN} = -\frac{6M^2\mu^2\chi + \eta M\mu A0 \cos\chi}{2L^2} \,, \tag{5.47}$$

$$\Upsilon_S = -\frac{\mu^2[\mu M(8\mathbf{LS} + 3\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma})\chi + A_0(4\mathbf{LS} + \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma})\sin\chi]}{L^4} \,. \tag{5.48}$$

Hasonló módon oldható meg a spin precesszióját leíró β_{iPN} szögre vonatkozó (5.18) egyenlet is, vagyis a paraméter függvényében

$$\frac{d\beta_{iPN}}{d\chi} = \frac{J\mu^2(4 + 3\zeta_i)(M\mu + A_0\cos\chi)}{2L^3} \,, \tag{5.49}$$

amit integrálva a

$$\beta_{iPN} = \frac{J\mu^2(4 + 3\zeta_i)(M\mu\chi + A_0\sin\chi)}{2L^3} \tag{5.50}$$

eredményt kapjuk. Az integrálási állandó beolvasztható a β_{iN} konstansba.

A fenti formulák felhasználásával a $\iota_S \sin\Phi_N$ és $\iota_S \cos\Phi_N$ szögkombinációkat meghatározzák a (5.32) és (5.33) algebrai egyenletek, azonban ezek alakjai a valódi anomália paraméter függvényében túl bonyolultak és hosszadalmasak, így a dolgozatban részleteiben nem közlöm őket, viszont a hullámformák kiszámításánál figyelembe vettem ezeket a kifejezéseket.

Ezen eredmények a mozgás dinamikai változóinak tekintetében hasonló eredményt mutatnak, mint a próbatest határesetben. A pálya nyílásszögét jellemző ι szög a nulla érték körül végez harmonikus rezgéseket, amely a $\iota_S \sin\Phi_N$ és $\iota_S \cos\Phi_N$ szögkombinációkra vonatkozó (5.32) és (5.33) egyenletek alapján jól látható, mivel a sebességkomponenseken keresztül megjelennek a paraméter szinuszának és koszinuszának alacsony hatványai.

A pálya precessziója is hasonlít a próbatest esetbeli viselkedésre, hiszen β_{iPN}-n keresztül megjelenik a szögkombinációkra vonatkozó egyenletben egy lineárisan növekvő tag, illetve a már említett harmonikus perturbációk is. Ugyanez mondható el, bár expliciten jobban látható, a spinvektor precessziójáról is.

A szeparációs vektor pályasíkon való elhelyezkedését jellemző Υ szög jelen esetben is legalacsonyabb rendben tisztán lineáris, míg a poszt-newtoni és spin-pálya effektusok járulékai egyaránt tartalmaznak lineáris és harmonikus tagokat.

Bár formálisan a próbatesthez hasonló eredményekre jutottam, szeretném kiemelni, hogy a különböző koordinátarendszer-választásnak köszönhetően az itt bevezetett szögmennyiségek, jelentésüket tekintve csak hasonlítanak a Lense-Thirring esetben fellépőkre, de nem azonosak velük. Tovább bonyolítja az explicit összehasonlítást, hogy a fenti eredményekből a próbatest eset 3. és 4. fejezetben leírt dinamikája nem kapható meg egyszerűen az extrém tömegarányú határátmenet elvégzésekor. Ennek részletesebb tárgyalására az 5.4 fejezetben térek ki.

5.2. A detektálható hullámalak

5.2.1. A triád és a spinvektorok

Az N, p, q triád. A polarizációs állapotok kiszámítását ismét a projekciót meghatározó $\mathbf{N}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ vektortriád meghatározásával kezdem. Az $\mathbf{N}$ vektor komponenseinek alakját az együttmozgó rendszerben annak (5.1) invariáns rendszerbeli alakjából a (3.33) transzformációs szabály segítségével határoztam meg, ahol felhasználtam az egyes szögmennyiségek (5.3) felbontását, illetve a korábbiakban bevezetett Υ szöget. Ekkor

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \sin\gamma\cos\Upsilon_N - \left[\sin\gamma(\Upsilon_{PN}+\Upsilon_S)\sin\Upsilon_N - \cos\gamma\sin\Phi_N\iota_S\right] \\ -\sin\gamma\sin\Upsilon_N - \left[\sin\gamma(\Upsilon_{PN}+\Upsilon_S)\cos\Upsilon_N - \cos\gamma\cos\Phi_N\iota_S\right] \\ \cos\gamma + \sin\gamma\sin\Phi_N\iota_S \end{pmatrix}. \tag{5.51}$$

A $\mathbf{p}$ vektorra vonatkozó feltételek ismét egyértelműen meghatározzák annak alakját, vagyis olyan egységvektort keresünk, mely merőleges $\mathbf{N}$-re, illetve $\mathbf{L}_N$-re. Ekkor

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \sin\Upsilon_N + \left[(\Upsilon_{PN}+\Upsilon_S) - \cot\gamma\cos\Phi_N\iota_S\right]\cos\Upsilon_N \\ \cos\Upsilon_N - \left[(\Upsilon_{PN}+\Upsilon_S) - \cot\gamma\cos\Phi_N\iota_S\right]\sin\Upsilon_N \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.52}$$

Végezetül a $\mathbf{q} = \mathbf{N} \times \mathbf{p}$ definíció alapján

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} &= \begin{pmatrix} -\cos\gamma\cos\Upsilon_N \\ \cos\gamma\sin\Upsilon_N \\ \sin\gamma \end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix} \cos\gamma\sin\Upsilon_N(\Upsilon_{PN} + \Upsilon_S - \cot\gamma\cos\Phi_N\iota_S) - \sin\gamma\cos\Upsilon_N\sin\Phi_N\iota_S \\ \cos\gamma\cos\Upsilon_N(\Upsilon_{PN} + \Upsilon_S - \cot\gamma\cos\Phi_N\iota_S) - \sin\gamma\sin\Upsilon_N\sin\Phi_N\iota_S \\ \cos\gamma(\cos\Upsilon_N\sin\Phi_N - \sin\Upsilon_N\cos\Phi_N)\iota_S \end{pmatrix} . \qquad (5.53)
\end{aligned}$$

A spinvektor. A legtöbb összefüggésben a spinvektorok $\mathbf{LS} = \mathbf{LS}_1 + \mathbf{LS}_2$, illetve $\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} = \zeta_1\mathbf{LS}_1 + \zeta_2\mathbf{LS}_2$ skalárszorzatai jelennek meg, de mivel az $\mathbf{LS}_1$ és $\mathbf{LS}_2$ szorzatok állandók, ezáltal $\mathbf{LS}$ és $\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}$ is, ezért az egyenletekben a spinvektort ezeken a formális kefejezéseken keresztül vettem figyelembe. A spinvektorok egyes komponensei az $\mathbf{N}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ triád komponenseiben a $\iota_S\sin\Phi_N$ és $\iota_S\cos\Phi_N$ szögkombinációkon keresztül jelennek meg.

A polarizációs állapot kifejezések meghatározásához szükség van a spinvektorok együttmozgó rendszerbeli alakjára is. Ezeket a vektorok (5.13) polárszögekkel felírt alakjából a (3.33) transzformációs szabály segítségével határoztam meg, melynek számunkra szükséges, legalacsonyabb rendben az eredménye

$$\mathbf{S}_i = S_i \begin{pmatrix} (\cos\Upsilon_N\cos\beta_{iN} + \sin\Upsilon_N\sin\beta_{iN})\sin\alpha_i \\ (\cos\Upsilon_N\sin\beta_{iN} - \sin\Upsilon_N\cos\beta_{iN})\sin\alpha_i \\ \cos\alpha_i \end{pmatrix} = S_i \begin{pmatrix} \cos(\Upsilon_N - \beta_{iN})\sin\alpha_i \\ -\sin(\Upsilon_N - \beta_{iN})\sin\alpha_i \\ \cos\alpha_i \end{pmatrix} . \qquad (5.54)$$

5.2.2. A formális hullámalak

A fenti eredményeket felhasználva rátérek a detektálható hullámalak polarizációs állapotainak kiszámítására. Ehhez először meg kellett határoznom a polarizációs állapotok formális kifejezéseit, melyekben a fenti mozgásleírás elemei és az $\mathbf{N}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ és $\mathbf{S}$ vektorok együttmozgó rendszerben adott komponensei formálisan, rövid jelöléseken keresztül szerepelnek. Ezen számolás során ugyanazokat a lépéseket követtem, mint a próbatest modell esetében, vagyis a (3.88) egyenletbe behelyettesítettem a relatív sebességvektor (4.3) felbontását, majd elvégeztem a (2.27) projekciókat. Az eredményben ismét a

$$h_{\substack{+\\ \times}} = \frac{2\mu}{D}\left[h_{\substack{+\\ \times}}^{N} + h_{\substack{+\\ \times}}^{0.5} + h_{\substack{+\\ \times}}^{1} + h_{\substack{+\\ \times}}^{1SO} + h_{\substack{+\\ \times}}^{1.5} + h_{\substack{+\\ \times}}^{1.5SO}\right] \qquad (5.55)$$

formában csoportosítottam a különböző formális PN rendekhez tartozó járulékokat, ahol a fenti kifejezésben D a forrás és a detektor távolsága. A különböző poszt-newtoni rendekhez és effektusokhoz tartozó tagok explicit alakja a korábbiakban meghatározott mennyiségekkel

adhatók meg. Az alábbi kifejezésekben a $v_\parallel$ sebességkomponensek helyére az azzal egyenlő, de annál szemléletesebb $\dot{r}$ kifejezést írtam.
A "plusszos" polarizáció esetén

$$h_+^N = \left(\dot{r}^2 - \frac{M}{r}\right)(p_x^2 - q_x^2) + 2v_\perp \dot{r}(p_x p_y - q_x q_y) + v_\perp^2 (p_y^2 - q_y^2) \tag{5.56}$$

a newtoni rendhez tartozó járulék formális kifejezése,

$$\begin{aligned} h_+^{0,5} &= \frac{\delta m}{M}\left\{ \left[\dot{r}\left(\frac{2M}{r} - \frac{\dot{r}^2}{2}\right) N_x + v_\perp \left(\frac{M}{2r} - \dot{r}^2\right) N_y\right](p_x^2 - q_x^2)\right. \\ &+ v_\perp \left[\left(\frac{3M}{r} - 2\dot{r}^2\right) N_x - 2v_\perp \dot{r} N_y\right](p_x p_y - q_x q_y) \\ &- \left. v_\perp^2 \left(\dot{r} N_x + v_\perp N_y\right)(p_y^2 - q_y^2)\right\} \end{aligned} \tag{5.57}$$

a legalacsonyabb rendű poszt-newtoni korrekció,

$$\begin{aligned} h_+^1 &= \frac{1}{6}\left\{(1-3\eta)\left[\left(-\frac{21\dot{r}^2 M}{r} + \frac{3Mv^2}{r} + 6\dot{r}^4 + \frac{7M^2}{r^2}\right) N_x^2 + 4v_\perp \dot{r}\left(-\frac{6M}{r} + 3\dot{r}^2\right) N_x N_y\right.\right. \\ &+ \left. 2v_\perp^2 \left(3\dot{r}^2 - \frac{M}{r}\right) N_y^2\right] + \left[\frac{(19-9\eta)\dot{r}^2 M}{r} + (3-9\eta)v^2\dot{r}^2\right. \\ &- \left.\left. \frac{(10+3\eta)v^2 M}{r} + \frac{29M^2}{r^2}\right]\right\}(p_x^2 - q_x^2) \\ &+ \frac{v_\perp}{6}\left\{(1-3\eta)\left[6\dot{r}\left(-\frac{5M}{r} + 2\dot{r}^2\right) N_x^2 + 8v_\perp\left(-4\frac{M}{r} + 3\dot{r}^2\right) N_x N_y + 12 v_\perp^2 \dot{r} N_y^2\right]\right. \\ &+ \left. 6\dot{r}\left[\frac{(2+4\eta)M}{r} + (1-3\eta)v^2\right]\right\}(p_x p_y - q_x q_y) \\ &+ \frac{v_\perp^2}{6}\left\{(1-3\eta)\left[2\left(-\frac{7M}{r} + 3\dot{r}^2\right) N_x^2 + 12 v_\perp \dot{r} N_x N_y + 6v_\perp^2 N_y^2\right]\right. \\ &+ \left.\left[-\frac{(4-6\eta)M}{r} + (3-9\eta)v^2\right]\right\}(p_y^2 - q_y^2) \end{aligned} \tag{5.58}$$

és

$$
\begin{aligned}
h_+^{1,5} &= \frac{\delta m}{M}\left\{(1-2\eta)\left[\dot r\left(\frac{3\dot r^2M}{4r}-\frac{v^2M}{r}-\frac{41M^2}{12r^2}-\dot r^4\right)N_x^3+v_\perp^3\left(\frac{M}{4r}-\dot r^2\right)N_y^3\right.\right.\\
&+ v_\perp\left(\frac{85\dot r^2M}{8r}-\frac{9v^2M}{8r}-\frac{7M^2}{2r^2}-3\dot r^4\right)N_x^2N_y+3\dot r v_\perp^2\left(\frac{2M}{r}-\dot r^2\right)N_xN_y^2\Bigg]\\
&+ \dot r\left[-\frac{(10+7\eta)\dot r^2M}{2r}+\frac{(2+\eta)v^2M}{2r}-\frac{(59-30\eta)M^2}{12r^2}-\frac{(1-5\eta)v^2\dot r^2}{2}\right]N_x\\
&+ v_\perp\left[-\frac{(25+26\eta)\dot r^2M}{8r}+\frac{(7-2\eta)v^2M}{8r}-\frac{(26-3\eta)M^2}{6r^2}\right.\\
&- \left.\left.\frac{(1-5\eta)v^2\dot r^2}{2}\right]N_y\right\}(p_x^2-q_x^2)\\
&+ v_\perp\frac{\delta m}{M}\left\{(1-2\eta)\left[\left(\frac{\dot r^2M}{4r}-\frac{7v^2M}{4r}-\frac{11M^2}{r^2}-2\dot r^4\right)N_x^3\right.\right.\\
&+ v_\perp\dot r\left(\frac{16M}{r}-6\dot r^2\right)N_x^2N_y+3v_\perp^2\left(\frac{5M}{2r}-2\dot r^2\right)N_xN_y^2-2v_\perp^3\dot rN_y^3\Bigg]\\
&+ \left[-\frac{(49+14\eta)\dot r^2M}{4r}+\frac{(11-6\eta)v^2M}{4r}-\frac{(32-9\eta)M^2}{3r^2}-(1-5\eta)v^2\dot r^2\right]N_x\\
&- \left.v_\perp\dot r\left[\frac{(2+6\eta)M}{r}+(1-5\eta)v^2\right]N_y\right\}(p_xp_y-q_xq_y)\\
&+ v_\perp^2\frac{\delta m}{M}\left\{(1-2\eta)\left[-\dot r\left(\frac{5M}{4r}+\dot r^2\right)N_x^3+v_\perp\left(\frac{29M}{4r}-3\dot r^2\right)N_x^2N_y\right.\right.\\
&- \left.3v_\perp^2\dot rN_xN_y^2-v_\perp^3N_y^3\right]-\dot r\left[\frac{(7+3\eta)M}{r}+\frac{(1-5\eta)v^2}{2}\right]N_x\\
&+ \left.v_\perp\left[\frac{(3-8\eta)M}{4r}-\frac{(1-5\eta)v^2}{2}\right]N_y\right\}(p_y^2-q_y^2) \qquad (5.59)
\end{aligned}
$$

a további relativisztikus korrekciók, illetve

$$
\begin{aligned}
h_+^{1SO} &= -\frac{1}{r^2}\Big[(\mathbf{\Delta q})p_x+(\mathbf{\Delta p})q_x\Big]\,, \qquad (5.60)\\
h_+^{1,5SO} &= \frac{2}{r^2}\left\{3v_\perp\left(2S_z+\frac{\delta m}{M}\Delta_z\right)(p_x^2-q_x^2)+\frac{\dot r}{2}\left[\left(\mathbf{S}-\frac{\delta m}{M}\mathbf{\Delta}\right)\times(p_x\mathbf{p}-q_x\mathbf{q})\right]_x\right.\\
&- \frac{v_\perp}{2}\left[\left(9\mathbf{S}+5\frac{\delta m}{M}\mathbf{\Delta}\right)\times(p_x\mathbf{p}-q_x\mathbf{q})\right]_y-v_\perp\left[\left(\mathbf{S}+\frac{\delta m}{M}\mathbf{\Delta}\right)\times(p_y\mathbf{p}-q_y\mathbf{q})\right]_x\\
&- \left.\left(\mathbf{S}+\frac{\delta m}{M}\mathbf{\Delta}\right)\cdot\left[\left(\frac{\dot r}{2}N_x+v_\perp N_y\right)(p_x\mathbf{q}+q_x\mathbf{p})+v_\perp N_x(p_y\mathbf{q}+q_y\mathbf{p})\right]\right\} \qquad (5.61)
\end{aligned}
$$

a spin-pálya kölcsönhatásból származó járulékok.

Hasonlóan, a "keresztes" polarizáció esetén

$$h_\times^N = 2\left[\left(\dot{r}^2 - \frac{M}{r}\right)p_x q_x + v_\perp \dot{r}(p_x q_y + q_x p_y) + v_\perp^2 p_y q_y\right] \tag{5.62}$$

a formálisan newtoni rendű tag,

$$\begin{aligned} h_\times^{0,5} &= \frac{\delta m}{M}\Bigg\{\left[\dot{r}\left(\frac{4M}{r} - \dot{r}^2\right)N_x + v_\perp\left(\frac{M}{r} - 2\dot{r}^2\right)N_y\right]p_x q_x \\ &+ v_\perp\left[\left(\frac{3M}{2r} - \dot{r}^2\right)N_x - v_\perp \dot{r} N_y\right](p_x q_y + q_x p_y) - 2v_\perp^2\left(\dot{r}N_x + v_\perp N_y\right)p_y q_y\Bigg\} \end{aligned} \tag{5.63}$$

a legalacsonyabb rendű korrekció,

$$\begin{aligned} h_\times^1 &= \frac{1}{3}\Bigg\{(1-3\eta)\Bigg[\left(-\frac{21\dot{r}^2 M}{r} + \frac{3Mv^2}{r} + 6\dot{r}^4 + \frac{7M^2}{r^2}\right)N_x^2 + 4v_\perp \dot{r}\left(-\frac{6M}{r} + 3\dot{r}^2\right)N_x N_y \\ &+ 2v_\perp^2\left(3\dot{r}^2 - \frac{M}{r}\right)N_y^2\Bigg] + \Bigg[\frac{(19-9\eta)\dot{r}^2 M}{r} + (3-9\eta)v^2\dot{r}^2 \\ &- \frac{(10+3\eta)v^2 M}{r} + \frac{29M^2}{r^2}\Bigg]\Bigg\}p_x q_x \\ &+ \frac{v_\perp}{6}\Bigg\{(1-3\eta)\left[6\dot{r}\left(-\frac{5M}{r} + 2\dot{r}^2\right)N_x^2 + 8v_\perp\left(-4\frac{M}{r} + 3\dot{r}^2\right)N_x N_y + 12v_\perp^2 \dot{r} N_y^2\right] \\ &+ 6\dot{r}\left[\frac{(2+4\eta)M}{r} + (1-3\eta)v^2\right]\Bigg\}(p_x q_y + q_x p_y) \\ &+ \frac{v_\perp^2}{3}\Bigg\{(1-3\eta)\left[2\left(-\frac{7M}{r} + 3\dot{r}^2\right)N_x^2 + 12 v_\perp \dot{r} N_x N_y + 6v_\perp^2 N_y^2\right] \\ &+ \left[-\frac{(4-6\eta)M}{r} + (3-9\eta)v^2\right]\Bigg\}p_y q_y \end{aligned} \tag{5.64}$$

és

$$
\begin{aligned}
h_{\times}^{1,5} &= \frac{\delta m}{M}\Bigg\{(1-2\eta)\left[\dot{r}\left(\frac{3\dot{r}^2M}{2r}-\frac{2v^2M}{r}-\frac{41M^2}{6r^2}-2\dot{r}^4\right)N_x^3+v_\perp^3\left(\frac{M}{2r}-2\dot{r}^2\right)N_y^3\right.\\
&+ \left. v_\perp\left(\frac{85\dot{r}^2M}{4r}-\frac{9v^2M}{4r}-\frac{7M^2}{r^2}-6\dot{r}^4\right)N_x^2N_y+6\dot{r}v_\perp^2\left(\frac{2M}{r}-\dot{r}^2\right)N_xN_y^2\right]\\
&+ \dot{r}\left[-\frac{(10+7\eta)\dot{r}^2M}{r}+\frac{(2+\eta)v^2M}{r}-\frac{(59-30\eta)M^2}{6r^2}-(1-5\eta)v^2\dot{r}^2\right]N_x\\
&+ \left[-\frac{(25+26\eta)v_\perp\dot{r}^2M}{4r}+\frac{(7-2\eta)v^2v_\perp M}{4r}-\frac{(26-3\eta)v_\perp M^2}{3r^2}\right.\\
&- \left.(1-5\eta)v^2v_\perp\dot{r}^2\right]N_y\Bigg\}p_xq_x\\
&+ v_\perp\frac{\delta m}{M}\left\{(1-2\eta)\left[\left(\frac{\dot{r}^2M}{4r}-\frac{7v^2M}{4r}-\frac{11M^2}{r^2}-2\dot{r}^4\right)N_x^3\right.\right.\\
&+ \left. v_\perp\dot{r}\left(\frac{16M}{r}-6\dot{r}^2\right)N_x^2N_y+3v_\perp^2\left(\frac{5M}{2r}-2\dot{r}^2\right)N_xN_y^2-2v_\perp^3\dot{r}N_y^3\right]\\
&+ \left[-\frac{(49+14\eta)\dot{r}^2M}{4r}+\frac{(11-6\eta)v^2M}{4r}-\frac{(32-9\eta)M^2}{3r^2}-(1-5\eta)v^2\dot{r}^2\right]N_x\\
&- \left. v_\perp\dot{r}\left[\frac{(2+6\eta)M}{r}+(1-5\eta)v^2\right]N_y\right\}(p_xq_y+q_xp_y)\\
&+ v_\perp^2\frac{\delta m}{M}\left\{(1-2\eta)\left[-\dot{r}\left(\frac{5M}{2r}+\dot{r}^2\right)N_x^3+v_\perp\left(\frac{29M}{2r}-6\dot{r}^2\right)N_x^2N_y\right.\right.\\
&- \left. 6v_\perp^2\dot{r}N_xN_y^2-2v_\perp^3N_y^3\right]-\dot{r}\left[\frac{(14+6\eta)M}{r}+(1-5\eta)v^2\right]N_x\\
&+ \left. v_\perp\left[\frac{(3-8\eta)M}{2r}-(1-5\eta)v^2\right]N_y\right\}p_yq_y
\end{aligned}
\tag{5.65}
$$

a relativisztikus, míg

$$
\begin{aligned}
h_{\times}^{1SO} &= -\frac{1}{r^2}\Big[(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{q})q_x-(\boldsymbol{\Delta}\mathbf{p})p_x\Big]\\
h_{\times}^{1,5SO} &= \frac{2}{r^2}\left\{6v_\perp\left(2S_z+\frac{\delta m}{M}\Delta_z\right)p_xq_x+\frac{\dot{r}}{2}\left[\left(\mathbf{S}-\frac{\delta m}{M}\boldsymbol{\Delta}\right)\times(p_x\mathbf{q}+q_x\mathbf{p})\right]_x\right.\\
&- \frac{v_\perp}{2}\left[\left(9\mathbf{S}+5\frac{\delta m}{M}\boldsymbol{\Delta}\right)\times(p_x\mathbf{q}+q_x\mathbf{p})\right]_y-v_\perp\left[\left(\mathbf{S}+\frac{\delta m}{M}\boldsymbol{\Delta}\right)\times(p_y\mathbf{q}+q_y\mathbf{p})\right]_x\\
&- \left.\left(\mathbf{S}+\frac{\delta m}{M}\boldsymbol{\Delta}\right)\cdot\left[\left(\frac{\dot{r}}{2}N_x+v_\perp N_y\right)(q_x\mathbf{q}-p_x\mathbf{p})+v_\perp N_x(q_y\mathbf{q}-p_y\mathbf{p})\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{5.66}
$$

a spin-pálya perturbációk kifejezései.

A polarizációs állapotok kiszámításának módszere. Ezen eredmények alapján a próbatest esethez hasonlóan meghatározhatók a polarizációs állapotok kiszámításához szükséges módszer lépései.

1. Egy választott paraméterezés segítségével kiintegráljuk a (3.35), és (5.23) mozgásegyenleteket newtoni rendben, és ezek alapján kiszámoljuk a relatív sebességvektor hosszának és komponenseinek legalacsonabb rendű alakját.

2. Megoldjuk a spin-precessziós egyenleteket, vagyis a választott paraméterezés segítségével kiintegráljuk a (5.18) differenciálegyenletet, majd meghatározzuk a spinvektor (5.54) komponenseit az együttmozgó rendszerben.

3. Kiintegráljuk a teljes (3.35) és (5.23) mozgásegyenleteket, a megoldásokat behelyettesítjük a (5.32) és (5.33) egyenletekbe.

4. Kiszámoljuk a relatív sebességvektor hosszának (5.20) és (3.35), illetve (5.22) komponenseinek poszt-newtoni és spin-pálya korrekcióit az együttmozgó koordinátarendszerben.

5. Kiszámítjuk az $\mathbf{N}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ vektortriád (5.51), (5.52) és (5.53) komponenseit az együttmozgó rendszerben.

6. Mindezen eredményeket behelyettesítjük a polarizációs állapotok (5.55), illetve (5.56)-(5.66) formális kifejezéseibe.

7. A mozgásleírás perturbációinak behelyettesítése után elhagyjuk a 1,5 PN rendnél magasabb rendű kifejezéseket, köztük azokat, melyek spinben nem lineárisak.

A módszer eredményeként előállnak a h_+ és $h_\times$ polarizációs állapotok kifejezései a választott paraméter(ek), illetve a mozgásállandók (E, J, L, $\mathbf{LS}_1$, $\mathbf{LS}_2$), a rendszer geometriai (az $\mathbf{N}$ és $\mathbf{J}$ vektorok által bezárt γ szög) és dinamikai alapparaméterei (m_1, m_2, S_1, S_2), illetve az integrálási konstansok (Υ_0, α_{iN}, β_{iN}) függvényében.

Az eljárás folyamán külön figyelmet kell fordítani arra, hogy a mozgás leírásából származó korrekciók nem minden rendben adnak érdemi járulékot, vagyis minden lépésben meg kell vizsgálni, hogy az eredményként fellépő kifejezések maximum 1,5 PN rendűek legyenek, illetve a spineket legfeljebb lineárisan tartalmazzák.

Lényegében a mozgás leírásának PN korrekciói $h_{\substack{+\\\times}}^{N}$-ben okoznak 1 PN rendű járulékokat, illetve $h_{\substack{+\\\times}}^{0.5}$-ben 1,5 PN rendnek megfelelőket, míg a mozgás spin-pálya korrekcióiból $h_{\substack{+\\\times}}^{N}$-en keresztül kapunk a 1,5 PN rendű spin-pálya hullámformához további tagokat.

Meg kell jegyeznem, hogy a fent részletezett módszer eredményei tovább egyszerűsíthetők, mivel az integrálás során fellépő konstans szögek és γ között a geometriából származtatható összefüggés. Hasonlóan, ha a h_+ és $h_\times$ polarizációs állapotokból meghatározzuk a $h(t)$ detektálható jelalakot, egy további összefüggés adódik a (2.24) egyenletben fellépő ξ polarizációs szög és a módszer konstansai között. A mérések szempontjából ezen összefüggések egyszerűsödést jelentenek, hiszen a rendszer konstans paraméterei kisebb paraméterteret feszítenek ki, azonban ekkor az egyébként is hosszú és összetett kifejezések még bonyolultabbak lesznek.

Külön ki kell emelnem azt a határesetet, amikor a két test azonos tömegű, vagyis $\delta m = 0$. Ebben az esetben ugyanis a polarizációs állapotok kifejezéseiben a félegész rendű perturbációk együtthatója mindkét állapot esetén nulla, kivéve a spin-pálya kölcsönhatárból származó $h_+^{1,5SO}$ és $h_\times^{1,5SO}$ kifejezéseket. Ez az azonos tömegű objektumok alkotta kettősök esetén a spinek közvetlen mérését teszi lehetővé.

5.2.3. A detektálható hullámalak explicit alakja

Az előző fejezetben részletezett módszer lépéseit követve, a mozgásegyenleteket az 5.1.4 fejezetben leírtak szerint kiintegrálva a valódi anomália paraméterezés segítségével, kiszámoltam a polarizációs állapotok paraméterfüggésének szerkezetét. Ennek eredményeként a (5.55) egyenletben fellépő járulékok rendről rendre

$$\begin{aligned}
h_+^N &= \sum_{i=0}^{3}\left[C_{+i}^N \cos i\chi + S_{+i}^N \sin i\chi\right] \\
&+ \epsilon \sum_{i=0}^{4}\left[C_{+i}^{NPN} \cos i\chi + S_{+i}^{NPN} \sin i\chi\right] + \epsilon\chi \sum_{i=0}^{3}\left[C_{+i}^{NPN\chi} \cos i\chi + S_{+i}^{NPN\chi} \sin i\chi\right] \\
&+ S \sum_{i=0}^{7}\left[C_{+i}^{NS} \cos i\chi + S_{+i}^{NS} \sin i\chi\right] + S\chi \sum_{i=0}^{3}\left[C_{+i}^{NS\chi} \cos i\chi + S_{+i}^{NS\chi} \sin i\chi\right] \\
h_+^{0,5} &= \sum_{i=0}^{6}\left[C_{+i}^{0,5} \cos i\chi + S_{+i}^{0,5} \sin i\chi\right] \\
&+ \epsilon \sum_{i=0}^{7}\left[C_{+i}^{0,5PN} \cos i\chi + S_{+i}^{0,5PN} \sin i\chi\right] + \epsilon\chi \sum_{i=0}^{6}\left[C_{+i}^{0,5PN\chi} \cos i\chi + S_{+i}^{0,5PN\chi} \sin i\chi\right] \\
h_+^1 &= \sum_{i=0}^{7}\left[C_{+i}^1 \cos i\chi + S_{+i}^1 \sin i\chi\right] \\
h_+^{1SO} &= S \sum_{i=0}^{4}\left[C_{+i}^{1SO} \cos i\chi + S_{+i}^{1SO} \sin i\chi\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
h_{+}^{1,5} &= \sum_{i=0}^{9}\left[C_{+i}^{1,5}\cos i\chi + S_{+i}^{1,5}\sin i\chi\right] \\
h_{+}^{1,5SO} &= S\sum_{i=0}^{6}\left[C_{+i}^{1,5SO}\cos i\chi + S_{+i}^{1,5SO}\sin i\chi\right] \ ,
\end{aligned}
\tag{5.67}
$$

illetve

$$
\begin{aligned}
h_{\times}^{N} &= \sum_{i=0}^{3}\left[C_{\times i}^{N}\cos i\chi + S_{\times i}^{N}\sin i\chi\right] \\
&+ \epsilon\sum_{i=0}^{4}\left[C_{\times i}^{NPN}\cos i\chi + S_{\times i}^{NPN}\sin i\chi\right] + \epsilon\chi\sum_{i=0}^{3}\left[C_{\times i}^{NPN\chi}\cos i\chi + S_{\times i}^{NPN\chi}\sin i\chi\right] \\
&+ S\sum_{i=0}^{7}\left[C_{\times i}^{NS}\cos i\chi + S_{\times i}^{NS}\sin i\chi\right] + S\chi\sum_{i=0}^{3}\left[C_{\times i}^{NS\chi}\cos i\chi + S_{\times i}^{NS\chi}\sin i\chi\right] \\
h_{\times}^{0,5} &= \sum_{i=0}^{6}\left[C_{\times i}^{0,5}\cos i\chi + S_{\times i}^{0,5}\sin i\chi\right] \\
&+ \epsilon\sum_{i=0}^{7}\left[C_{\times i}^{0,5PN}\cos i\chi + S_{\times i}^{0,5PN}\sin i\chi\right] + \epsilon\chi\sum_{i=0}^{6}\left[C_{\times i}^{0,5PN\chi}\cos i\chi + S_{\times i}^{0,5PN\chi}\sin i\chi\right] \\
h_{\times}^{1} &= \sum_{i=0}^{7}\left[C_{\times i}^{1}\cos i\chi + S_{\times i}^{1}\sin i\chi\right] \\
h_{\times}^{1SO} &= S\sum_{i=0}^{4}\left[C_{\times i}^{1SO}\cos i\chi + S_{\times i}^{1SO}\sin i\chi\right] \\
h_{\times}^{1,5} &= \sum_{i=0}^{9}\left[C_{\times i}^{1,5}\cos i\chi + S_{\times i}^{1,5}\sin i\chi\right] \\
h_{\times}^{1,5SO} &= S\sum_{i=0}^{6}\left[C_{\times i}^{1,5SO}\cos i\chi + S_{\times i}^{1,5SO}\sin i\chi\right] \ .
\end{aligned}
\tag{5.68}
$$

Az ϵ és S előtagok segítségével különítettem el a mozgás 1 PN rendből származó járulékait, illetve a spin-pálya kölcsönhatás figyelembe vétele során fellépő tagokat.

A C és S együtthatók az E, J, L, $\mathbf{LS}_1$, $\mathbf{LS}_2$ mozgásállandóknak, a testek m_1 és m_2 tömegeinek, a spinvektorok S_1 és S_2 hosszának, illetve az Υ_0, α_{iN}, β_{iN} és γ konstans szögek szinuszainak és koszinuszainak szorzataiként állnak elő. Bár ezek rendelkezésre állnak, sajnos a dolgozat keretei között az összes együttható részletes kiírására azok hossza miatt nincs lehetőségem. Az alfejezet végén példaként összefoglalom a newtoni rendhez és a legalacsonyabb, 1 PN rendű spin-pálya korrekciókhoz tartozó együtthatókat.

A polarizációs állapotok fenti kifejtése alapján látható, hogy minden fél poszt-newtoni rend az alacsonyabb rendekhez képest átlagosan két felharmonikussal bővíti a kifejtést, azonban a legmagasabb felharmonikusok együtthatói néha zérus értékűek, így ezen összefüggés a fenti formulákban nehezen fedezhető fel. Továbbá a testek forgása adott rendben mindig az alacsonyabb felharmonikusok együtthatóihoz ad járulékot.

A formális newtoni rendű tagokban a mozgás magasabb rendű korrekcióin keresztül fellépő tagokat az ϵ és S rövid jelöléssel különítettem el a valóban nulladrendű járulékoktól. Ugyanez igaz a formálisan 0,5 PN rendű tagban megjelenő, lényegében 1,5 PN rendhez tartozó tagokra.

A χ-ben lineáris tagok a próbatest esethez hasonlóan a $a_{\substack{PN \\ SO}}\chi + b_{\substack{PN \\ SO}} \sin\chi$ perturbáló tagok

$$\sin\left(a_N\chi + a_{\substack{PN \\ SO}}\chi + b_{\substack{PN \\ SO}}\sin\chi\right) = \sin\chi + a_{\substack{PN \\ SO}}\chi\cos\chi + b_{\substack{PN \\ SO}}\cos\chi\sin\chi \tag{5.69}$$

típusú sorfejtése során állnak elő. A mozgásegyenletek kiintegrálásakor az integrálás határaira kirótt feltétel miatt az összefüggések érvényességi körében a mozgás leírásának elemei és a módszer során kiszámított polarizációs állapotok járulékai megmaradnak maximum 1,5 PN rendű és spinben lineáris kifejezéseknek, és egymással sem keverednek.

Mivel a spin-spin kölcsönhatás a mozgás és a hullámok leírásában is csak 2 PN rendben lép fel, és így a kifejezéseket spinben lineárisan számoltuk ki, az egy forgó test, illetve a mindkét test forgását elhanyagoló határesetek egyszerűen előállnak, ha a fenti kifejezésekben elvégezzük az $S_1 \to 0$ és/vagy $S_2 \to 0$ határátmeneteket.

Bevezetve a $c_\gamma = 1 + \cos\gamma^2$ jelölést a newtoni rendben az egyes felharmonikusok együtthatói a két polarizációs állapot esetén

$$C^N_{+3} = \frac{\mu M A_0 c_\gamma \cos(2\Upsilon_0)}{4L^2}, \qquad C^N_{\times 3} = \frac{\mu M A_0 \cos\gamma \sin(2\Upsilon_0)}{2L^2} \tag{5.70}$$

$$C^N_{+2} = \frac{\mu^2 M^2 c_\gamma \cos(2\Upsilon_0)}{L^2}, \qquad C^N_{\times 2} = \frac{2\mu^2 M^2 \cos\gamma \sin(2\Upsilon_0)}{L^2} \tag{5.71}$$

$$C^N_{+1} = \frac{\mu M A_0 [5c_\gamma \cos(2\Upsilon_0) + 2\sin\gamma^2]}{4L^2}, \qquad C^N_{\times 1} = \frac{5\mu M A_0 \cos\gamma \sin(2\Upsilon_0)}{2L^2} \tag{5.72}$$

$$C^N_{0+} = \frac{A_0^2 [c_\gamma \cos(2\Upsilon_0) + \sin\gamma^2]}{2L^2}, \qquad C^N_{0\times} = \frac{A_0^2 \cos\gamma \sin(2\Upsilon_0)}{L^2} \tag{5.73}$$

$$S^N_{+3} = -\frac{\mu M A_0 c_\gamma \sin(2\Upsilon_0)}{4L^2}, \qquad S^N_{\times 3} = \frac{\mu M A_0 \cos\gamma \cos(2\Upsilon_0)}{2L^2} \tag{5.74}$$

$$S^N_{+2} = -\frac{\mu^2 M^2 c_\gamma \sin(2\Upsilon_0)}{L^2}\,, \qquad S^N_{\times 2} = \frac{2\mu^2 M^2 \cos\gamma \cos(2\Upsilon_0)}{L^2} \tag{5.75}$$

$$S^N_{+1} = -\frac{5\mu M A_0 c_\gamma \sin(2\Upsilon_0)}{4L^2}\,, \qquad S^N_{\times 1} = \frac{5\mu M A_0 \cos\gamma \cos(2\Upsilon_0)}{2L^2}\,. \tag{5.76}$$

Továbbá bevezetve a $\mathbf{\Delta}$ vektor komponenseiből képzett $\Delta_{x+y} := \Delta_x \sin(2\Upsilon_0) + \Delta_y \cos(2\Upsilon_0)$, illetve $\Delta_{x-y} := \Delta_x \cos(2\Upsilon_0) - \Delta_y \sin(2\Upsilon_0)$ rövidítő jelöléseket az egyes felharmonikusok együtthatói a h^{1SO}_+ polarizáció esetén

$$C^{1SO}_{+4} = \frac{\mu^2 A_0^2 \cos\gamma \Delta_{x+y}}{4L^4}\,, \tag{5.77}$$

$$C^{1SO}_{+3} = \frac{\mu^2 A_0 \left(4M\mu \cos\gamma \Delta_{x+y} - A_0 \Delta_z \sin\gamma \sin\Upsilon_0\right)}{4L^4}\,, \tag{5.78}$$

$$C^{1SO}_{+2} = \frac{\mu^2 \left[\cos\gamma (A_0^2 + 2M^2\mu^2)\Delta_{x+y} - 2A_0 M\mu \Delta_z \sin\gamma \sin\Upsilon_0\right]}{2L^4}\,, \tag{5.79}$$

$$C^{1SO}_{+1} = \frac{\mu^2 \left[4A_0 M\mu \cos\gamma \Delta_{x+y} - (3A_0^2 + 4M^2\mu^2)\Delta_z \sin\gamma \sin\Upsilon_0\right]}{4L^4}\,, \tag{5.80}$$

$$C^{1SO}_{+0} = \frac{\mu^2 A_0 \left(A_0 \cos\gamma \Delta_{x+y} - 4M\mu \Delta_z \sin\gamma \sin\Upsilon_0\right)}{4L^4}\,, \tag{5.81}$$

$$S^{1SO}_{+4} = \frac{\mu^2 A_0^2 \cos\gamma \Delta_{x-y}}{4L^4}\,, \tag{5.82}$$

$$S^{1SO}_{+3} = \frac{\mu^2 A_0^2 \left(4M\mu \cos\gamma \Delta_{x-y} - A_0 \Delta_z \sin\gamma \cos\Upsilon_0\right)}{4L^4}\,, \tag{5.83}$$

$$S^{1SO}_{+2} = \frac{\mu^2 \left[\cos\gamma (A_0^2 + 2M^2\mu^2)\Delta_{x-y} - 2A_0 M\mu \Delta_z \sin\gamma \cos\Upsilon_0\right]}{2L^4}\,, \tag{5.84}$$

$$S^{1SO}_{+1} = \frac{\mu^2 \left[4A_0 M\mu \cos\gamma \Delta_{x-y} - (A_0^2 + 4M^2\mu^2)\Delta_z \sin\gamma \cos\Upsilon_0\right]}{4L^4}\,, \tag{5.85}$$

míg $h^{1SO}_\times$ esetén bevezetve még a $\Delta_{z\gamma} = \Delta_z \sin\gamma \cos\gamma$ jelölést

$$C^{1SO}_{\times 4} = \frac{\mu^2 A_0^2 \sin^2\gamma \Delta_{x-y}}{8L^4}\,, \tag{5.86}$$

$$C^{1SO}_{\times 3} = \frac{\mu^2 A_0 \left(2M\mu \sin^2\gamma \Delta_{x-y} + A_0 \Delta_{z\gamma} \cos\Upsilon_0\right)}{4L^4}\,, \tag{5.87}$$

$$C_{\times 2}^{1SO} = \frac{\mu^2 \left[\sin^2\gamma(A_0^2+2M^2\mu^2)\Delta_{x-y} - A_0^2\sin^2\gamma\sin^2\Upsilon_0\Delta_x + 2A_0M\mu\Delta_{z\gamma}\cos\Upsilon_0\right]}{4L^4}, \tag{5.88}$$

$$C_{\times 1}^{1SO} = \frac{\mu^2 \left[2A_0M\mu\sin^2\gamma\Delta_{x-y} - 8A_0M\mu\Delta_x + (3A_0^2+4M^2\mu^2)\Delta_{z\gamma}\cos\Upsilon_0\right]}{4L^4}, \tag{5.89}$$

$$C_{\times 0}^{1SO} = \frac{\mu^2 \left[A_0^2\sin^2\gamma\Delta_{x-y} - 2(1+\cos^2\gamma)(A_0^2+2M^2\mu^2)\Delta_x + 4A_0M\mu\Delta_{z\gamma}\cos\Upsilon_0\right]}{8L^4}, \tag{5.90}$$

$$S_{\times 4}^{1SO} = -\frac{\mu^2A_0^2\sin^2\gamma\Delta_{x+y}}{8L^4}, \tag{5.91}$$

$$S_{\times 3}^{1SO} = -\frac{\mu^2A_0\left(2M\mu\sin^2\gamma\Delta_{x+y} + A_0\Delta_{z\gamma}\sin\Upsilon_0\right)}{4L^4}, \tag{5.92}$$

$$S_{\times 2}^{1SO} = -\frac{\mu^2\left[\sin^2\gamma(A_0^2+2M^2\mu^2)\Delta_{x+y} + 4A_0M\mu\Delta_{z\gamma}\sin\Upsilon_0\right]}{4L^4}, \tag{5.93}$$

$$S_{\times 1}^{1SO} = -\frac{\mu^2\left[2A_0M\mu\sin^2\gamma\Delta_{x+y} + (A_0^2+4M^2\mu^2)\Delta_{z\gamma}\sin\Upsilon_0\right]}{4L^4}. \tag{5.94}$$

5.3. Körpálya határeset

5.3.1. A mozgásegyenletek kiintegrálása

A körpálya határeset definiálásához a próbatest esethez hasonlóan a relatív sebességvektort a

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{n} + r\omega\mathbf{m} \tag{5.95}$$

alakban bontjuk fel, és a korábbi egyenletek alapján a mozgás pályafrekvenciája

$$\omega = \dot{\Phi} + \dot{\Psi} = \dot{\Upsilon} \tag{5.96}$$

lesz. A körpálya határesetet ekkor a $\dot{r} = 0$ és $\dot{\Upsilon} = 0$ feltételek definiálják, és a továbbiakban a szeparációs vektor r hosszát a mozgás során megmaradó paraméterként kezeljük, mivel az csak a sugárzás hatására, 2,5 PN rendben változik (ekkor hívjuk a pályát kvázi-körpályának).

Ebben az esetben $v = v_\perp$, és

$$v_{\perp N} = \frac{L}{\mu r}, \tag{5.97}$$

$$v_{\perp PN} = -\frac{L[(1-3\eta)Er + (4-2\eta)M\mu]}{\mu^2 r^2} , \tag{5.98}$$

$$v_{\perp S} = \frac{2M\mu\mathbf{LS} - Er\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}}{M\mu L r^2} , \tag{5.99}$$

vagyis az Υ szögre vonatkozó $\dot{\Upsilon} = v_\perp/r$ egyenleteket idő szerint integrálva

$$\Upsilon_N = \frac{L}{\mu r^2} t , \tag{5.100}$$

$$\Upsilon_{PN} = -\frac{L[(1-3\eta)Er + (4-2\eta)M\mu]}{\mu^2 r^3} t , \tag{5.101}$$

$$\Upsilon_S = \frac{2M\mu\mathbf{LS} - Er\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}}{M\mu L r^3} t \tag{5.102}$$

eredményre jutunk. Hasonló módon

$$\beta_i = \beta_{iN} + \frac{(4+3\eta_i)J}{2r^3} t . \tag{5.103}$$

Körpálya határesetben a $\iota_S \sin\Phi_N$ és $\iota_S \sin\Phi_N$ kombinációk alakja már elég egyszerű, hogy itt részleteiben szerepeljen, különösen, mivel a többi, időben lineárisan változó szögmennyiséggel ellentétben ezeknek van harmonikus komponense is, vagyis

$$\iota_S \sin\Phi_N = -\sum_{i=1}^{2} \left\{ \frac{A_i \left[\cos\left(2\Upsilon_0 + \frac{2Lt}{\mu r} - \beta_{iN} \right) - \cos\beta_{iN} \right]}{L} + \frac{\sin\beta_{iN}(4+3\eta_i)Jt}{2Lr^3} \right\} \sin\alpha_i S_i , \tag{5.104}$$

illetve

$$\iota_S \cos\Phi_N = \sum_{i=1}^{2} \left\{ \frac{A_i \left[\sin\left(2\Upsilon_0 + \frac{2Lt}{\mu r} - \beta_{iN} \right) + \sin\beta_{iN} \right]}{L} - \frac{\cos\beta_{iN}(4+3\eta_i)Jt}{2Lr^3} \right\} \sin\alpha_i S_i , \tag{5.105}$$

ahol ezesetben az A_i együtthatók értéke

$$A_i = (2+\zeta_i)\frac{\mu}{2r} + \frac{\zeta_i L^2}{4M\mu r^2} . \tag{5.106}$$

5.3.2. A formális hullámalak

A hullámforma meghatározásakor az **N**, **p**, **q** triád kifejezései formálisan nem változnak, azonban a polarizációs állapotok alakja a $\dot{r} = 0$ feltétel mellett, és a [48] cikk (4.5) egyenlete alapján kiszámított

$$v_\perp^2 = r^2\omega^2 = \frac{M}{r}\left[1 - (3-\eta)\left(\frac{M}{r}\right) - \frac{1}{M^2}\sum_{i=1,2}(2+3\zeta^i)(\mathbf{n}\times\mathbf{m})\mathbf{S}_i\left(\frac{M}{r}\right)^{3/2}\right] \tag{5.107}$$

kifejezés behelyettesítésével tovább egyszerűsíthető, vagyis a h_+ és $h_\times$ polarizációs állapotok (3.88) formális alakjában az egyes járulékok a "plusszos" polarizáció esetén

$$\begin{aligned}
h_+^N &= \left(\frac{M}{r}\right)\Big[-(p_x^2-q_x^2)+(p_y^2-q_y^2)\Big]\\
h_+^{0,5} &= \left(\frac{M}{r}\right)^{3/2}\frac{\delta m}{M}\left[\frac{1}{2}N_y(p_x^2-q_x^2)+3N_x(p_xp_y-q_xq_y)-N_y(p_y^2-q_y^2)\right]\\
h_+^1 &= \left(\frac{M}{r}\right)^2\frac{1}{6}\Big\{\Big[(1-3\eta)(10N_x^2-2N_y^2)+(19-3\eta)\Big](p_x^2-q_x^2)\\
&- 32(1-3\eta)N_xN_y(p_xp_y-q_xq_y)+\Big[(1-3\eta)(-14N_x^2+6N_y^2)-(19-3\eta)\Big](p_y^2-q_y^2)\Big\}\\
h_+^{1SO} &= -\frac{1}{r^2}\Big[(\mathbf{\Delta q})p_x+(\mathbf{\Delta p})q_x\Big]\\
h_+^{1,5} &= \left(\frac{M}{r}\right)^{5/2}\left\{\left[\frac{\delta m}{M}(1-2\eta)\left(-\frac{37}{8}N_x^2+\frac{1}{4}N_y^2\right)+\frac{-101+12\eta}{24}\right]N_y(p_x^2-q_x^2)\right.\\
&+ \left[\frac{\delta m}{M}(1-2\eta)\left(-\frac{65}{12}N_x^2+\frac{15}{2}N_y^2\right)+\frac{-149+36\eta}{12}\right]N_x(p_xp_y-q_xq_y)\\
&+ \left.\left[\frac{\delta m}{M}(1-2\eta)\left(\frac{29}{4}N_x^2-N_y^2\right)+\frac{19-4\eta}{4}\right]N_y(p_y^2-q_y^2)\right\}\\
h_+^{1,5SO} &= \frac{2v}{r^2}\left\{3\left(2S_z+\frac{\delta m}{M}\Delta_z\right)(p_x^2-q_x^2)-\frac{1}{2}\left[\left(9\mathbf{S}+5\frac{\delta m}{M}\mathbf{\Delta}\right)\times(p_x\mathbf{p}-q_x\mathbf{q})\right]_y\right.\\
&- \left[\left(\mathbf{S}+\frac{\delta m}{M}\mathbf{\Delta}\right)\times(p_y\mathbf{p}-q_y\mathbf{q})\right]_x\\
&- \left.\left(\mathbf{S}+\frac{\delta m}{M}\mathbf{\Delta}\right)\cdot\left[N_y(p_x\mathbf{q}+q_x\mathbf{p})+N_x(p_y\mathbf{q}+q_y\mathbf{p})\right]\right\},
\end{aligned} \tag{5.108}$$

"keresztes" polarizáció esetén pedig

$$
\begin{aligned}
h_\times^N &= 2\left(\frac{M}{r}\right)\Big[-p_xq_x+p_yq_y\Big]\\
h_\times^{0,5} &= \left(\frac{M}{r}\right)^{3/2}\frac{\delta m}{M}\Big[N_yp_xq_x+3N_x(p_xq_y+q_xp_y)-2N_yp_yq_y\Big]\\
h_\times^{1} &= \left(\frac{M}{r}\right)^{2}\frac{1}{3}\Bigg\{\Big[(1-3\eta)(10N_x^2-2N_y^2)+(19-3\eta)\Big]p_xq_x\\
&- 16(1-3\eta)N_xN_y(p_xq_y+q_xp_y)+\Big[(1-3\eta)(-14N_x^2+6N_y^2)-(19-3\eta)\Big]p_yq_y\Bigg\}\\
h_\times^{1SO} &= -\frac{1}{r^2}\Big[(\mathbf{\Delta q})q_x-(\mathbf{\Delta p})p_x\Big]\\
h_\times^{1,5} &= \left(\frac{M}{r}\right)^{5/2}\Bigg\{\left[\frac{\delta m}{M}(1-2\eta)\left(-\frac{37}{4}N_x^2+\frac{1}{2}N_y^2\right)+\frac{-101+12\eta}{12}\right]N_yp_xq_x\\
&+ \left[\frac{\delta m}{M}(1-2\eta)\left(-\frac{65}{12}N_x^2+\frac{15}{2}N_y^2\right)+\frac{-149+36\eta}{12}\right]N_x(p_xq_y+q_xp_y)\\
&+ \left[\frac{\delta m}{M}(1-2\eta)\left(\frac{29}{2}N_x^2-2N_y^2\right)+\frac{19-4\eta}{2}\right]N_yp_yq_y\Bigg\}\\
h_\times^{1,5SO} &= \frac{2v}{r^2}\Bigg\{6\left(2S_z+\frac{\delta m}{M}\Delta_z\right)p_xq_x-\frac{1}{2}\left[\left(9\mathbf{S}+5\frac{\delta m}{M}\mathbf{\Delta}\right)\times(p_x\mathbf{q}+q_x\mathbf{p})\right]_y\\
&- \left[\left(\mathbf{S}+\frac{\delta m}{M}\mathbf{\Delta}\right)\times(p_y\mathbf{q}+q_y\mathbf{p})\right]_x\\
&- \left(\mathbf{S}+\frac{\delta m}{M}\mathbf{\Delta}\right)\cdot[N_y(q_x\mathbf{q}-p_x\mathbf{p})+N_x(q_y\mathbf{q}-p_y\mathbf{p})]\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{5.109}
$$

lesznek.

A hullámforma kiszámításának módszere azonos az általános esetben leírtnál, azzal a további előnnyel, hogy ennek végrehajtásakor megkapjuk a detektálható hullámforma explicit időfüggését.

5.3.3. A detektálható hullámalak explicit alakja

A módszer lépéseit ebben az esetben elvégezve az alábbi végeredményre jutottam. A polarizációs állapotok különböző rendekhez és effektusokhoz tartozó járulékainak időfüggése h_+

esetében

$$\begin{aligned}
h_{+}^{N} &= C_{+2}^{N}\cos\left(\frac{2L}{\mu r^2}t\right)+S_{+2}^{N}\sin\left(\frac{2L}{\mu r^2}t\right)\\
&+ \epsilon\left[C_{+2}^{NPN}\cos\left(\frac{2L}{\mu r^2}t\right)+S_{+2}^{NPN}\sin\left(\frac{2L}{\mu r^2}t\right)\right]+A_{+}^{NPN}\\
&+ \epsilon t\left[C_{+2}^{NPNt}\cos\left(\frac{2L}{\mu r^2}t\right)+S_{+2}^{NPNt}\sin\left(\frac{2L}{\mu r^2}t\right)\right]\\
&+ S\sum_{i=1}^{2}\left[C_{+(2i)}^{NS}\cos\left(\frac{2iL}{\mu r^2}t\right)+S_{+(2i)}^{NS}\sin\left(\frac{2iL}{\mu r^2}t\right)\right]+A_{+}^{NS}+\\
&+ St\left[C_{+2}^{NSt}\cos\left(\frac{2L}{\mu r^2}t\right)+S_{+2}^{NSt}\sin\left(\frac{2L}{\mu r^2}t\right)\right]+A_{+}^{NSt}\\
h_{+}^{0,5} &= \sum_{i=1}^{2}\left[C_{+(2i-1)}^{0,5}\cos\left(\frac{(2i-1)L}{\mu r^2}t\right)+S_{+(2i-1)}^{0,5}\sin\left(\frac{(2i-1)L}{\mu r^2}t\right)\right]\\
&+ \epsilon\sum_{i=1}^{2}\left[C_{+(2i-1)}^{0,5PN}\cos\left(\frac{(2i-1)L}{\mu r^2}t\right)+S_{+(2i-1)}^{0,5PN}\sin\left(\frac{(2i-1)L}{\mu r^2}t\right)\right]\\
&+ \epsilon t\sum_{i=1}^{2}\left[C_{+(2i-1)}^{0,5PNt}\cos\left(\frac{(2i-1)L}{\mu r^2}t\right)+S_{+(2i-1)}^{0,5PNt}\sin\left(\frac{(2i-1)L}{\mu r^2}t\right)\right]\\
h_{+}^{1} &= \sum_{i=1}^{2}\left[C_{+(2i)}^{1}\cos\left(\frac{2iL}{\mu r^2}t\right)+S_{+(2i)}^{1}\sin\left(\frac{2iL}{\mu r^2}t\right)\right]+A_{+}^{1}\\
h_{+}^{1SO} &= S\sum_{i=1}^{2}\left[C_{+i}^{1SO}\cos\left(\frac{iL}{\mu r^2}t\right)+S_{+i}^{1SO}\sin\left(\frac{iL}{\mu r^2}t\right)\right]\\
h_{+}^{1,5} &= \sum_{i=1}^{3}\left[C_{+(2i-1)}^{1,5}\cos\left(\frac{(2i-1)L}{\mu r^2}t\right)+S_{+(2i-1)}^{1,5}\sin\left(\frac{(2i-1)L}{\mu r^2}t\right)\right]\\
h_{+}^{1,5SO} &= S\sum_{i=1}^{3}\left[C_{+i}^{1,5SO}\cos\left(\frac{iL}{\mu r^2}t\right)+S_{+i}^{1,5SO}\sin\left(\frac{iL}{\mu r^2}t\right)\right]+A_{+}^{1,5SO}\ , \qquad (5.110)
\end{aligned}$$

és $h_\times$ esetében pedig

$$\begin{aligned}
h_\times^N &= C_{\times 2}^N \cos\left(\frac{2L}{\mu r^2}t\right) + S_{\times 2}^N \sin\left(\frac{2L}{\mu r^2}t\right) \\
&+ \epsilon\left[C_{\times 2}^{NPN} \cos\left(\frac{2L}{\mu r^2}t\right) + S_{\times 2}^{NPN} \sin\left(\frac{2L}{\mu r^2}t\right)\right] \\
&+ \epsilon t\left[C_{\times 2}^{NPNt} \cos\left(\frac{2L}{\mu r^2}t\right) + S_{\times 2}^{NPNt} \sin\left(\frac{2L}{\mu r^2}t\right)\right] \\
&+ S\sum_{i=1}^{2}\left[C_{\times(2i)}^{NS} \cos\left(\frac{2iL}{\mu r^2}t\right) + S_{\times(2i)}^{NS} \sin\left(\frac{2iL}{\mu r^2}t\right)\right] + \\
&+ St\left[C_{\times 2}^{NSt} \cos\left(\frac{2L}{\mu r^2}t\right) + S_{\times 2}^{NSt} \sin\left(\frac{2iL}{\mu r^2}t\right)\right] + A_\times^{NSt} \\
h_\times^{0,5} &= \sum_{i=1}^{2}\left[C_{\times(2i-1)}^{0,5} \cos\left(\frac{(2i-1)L}{\mu r^2}t\right) + S_{\times(2i-1)}^{0,5} \sin\left(\frac{(2i-1)L}{\mu r^2}t\right)\right] \\
&+ \epsilon\sum_{i=1}^{2}\left[C_{\times(2i-1)}^{0,5PN} \cos\left(\frac{(2i-1)L}{\mu r^2}t\right) + S_{\times(2i-1)}^{0,5PN} \sin\left(\frac{(2i-1)L}{\mu r^2}t\right)\right] + \\
&+ \epsilon t\sum_{i=1}^{2}\left[C_{\times(2i-1)}^{0,5PNt} \cos\left(\frac{(2i-1)L}{\mu r^2}t\right) + S_{\times(2i-1)}^{0,5PNt} \sin\left(\frac{(2i-1)L}{\mu r^2}t\right)\right] \\
h_\times^1 &= \sum_{i=1}^{2}\left[C_{\times(2i)}^1 \cos\left(\frac{2iL}{\mu r^2}t\right) + S_{\times(2i)}^1 \sin\left(\frac{2iL}{\mu r^2}t\right)\right] \\
h_\times^{1SO} &= S\sum_{i=1}^{2}\left[C_{\times i}^{1SO} \cos\left(\frac{iL}{\mu r^2}t\right) + S_{\times i}^{1SO} \sin\left(\frac{iL}{\mu r^2}t\right)\right] + A_\times^{1SO} \\
h_\times^{1,5} &= \sum_{i=1}^{3}\left[C_{\times(2i-1)}^{1,5} \cos\left(\frac{(2i-1)L}{\mu r^2}t\right) + S_{\times(2i-1)}^{1,5} \sin\left(\frac{(2i-1)L}{\mu r^2}t\right)\right] \\
h_\times^{1,5SO} &= S\sum_{i=1}^{3}\left[C_{\times i}^{1,5SO} \cos\left(\frac{iL}{\mu r^2}t\right) + S_{\times i}^{1,5SO} \sin\left(\frac{iL}{\mu r^2}t\right)\right] . \qquad (5.111)
\end{aligned}$$

Mivel ezen eredményeink az excentrikus pálya esetén kiszámított hullámformákhoz hasonló alakban írhatók fel, az ott tett megállapításaink ebben az esetben is fennállnak. Ezen felül jól látható, hogy a körpálya határesetben az egész poszt-newtoni rendű kifejezések esetén csak a páros, félegészes rendek esetén pedig csak a páratlan felharmonikusok jelennek meg. Ez alól kivételt jelentenek a spin-pálya kölcsönhatás korrekciói, és ez a jelenség körpálya határesetben a testek forgásának közvetlen mérésére ad lehetőséget.

Bár mindegyik konstans együttható kiírására ezesetben sincs lehetőségem, példaként, az összevetés érdekében a newtoni és legalacsonyabb rendű spin-pálya együtthatókat itt is részletezem. Általában nem minden együtthatóra igaz, hogy az $A_0 = 0$ feltétel alkalmazásával kapjuk az egyes együtthatók körpálya határesetben érvényes alakját. Azonban az alábbi esetekben ez mégis teljesül, vagyis

$$C^N_{+2} = \frac{\mu^2 M^2 c_\gamma \cos(2\Upsilon_0)}{L^2}, \qquad C^N_{\times 2} = \frac{2\mu^2 M^2 \cos\gamma \sin(2\Upsilon_0)}{L^2}, \tag{5.112}$$

$$S^N_{+2} = -\frac{\mu^2 M^2 c_\gamma \sin(2\Upsilon_0)}{L^2}, \qquad S^N_{\times 2} = \frac{2\mu^2 M^2 \cos\gamma \cos(2\Upsilon_0)}{L^2}, \tag{5.113}$$

illetve

$$C^{1SO}_{+2} = \frac{M^2\mu^4 \cos\gamma \Delta_{x+y}}{L^4}, \qquad C^{1SO}_{\times 2} = \frac{M^2\mu^4 \sin^2\gamma \Delta_{x-y}}{2L^4}, \tag{5.114}$$

$$C^{1SO}_{+1} = -\frac{M^2\mu^4 \Delta_z \sin\gamma \sin\Upsilon_0}{L^4}, \quad C^{1SO}_{\times 1} = \frac{M^2\mu^4 \Delta_z \sin\gamma \cos\gamma \cos\Upsilon_0}{L^4}, \tag{5.115}$$

$$S^{1SO}_{+2} = \frac{M^2\mu^4 \cos\gamma \Delta_{x-y}}{L^4}, \qquad S^{1SO}_{\times 2} = -\frac{M^2\mu^4 \sin^2\gamma \Delta_{x+y}}{2L^4}, \tag{5.116}$$

$$S^{1SO}_{+1} = -\frac{M^2\mu^4 \Delta_z \sin\gamma \cos\Upsilon_0}{L^4}, \quad S^{1SO}_{\times 1} = -\frac{M^2\mu^4 \Delta_z \sin\gamma \cos\gamma \sin\Upsilon_0}{L^4}, \tag{5.117}$$

$$A^{1SO}_{\times} = -\frac{M^2\mu^4 (1+\cos^2\gamma)\Delta_x}{2L^4}. \tag{5.118}$$

5.4. Kapcsolat a Lense-Thirring esettel

Végezetül, a saját eredmények összefoglalását az előző fejezetben részletesen tárgyalt Lense-Thirring esettel való összehasonlítással zárom. A próbatest eset az általános leírásból az úgynevezett extrém tömegarány határátmenettel ($m_2/m_1 \to 0$) áll elő. Ebben az esetben, mivel figyelembe véve a források bármilyen modelljét, az objektumok $\chi_{\mathcal{A}}$ forgási állandójának maximális értéke 1, az $|\mathbf{S}_{\mathcal{A}}| = \chi_{\mathcal{A}} m^2_{\mathcal{A}}$ összefüggésből a próbatest esetben $|\mathbf{S}_2| \to 0$ adódik, vagyis a második test forgásának hatását elhanyagolhatjuk.

Ha ezt a határátmenetet elvégezzük, akkor az így kapott próbatest leírás nem egyezik meg a 4. fejezetben részletezett Lense-Thirring rendszer vizsgálatának eredményeivel. Ennek fő oka az, hogy a koordinátarendszereket más elvek alapján választottuk ki, az egyes szögmennyiségek jelentése más és más.

De ezen formális különbségen túl van két elvi különbség is a leírások között. Ugyanis az általános esetben fontos szerepet kapott a $\mathbf{J}$ teljes impulzusmomentum vektor állandó volta és komponenseinek alakja. A Lense-Thirring esetben azonban mozgásállandóként csak a rendszer E energiáját és az $\mathbf{L}$ impulzusmomentum vektor hosszát, illetve L_z komponensét használtuk fel. Nem tisztáztuk azonban az ezek és a teljes impulzusmomentum vektor között fennálló összefüggéseket.

Amennyiben ezt figyelembe vennénk, kiderülne, hogy a ι' nyílásszög, illetve a ι szög integrálási konstansa a newtoni rendben zérus, ami az egyenletekben hasonló egyszerűsödéshez vezet, mint az általános leírás esetén. Ekkor további problémát jelent, hogy egy perturbációként fellépő vektorhoz ($\mathbf{S}_1$) rögzítettük az invariáns rendszer z koordinátatengelyét.

Ezeken túl a fő probléma az, hogy a Lense-Thirring leírás esetében éppen a koordinátarendszerek és az Euler-szögek bevezetésekor kulcsfontosságú elhanyagolni a spinvektor precesszióját. Erre a (3.50) becslés adott lehetőséget, mivel a spinvektor időbeli változásának rendje arányos a tömegek hányadosával. Az érvelés akkor az volt, hogy az ϵ poszt-newtoni paraméterhez képest elhanyagolható a tömegek aránya, vagyis 1,5 PN rendben maga spinvektor változása is.

Azonban a poszt-newtoni paraméter értéke nem állandó, és bár a változás dinamikája csak 2,5 PN rendű effektus, a paraméter értékét a maximális értékig szabadon megválaszthatjuk, vagyis a tömegarány elhanyagolhatósága nem jól definiált, az mindig függ ϵ választott értékétől. Ez a probléma az általános leírás esetén is fellép, de ott csak a különböző rendeken belül bizonyos tagok elhanyagolhatóságában jelenik meg a kérdés, míg a Lense-Thirring módszer esetén már a dinamika leírásakor bevezetett koordinátarendszerek megválasztásakor is problémát okozhat.

Ennek kiküszöbölésére a Lense-Thirring leírást adott ϵ paraméterű rendszer esetén alkalmazzuk, ahol a tömegarány elhanyagolhatósága jól definiált. Ezt figyelembe véve, illetve a teljes impulzusmomentum alakjának és állandóságának felhasználásával konstans szögű forgatások erejéig a két leírás azonos eredményekre vezet, de mivel a fenti megkötést az általános esetben nem szükséges kiróni, azt még a próbatest esetben is általánosabbnak tekinthetjük a Lense-Thirring leírásnál.

6. Összefoglalás

A dolgozat írásakor a célom az volt, hogy megfelelő elméleti felvezetés után bemutassam a kompakt objektumok alkotta kettősrendszerek által kibocsátott gravitációs hullámok leírásának módszerét és eredményeit a pálya excentrikusságának és a testek forgásának figyelembe vételével 1,5 PN rendben.

A téma irodalmát felölelő bevezetés után a második fejezetben bemutattam a poszt-newtoni közelítéssel leírható források által keltett gravitációs hullámok elméletét. Ennek részeként bemutattam a poszt-newtoni közelítés alapjait, a hullámok leírására használt poszt-minkowski multipólsorfejtést, illetve azt, hogy ezek hogyan illeszthetők egymáshoz a forrás téridejének külső, közeli zónájában.

Ennek eredményeként az aszimptotikus jövőben mérhető hullámformák olyan multipólkifejtésére jutunk, melyben a momentumok alakján keresztül megjelenik a poszt-newtoni forrás energia-impulzus tenzora.

A harmadik fejezetben bemutattam, hogy ezen elmélet hogyan alkalmazható kompakt kettősök esetére. Bemutattam, hogy a poszt-newtoni közelítés segítségével hogyan jellemezhető egy ilyen kettősrendszer dinamikája excentrikus pálya esetén, a spin-pálya kölcsönhatás figyelembe vételével. Külön kitértem a pálya valódi anomália paraméterezésének alapösszefüggéseire.

Megadtam a dinamika mozgásegyenleteit a próbatest esetben a Lense-Thirring közelítés alkalmazásával. Ebben a közelítésben a kettősrendszer dinamikájának teljes, a szögváltozók egyenleteit is tartalmazó leírásával rendelkezünk, ezen felül a valódi anomália paraméterezésnek is van ezen határesetre alkalmazható alakja.

Végül bemutattam, hogy kompakt kettősrendszerek esetén 1,5 PN rendig hogyan származtatjuk a multipólmomentumokat, illetve azok segítségével a perturbációt leíró tenzort, különválasztva az egyes poszt-newtoni rendű járulékokat, illetve a spin-pálya kölcsönhatás következtében fellépő korrekciókat.

A negyedik fejezetben foglaltam össze a próbatest esetben elért saját eredményeket. A mozgás leírásának kiegészítéseként kiintegráltam a valódi anomália paraméter függvényében a szögekre vonatkozó mozgásegyenleteket. A második és harmadik fejezet összefüggéseit felhasználva meghatároztam a detektálható hullámforma kiszámításának módszerét, majd azt alkalmaztam a valódi anomália paraméterezéssel adott mozgásleírásra.

Külön alfejezetben vizsgáltam a mozgás leírását és a polarizációs állapotok alakját a körpálya határesetben.

Az ötödik fejezet tartalmazza az általános eset leírását, amikor a kettősrendszer objektumainak tömege és spinje is – a poszt-newtoni közelítés keretein belül – tetszőleges. Ebben az esetben az irodalomban nem állt rendelkezésre a mozgás teljes leírása, csak a radiális egyenlet megoldása, vagyis a pálya paraméterezése.

A spinprecessziós egyenlet és a poszt-newtoni mozgásegyenlet is vektor-differenciálegyenlet, amelynek megoldásához mindkét esetben megfelelő szögváltozókat kellett bevezetni. A spinprecessziós egyenletek esetében ezek egyszerű gömbi polárszögek, míg a mozgásegyenletek esetén a szeparációs vektor komponensei Euler-szögekkel kifejezve adhatók meg. Ebben az esetben a radiális és szögegyenletek szétcsatolhatóak. Ezen szétcsatolt egyenleteket a valódi anomália paraméter függvényében kiintegráltam.

Második lépésként meghatároztam a polarizációs állapotok kiszámításának módszerét az általános esetben, majd felhasználva a mozgásegyenletek valódi anomália paraméterezéssel kiintegrált eredményeit, meghatároztam a detektálható hullámforma polarizációs állapotainak alakját.

A pálya excentrikussága által okozott effektusok vizsgálatához kiintegráltam a mozgásegyenleteket és meghatároztam a hullámforma kifejezéseit a körpálya határesetben.

A saját eredmények bemutatását az általános és próbatest esetek közötti összefüggések tisztázásával zártam, mivel a rendszer Lense-Thirring modellje és az általam megadott mozgásleírás között nincs egyértelmű, közvetlen határátmenet, a Lense-Thirring közelítés csak bizonyos feltételek mellett egyezik meg az általános leírás extrém tömegarányú határesetével.

A hullámformára vonatkozó eredmények azt mutatják, hogy az lényegében egy adott frekvenciájú jel tiszta felharmonikusai szerinti kifejtésként áll elő, ahol egy fél poszt-newtoni rend általában kettővel növeli az el nem tűnő felharmonikusok számát. Ezt az összefüggést bonyolítja, hogy bizonyos rendekben a legmagasabb felharmonikus együtthatója a koordinátarendszer-választásnak köszönhetően zérus értékű.

Az eredményeken jól látható, hogy a spin-pálya kölcsönhatás adott rendben mindig az alacsonyabb felharmonikusok együtthatóihoz ad korrekciót, és mivel mindkét spinvektor lineárisan jelenik meg az elméletben, az egy forgó testet tartalmazó és forgásmentes esetek egyszerű határátmenettel állnak elő.

A körpálya határeset vizsgálata kimutatta, hogy ebben az esetben egyrészt a legmagasabb felharmonikusok nem jelennek meg a leírásban, másrészt egész poszt-newtoni rendekben csak páros, félegész poszt-newtoni rendben csak páratlan felharmonikusok adnak járulékot. Ez alól kivétel a spin-pálya kölcsönhatás, ami a páros és páratlan felharmonikusokat vegyesen tartalmazza, és ez a testek forgásának közvetlen mérésére ad lehetőséget körpályák esetében.

A dolgozatban bemutatott, hullámformákra vonatkozó eredmények tovább egyszerűsíthetők, konkretizálhatók az integrálás során fellépő szögek és γ (a pálya- és teljes impulzusmomentum vektorok által bezárt szög) közötti összefüggések figyelembe vételével. Hasonlóan, a $h(t)$ detektálható jelalak kiszámításakor további összefüggések adódnak a ξ polarizációs szög és a h_+, illetve $h_\times$ polarizációs állapotok meghatározásakor fellépő konstans szögek között.

A dolgozatban szereplő eredmények felhasználásával, azokra alapozva több olyan kérdés és alkalmazási terület is felmerül, amelyek a további munka céljait meghatározzák.

Mivel célunk az ezen dolgozatban szereplő elméleti eredmények összevetése a detektorok által mért jelalakkal, az első feladat a hullámformák időfüggésének vizsgálata excentrikus pálya esetén. Mivel a paraméter időfüggését leíró egyenlet implicit, és nem oldható meg zárt alakban analitikusan, a hullámformák időtől függő alakját közelítő, vagy numerikus módszerek alkalmazásával tárhatjuk fel.

Egy másik lehetőség olyan módszer kidolgozása, mellyel a mért idősorokat konvertáljuk paramétertől függő jelalakká, amely már közvetlenül összehasonlítható a hullámformák analitikus kifejezéseivel. Ebben az esetben a legfontosabb a konvertálás más típusú források által generált gravitációs hullámformákra, valamint a szisztematikus és sztochasztikus hibákra gyakorolt hatásának vizsgálata.

További lehetőségként felmerül olyan paraméterezés választása, amely expliciten tartalmazza a pálya excentricitását jellemző paramétert. Ebben az esetben kiintegrálva a mozgásegyenleteket, és meghatározva a polarizációs állapotok alakját a körpálya határesettel való kapcsolat közvetlen vizsgálatára nyílik lehetőség.

A Földön telepített hullámdetektorok méréseinek kiértékelésében további lehetőséget nyújt a körpálya határeset eredményeinek a legbelső stabil körpályára való alkalmazása, mivel az összeolvadás dinamikáját vizsgáló szimulációk számára ennek segítségével adható meg a rendszer paramétereit tartalmazó analitikus kezdeti feltétel.

A továbblépési lehetőségek egy másik irányvonalát képezik a magasabb rendű poszt-newtoni effektusok vizsgálata. A 2 PN rendben fellépő spin-spin kölcsönhatás és a 2,5 PN rendben fellépő sugárzási visszahatás figyelembe vételével a dolgozatban szereplő leírást tovább pontosíthatjuk.

Ennek első lépése a spin-precessziós egyenletek minél magasabb rendű kiintegrálása. A legalacsonyabb rendű megoldás ismeretében a leírás rendről rendre kiegészíthető a spin-spin kölcsönhatás, a precesszióban fellépő relativisztikus poszt-newtoni effektus, a spin-önkölcsönhatás és a spinben magasabb rendű korrekciók járulékaival. Ezek közül a 2–2,5 PN rendű mozgásleíráshoz csak a spin-spin kölcsönhatás és az első relativisztikus poszt-newtoni korrekció figyelembe vétele szükséges.

Az ebben a dolgozatban leírt módszerek általánosításával és a spin-precessziós egyenletek magasabb rendű kiintegrálásával megadható a mozgás leírása 2 PN rendben, figyelembe véve a spin-spin kölcsönhatást is. Azonban ennél magasabb rendben számolni kell a sugárzás visszahatásával is, amely a mozgásállandókban is megjelenik, mint időtől függő perturbáció. Ennek legfontosabb következménye, hogy mivel a teljes impulzusmomentum vektor is időben változó lesz, a mozgás leírásakor nehezebben definiálható az invariáns koordinátarendszer, amely a differenciálegyenletek kiintegrálásában kulcsfontosságú szerepet tölt be.

A hullámok elméletében ennél bonyolultabb a helyzet, mivel 2 PN rendben már nem hagyható ki a leírásból a 1,5 PN rendhez tartozó faroktag részletes vizsgálata. Továbbá nem áll rendelkezésre a perturbációt leíró transzverzális spúrtalan tenzor 2 PN rendhez tartozó spin-pálya korrekciójának alakja sem. Ahhoz, hogy az itt leírt módszereket alkalmazhassuk magasabb rendben, először ezeket a problémákat kell megoldani.

A detektálható hullámforma kiszámításában 2,5 PN rendben már túl sok effektust kellene figyelembe vennünk az általános leírás analitikus tárgyalása során, így a legkézenfekvőbb ebben az esetben az úgynevezett kvázikörpályák esetének vizsgálata. Ebben az esetben a sugárzás a körpálya sugarának folyamatos csökkenését okozza. Ezen vizsgálat remélhetőleg reprodukálja a számítógépes modellek által jósolt "chirp" jelalakot, és feltárja, hogy a spin-pálya és spin-spin kölcsönhatások hogyan deformálják azt.

A dolgozatban közölt eredmények és itt röviden vázolt továbblépési lehetőségek a gravitációs hullámdetektorok fejlődésével, pontosságuk javulásával együtt már nem csak a hullámok észlelésére, ezáltal a gravitáció Einstein-féle relativitáselmélete helyességének bizonyítására lesznek alkalmasak, hanem bizonyos források paramétereinek mérésére, vizsgálatára is. Ezáltal a gravitációs hullámok detektálása a vizuális és rádiócsillagászat mellé felsorakozva a kozmosz megismerésének új eszközét jelenti majd számunkra.

Irodalomjegyzék

[1] A. Einstein, *Die Feldgleichungen der Gravitation*, Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften, 844–847 (1915).

[2] A. Einstein, *The Foundation of the General Theory of Relativity*, Annalen der Physik, (1916).

[3] K. Kuroda et al., in *Proceedings of International Conference on Gravitational Waves: Sources and Detectors*, eds. I. Ciufolini and F. Fidecaro (World Scientific, Singapore, 1997), p. 100.

[4] A. Abramovici et al., Science **256**, 325 (1992).

[5] B. Caron et al., Class. Quantum Grav. **14**, 1461 (1997).

[6] B. Willke et al., Class. Quantum Grav. **19**, 1377 (2002).

[7] P. Fritschel, in *Proc. SPIE* **4856**, eds. M. Cruise and P. Saulson (SPIE, Bellingham, WA, 2003), p. 282, gr-qc/0308090.

[8] K. Danzmann and A. Rüdiger, *Class. Quantum Grav.* **20**, S1 (2003).

[9] K. Danzmann et al., *LISA - Laser Interferometer Space Antenna, Pre-Phase A Report*, Max-Planck Institut für Quantenoptik, Report MPQ 233 (1998).

[10] G. Kocsis, M. E. Gáspár, and Sz. Márka, *Astrophys. J.* **648**, 411 (2006).

[11] R. Berti, V. Cardoso and C. M. Will, Phys. Rev. D**73**, 064030 (2006).

[12] W. B. Bonnor, Philos. Trans. R. Soc. London A **251**, 233 (1959).

[13] K. S. Thorne, Rev. Mod. Phys. **52**, 299 (1980).

[14] L. Blanchet, T. Damour, Philos. Trans. R. Soc. London A **320**, 379 (1986).

[15] L. Blanchet, Phys. Rev. D**51**, 2559 (1995).

[16] L. Blanchet, Class. Quant. Grav. **15**, 1971 (1998).

[17] L. Blanchet, Living Rev. Rel. **9**, (2006).

[18] C. Will and A. G. Wiseman, Phys. Rev. D**54**, 4813 (1996).

[19] T. Damour and N. Deruelle, Ann. Inst. Henri Poincaré, **43**, 107 (1985).

[20] T. Damour and G. Schäfer, Gen. Relativ. Gravit. **17**, 879 (1985).

[21] G. Schäfer and N. Wex, Phys. Lett. A **174**, 196 (1993).

[22] T. Damour, A. Gopakumar and B. I. Iyer, Phys. Rev. D**70**, 064028 (2004).

[23] H. Tagoshi, A. Ohashi and B. J. Owen, Phys. Rev. D**63**, 044006 (2001).

[24] G. Faye, L. Blanchet, and A. Buonanno, Phys. Rev. D**74**, 104033 (2006).

[25] I. Bailey and W. Israel, Ann. Phys. **130**, 188 (1980).

[26] F. A. E. Pirani, Acta Phys. Polon. 15, 389 (1956).

[27] W. Dixon, Nuovo Cim. 34, 317 (1964).

[28] W. M. Tulczyjew, Acta Phys. Polon. 18, 393 (1959).

[29] E. Corinaldesi and A. Papapetrou, Proc. R. Soc. A **9**, 259 (1951).

[30] B. M. Barker and R. F. O'Connel, Gen. Relativ. Gravit. **5**, 539 (1974).

[31] B. M. Barker and R. F. O'Connel, Gen. Relativ. Gravit. **11**, 149 (1979).

[32] K. S. Thorne and J. B. Hartle, Phys. Rev. D**31**, 1815 (1985).

[33] T. Damour, *300 Years of Gravitation*, ed. S. Hawking and W. Israel, Cambridge University Press, Cambridge (1987).

[34] J.D. Schnittman, Phys. Rev. D**70**, 124020 (2004).

[35] R.-M. Memmesheimer, A. Gopakumar and G. Schäfer, Phys. Rev. D**70**, 104011 (2004).

[36] C. Königsdörffer and A. Gopakumar, Phys. Rev. D**71**, 024039 (2005).

[37] L. Gergely, Z. Perjés, and M. Vasúth, Phys. Rev. D**57**, 876 (1998).

[38] L. Gergely, Z. Perjés, and M. Vasúth, Phys. Rev. D**57**, 3423 (1998).

[39] L. Gergely, Z. Perjés, and M. Vasúth, Phys. Rev. D**58**, 124001 (1998).

[40] Z. Keresztes, B. Mikóczi, L. Á. Gergely, Phys. Rev. D**72**, 104022 (2005).

[41] L. Gergely, Z. Perjés, and M. Vasúth, Astrophys. J. Suppl. Ser. **126**, 79 (2000).

[42] T. A. Apostolatos, C. Cutler, G. J. Sussman, and K. S. Thorne, Phys. Rev. D**49**, 6274 (1994).

[43] J. Lense and H. Thirring, Phys. Zeitschr. **19**, 156 (1918),
Fordítás: Gen. Relativ. Gravit. **16**, 727 (1984).

[44] L. Blanchet, Phys. Rev. D**51**, 2559 (1995).

[45] R. V. Wagoner and C. M. Will, Astrophys. J. **210**, 764 (1976).

[46] R. V. Wagoner and C. M. Will, Astrophys. J. **215**, 984 (1977).

[47] A. G. Wiseman, Phys. Rev. D**46**, 1517 (1992).

[48] L. E. Kidder, Phys. Rev. D**52**, 821 (1995).

[49] K. G. Arun, L. Blanchet, B. I. Iyer and M. S. S. Qusailah, Class. Quantum Grav. **21**, 3771 (2004).

[50] B. R. Iyer and C. M. Will, Phys. Rev. Lett. **70**, 116 (1993).

[51] C. Königsdörffer and A. Gopakumar, Phys. Rev. D**73**, 124012 (2006).

[52] J. Hadamard *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Hermann, Paris, (1932).

[53] L. Schwarz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, (1978).

[54] A. Buonanno, Y. Chen and M. Vallisneri, Phys. Rev. D**67**, 104025 (2003).

[55] A. Buonanno, Y. Chen, Y. Pan, H. Tagoshi and M. Vallisneri, Phys. Rev. D**72**, 084027 (2005).

[56] L. E. Kidder, C. M. Will and A. G. Wiseman, Phys. Rev. D**47**, 4183 (1993).

[57] L. Blanchet and T. Damour, Phys. Rev. D**46**, 4304 (1992).

[58] A. G. Wiseman, Phys. Rev. D**48**, 4757 (1993).

[59] R. Rieth and G. Schäfer, Class. Quantum Grav. **14**, 2357 (1997).

[60] L. Blanchet, Class. Quant. Grav. **15**, 89 (1998).

[61] L. Blanchet, Class. Quant. Grav. **15**, 113 (1998).

[62] A. Gopakumar and B.I. Iyer, Phys. Rev. D**56**, 7708 (1997).

[63] A. Gopakumar and B. I. Iyer, Phys. Rev. D**65**, 084011 (2002).

[64] A. Vecchio, Phys. Rev. D**70**, 042001 (2004).

[65] L. Blanchet, Proc. R. Soc. London A **409**, 383 (1987).

[66] L. E. Kidder, C. M. Will and A. G. Wiseman, Phys. Rev. D**47**, 3281 (1993).

[67] C. W. Lincoln and C. M. Will, Phys. Rev. D**42**, 1123 (1990).

[68] P. C. Peters and S. Mathews, Phys. Rev. D**131**, 435 (1963).

[69] J. Majár and M. Vasúth, Phys. Rev. D**74**, 124007 (2006), [arXiv: gr-qc/0611105].

[70] J. Majár, *Astrophysics of Variable Stars ASP Conference Series* , Vol. 349, (2006), szerkesztette: C. Sterken and C. Aerts.

[71] J. Majár, PADEU 17, 235 (2006), a *4th Workshop of Young Researchers in Astronomy and Astrophysics* konferencia kiadványa, szerkesztette: E. Forgács-Dajka

[72] M. Vasúth and J. Majár, megjelenik a *Proceedings of the Eleventh Marcel Grossmann Meeting on General Relativity* kötetben, szerkesztette: H. Kleinert, R. T. Jantzen and R. Ruffini.

[73] M. Vasúth and J. Majár, közlésre elfogadva az International Journal of Modern Physics A folyóiratban, [arXiv: gr-qc/0705.3481].

[74] J. Majár and M. Vasúth, beküldve a Physical Review D folyóirathoz.

[75] M. Vasúth and J. Majár, megjelenik a *Proceedings of the 29th Spanish Relativity Meeting* kötetben.

[76] R. M. Wald, *General relativity*, The University of Chicago Press (1984).

[77] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, J. Wiley & Sons, New York (1972).

[78] V. A. Fock, *Theory of space, time and gravitation*, Pergamon, London (1959).

[79] L. Blanchet and T. Damour, Ann. Inst. Henri Poincarè A **50**, 377 (1989).

[80] T. Damour, B. I. Iyer, Phys. Rev. D**43**, 3259 (1991).

[81] J. L. Friedman and J. R. Ipser, Philos Trans. R. Soc. London A **340**, 391 (1992).

[82] C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, Cambridge University Press, Cambridge (1981).

[83] L. Blanchet and G. Schäfer, Mon. Not. R. Astron. Soc. **239**, 845 (1989).

[84] T. Damour and N. Deruelle, C. R. Acad. Sci. Paris **293**, 877 (1981).